МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 330.4
ББК 65в6

ДВУХФАКТОРНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМИ ЭЛАСТИЧНОСТЯМИ ВЫПУСКА И ПРОИЗВОДСТВА

Г. А. Хацкевич [1], А. Ф. Проневич [2], В. Ю. Медведева[3]
Khatskevich@sbmt.by, pranevich@grsu.by, medvedeva_vj_97@mail.ru
[1]Доктор экономических наук, профессор, декан факультета бизнеса
Институт бизнеса и менеджмента технологий БГУ, г. Минск
[2]Кандидат физико-математических наук, доцент
Гродненский государственный университет им. Я.Купалы, г. Гродно
[3]Студент, Гродненский государственный университет им. Я.Купалы, г. Гродно

Аннотация

В работе рассмотрены обратные задачи восстановления двухфакторных производственных функций исходя из заданной эластичности выпуска по капиталу (*по труду*) *или эластичности производства. Указаны аналитические виды двухфакторных производственных функций, обладающих заданной эластичностью выпуска по капиталу* (*по труду*) *или эластичностью производства. Выделены классы двухфакторных производственных функций, соответствующие заданной* (*постоянной, линейной, дробно-линейной, степенной и др.*) *эластичности по капитулу* (*по труду*)*. Построено все множество двухфакторных производственных функций с заданной* (*постоянной, линейной, дробно-линейной, степенной и др.*) *эластичностью производства. Полученные результаты могут быть использованы при моделирования реальных производственных процессов.*

Ключевые слова: производственная функция; обратная задача; эластичность выпуска по капиталу; эластичность выпуска по труду; эластичность производства.

TWO-FACTOR PRODUCTION FUNCTIONS WITH GIVEN ELASTICITIES OF OUTPUT AND PRODUCTION

G.A. Khatskevich[1], A.F. Pranevich[2], V.Yu. Medvedeva[3]
Khatskevich@sbmt.by, pranevich@grsu.by, medvedeva_vj_97@mail.ru
[1]Doctor of economic sciences, professor, dean of the faculty of business
School of Business and Management of Technology of BSU, Minsk
[2] Candidate of physico-mathematical Sciences, associate Professor
Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno
[3] Student, Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno

Abstract

In this paper, we consider inverse problems of identifying two-factor production functions from given elasticity of output with respect to capital (*elasticity of output with respect to labor*) *or from given elasticity of production. The analytical forms of two-factor production functions with given elasticity of output with respect to capital* (*elasticity of output with respect to labor*) *or with given elasticity of production are indicated. Classes of two-factor production functions that correspond to given* (*constant, linear, linear-fractional, exponential, etc.*) *elasticity of output with respect to capital* (*elasticity of output with respect to labor*) *are obtained. Full set of two-factor* *production functions with given* (*constant, linear, linear-fractional, exponential, etc.*) *elasticity of production is built. The obtained results can be applied in modeling of production processes.*

Keywords: production function; inverse problem; elasticity of output with respect to capital; elasticity of output with respect to labor; elasticity of production.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие производственной функции, описывающей зависимость выпуска от затрат, сформировалось на рубеже XIX и XX вв. В экономическую теорию термин «производственная функция» был введен в 1891 году [1] английским математиком А. Берри (A. Berry), помогавшим А. Маршаллу (A. Marshall) при подготовке математического приложения к его монографии «Принципы экономической науки» [2]. Однако попытки установить зависимость выпуска продукции от количества используемых ресурсов и придать этой зависимости некоторую аналитическую форму имели место задолго до этого момента (исторический обзор по становлению теории производственных функций смотри, например, в работах [3 – 6], а современное состояние и обзор литературы по этому направлению приведены в монографиях [7 – 9]).

В настоящее время производственная функция выступает базовым элементом математического моделирования производственных объектов и систем на различных уровнях – от крупного предприятия до национальных экономик. Ввиду большого разнообразия экономических процессов одной из основных проблем при их моделировании становиться задача выбора аналитической формы производственной функции. Прежде всего, этот выбор обусловливается теоретическими соображениями, которые должны учитывать особенности взаимосвязей между конкретными ресурсами и результативными признаками. Необходимо также учитывать особенности реальных или статистических данных, по которым оцениваются параметры производственной функции.

Рассмотрим двухфакторную производственную функцию (ПФ)

$$Y:(K, L)\to F(K, L) \quad \forall(K, L)\in G, \tag{1}$$

где K – капитал (объем основных фондов в стоимостном или натуральном выражении), L – труд (объем трудовых ресурсов, т.е. число рабочих, число человеко-дней, человеко-часов и т.п.), Y – объем выпущенной продукции в стоимостном или натуральном выражении, а неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на области G из первого квадранта

$$\mathbf{R}_{+}^{2}=\{(K, L): K\geq 0, L\geq 0\}.$$

В процессе развития теории производственных функций определился набор стандартных двухфакторных производственных функций, обладающих заранее определенными свойствами (например, однородности и заданной эластичности замещения факторов производства). Укажем некоторые наиболее распространенные двухфакторные производственные функции, широко используемые в практике моделирования производственных процессов.

В 1928 году американскими учеными Ч.У. Коббом (Ch.W.Cobb) и П.Х. Дугласом (P.H. Douglas) в работе «Теория производства» [10] для описания влияния величины затрачиваемого капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США за 1899 – 1922 гг. была использована степенная функция (производственная функция Кобба−Дугласа)

$$Y:(K,L)\to AK^{\alpha}L^{\beta} \quad \forall(K,L)\in\mathbf{R}_{+}^{2}, \quad A>0, \quad \alpha,\beta\in(0;1), \quad \alpha+\beta=1. \tag{2}$$

В своей более поздней статье [11] П.Х. Дуглас (P.H. Douglas) снял предположения об условиях, накладываемых на показатели степеней α и β функции (2).

Большое применение в экономическом анализе получила CES-функция (или ACMC-функция)

$$Y:(K,L)\to\ A\left(bK^{-\gamma}+(1-b)\,L^{-\gamma}\right)^{-1/\gamma}\quad \forall(K,L)\in G,\qquad (3)$$
$$A>0,\quad b\in[0;1],\quad \gamma\in[-1;0)\cup(0;+\infty),$$

впервые использованная [12] в 1961 году учеными-экономистами К.Д. Эрроу (K.J. Arrow), Х.Чинери (H. Chenery), Б.С. Минхас (B.S. Minhas) и Р.М. Солоу (R.M. Solow). Из CES-функции (3) при $\gamma=-1$ получаем линейную однородную производственную функцию

$$Y:(K,L)\to\ cK+dL\quad \forall(K,L)\in\mathbf{R}_{+}^{2},\quad c=Ab,\ \ d=A(1-b);\qquad (4)$$

при $\gamma\to 0$ имеем производственную функцию Кобба−Дугласа с параметрами $\alpha=b,\ \beta=1-b;$ а при $\gamma\to+\infty$ предельной для CES-функции (3) является производственная функция Леонтьева

$$Y:(K,L)\to\ A\cdot\min(K;L)\quad \forall(K,L)\in\mathbf{R}_{+}^{2},\quad A>0.\qquad (5)$$

Каждая из двухфакторных производственных функций (1) характеризуется несколькими показателями. ***В первую очередь***, это характеристики – *эластичность выпуска по капиталу* (*по труду*)

$$E_K(K,L)=\frac{K}{F(K,L)}\partial_K F(K,L)\quad \forall(K,L)\in G'\subset G\qquad (6)$$
$$\left(E_L(K,L)=\frac{L}{F(K,L)}\partial_L F(K,L)\quad \forall(K,L)\in G'\right)$$

и *эластичность производства*

$$E(K,L)=E_K(K,L)+E_L(K,L)=\frac{K}{F(K,L)}\partial_K F(K,L)+\frac{L}{F(K,L)}\partial_L F(K,L)=$$
$$=\frac{1}{F(K,L)}\left(K\partial_K F(K,L)+L\partial_L F(K,L)\right)\quad \forall(\mathrm{K},\mathrm{L})\in \mathrm{G}'\subset\mathrm{G}.\qquad (7)$$

Так, например, для производственной функции Кобба–Дугласа (2) эластичности выпуска по капиталу и труду являются постоянными функциями

$$E_K(K,\ L)=\frac{K}{AK^{\alpha}L^{\beta}}\partial_K\left(AK^{\alpha}L^{\beta}\right)=\frac{K}{AK^{\alpha}L^{\beta}}\cdot\left(\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}\right)=\alpha\quad \forall(K,L)\in\mathbf{R}_{++}^{2}$$

и

$$E_L(K,\ L)=\frac{L}{AK^{\alpha}L^{\beta}}\partial_L\left(AK^{\alpha}L^{\beta}\right)=\frac{L}{AK^{\alpha}L^{\beta}}\cdot\left(\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}\right)=\beta\ \ \forall(K,L)\in\mathbf{R}^2_{++},$$

где множество $\mathbf{R}^2_{++}=\mathbf{R}^2_{+}\setminus\{(0,0)\}$, а эластичность производства

$$E(K,L)=E_K(K,L)+E_L(K,L)=\alpha+\beta\quad\forall(K,L)\in\mathbf{R}^2_{++}.$$

Эластичности выпуска по капиталу и труду для CES-функции (3) есть рациональные функции относительно фондовооруженности труда

$$E_K(K,\ L)=\frac{bL^{\gamma}}{bL^{\gamma}+(1-b)K^{\gamma}}=\frac{b}{b+(1-b)k^{\gamma}}\quad\forall(K,L)\in\mathbf{R}^2_{++}$$

и

$$E_L(K,\ L)=\frac{(1-b)K^{\gamma}}{bL^{\gamma}+(1-b)K^{\gamma}}=\frac{(1-b)k^{\gamma}}{b+(1-b)k^{\gamma}}\quad\forall(K,L)\in\mathbf{R}^2_{++},$$

где $k=K/L$, а эластичность производства есть единичная функция

$$E(K,L)=E_K(K,L)+E_L(K,L)=\frac{b}{b+(1-b)k^{\gamma}}+\frac{(1-b)k^{\gamma}}{b+(1-b)k^{\gamma}}=1\ \ \forall(K,L)\in\mathbf{R}^2_{++}.$$

В общем случае для однородных производственных функций имеет место

Предложение 1 [13, с. 77]. *Если производственная функция* (1) *является однородной степени* $m\in\mathbf{R}$, *то эластичность производства этой производственной функции постоянна и равна* m.

Действительно, используя теорему Эйлера для однородных функций на области G получаем

$$E(K,L)=\frac{1}{F(K,L)}\left(K\,\partial_K F(K,L)+L\,\partial_L F(K,L)\right)=\frac{1}{F(K,L)}\left(mF(K,L)\right)=m.\ \square$$

Второй характеристикой производственной функции (1) выступают показатели эффективности процесса замещения факторов производства – *предельная норма замещения труда капиталом*

$$h(K,L)=\frac{\partial_L F(K,L)}{\partial_K F(K,L)}\quad\forall(K,L)\in G'$$

и *эластичность замещения труда капиталом*

$$\sigma(K,L)=\frac{d(K/L)}{K/L}\Bigg/\frac{dh(K,L)}{h(K,L)}=\frac{d\ln(K/L)}{d\ln h(K,L)}\quad\forall(K,L)\in G'\subset G.$$

Производственные функции (2) − (5) являются примерами однородных функций постоянной эластичности замещения факторов производства: функция Кобба–Дугласа (2) имеет единичную эластичность замещения, т.е. $\sigma(K,L)=1;$ для CES-функции (3) эластичность замещения факторов производства равна $\sigma(K,L)=1/(1+\gamma);$ у линейной функции (4) эластичность замещения факторов бесконечна, а для функции Леонтьева (5) эластичность замещения факторов равна нулю. В общем случае, класс *однородных* двухфакторных производственных функций (1) с *постоянной эластичностью замещения* факторов производства описывается следующим утверждением (см., например, [14; 15])

Предложение 2. *Пусть двухфакторная производственная функция* (1) *является однородной степени* $m\neq 0$ *и имеет постоянную эластичность замещения факторов* *производства* $\sigma \neq 0$. *Тогда двухфакторная производственная функция* (1) *имеет аналитический вид*

$$Y:(K,L)\to \left[\begin{array}{ll} \beta K^{\alpha}L^{m-\alpha} & \text{при } \ \sigma=1; \\ \left(\beta_1 K^{\gamma}+\beta_2 L^{\gamma}\right)^{m/\gamma} & \text{при } \ \sigma\neq 1, \end{array}\right.$$

где число α *такое, что* $\alpha \neq 0$ *и* $\alpha \neq q$, *числа* $\beta, \beta_1, \beta_2 > 0$, *а* $\gamma = (\sigma-1)/\sigma$.

Однако класс однородных производственных функций с постоянной эластичностью замещения факторов производства в полной мере не позволяет описывать реальные процессы производства, что приводит к задаче его расширения в разных направлениях (см., например, работы [7 − 9; 16 − 21]).

В данной статье получены новые виды производственных функций, что расширяет возможности для моделирования реальных производственных процессов. А именно решена одна из *обратных задач* теории производственных функций: восстановить производственную функцию исходя из заданной эластичности выпуска по капиталу (по труду) или эластичности производства. Способ построения производственной функции основан на нахождении решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Основные результаты данной работы выражают теоремы 1 – 3.

Теорема 1. *Пусть для некоторого производства известна эластичность выпуска по капиталу*

$$E_K:(K,L)\to E_K(K,L) \quad \forall (K,L)\in G,\ \ G\subset \mathbf{R}^2_+ .$$

Тогда этот производственный процесс на области G *описывается одной из производственных функций вида*

$$F_{\varphi}:(K,L)\to \varphi(L)\exp\int \frac{E_K(K,L)}{K}dK \quad \forall (K,L)\in G, \tag{8}$$

где φ *— произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция на открытом числовом промежутке* $(0;+\infty)$.

Доказательство. Если задана эластичность выпуска по капиталу $E_K : G\to \mathbf{R}$ некоторого производственного процесса, то соответствующая ему производственная функция $F:G\to \mathbf{R}^2_+$ является решением уравнения в частных производных первого порядка (согласно формуле (6))

$$\frac{K}{F(K,L)}\partial_K F(K,L)=E_K(K,L).$$

Решая это дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial_K F(K,L)}{F(K,L)}=\frac{E_K(K,L)}{K}, \quad \partial_K \ln F(K,L)=\frac{E_K(K,L)}{K},$$

$$\ln F(K,L)=\int \frac{E_K(K,L)}{K}dK+\psi(L),$$

находим производственную функцию

$$F(K,L)=\exp\left(\int\frac{E_K(K,L)}{K}dK+\psi(L)\right)=\varphi(L)\exp\int\frac{E_K(K,L)}{K}dK \quad \forall(K,L)\in G,$$

где $\varphi=\exp\psi$ и ψ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции переменной L.

Следовательно, класс производственных функций, описывающий производственный процесс с заданной эластичностью выпуска по капиталу $E_K : G\to\mathbf{R}$, имеет аналитический вид (8). □

Основываясь на теореме 1 для некоторых заданных эластичностей выпуска по капиталу, вычислим соответствующие им классы производственных функций (таблица 1).

Таблица 1 - Вид производственной функции, соответствующий заданной эластичности выпуска по капиталу (the form of production function with given elasticity of output with respect to capital).

	Эластичность выпуска по капиталу $(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R},\ f,g\in C(G))$	**Аналитический вид ПФ**
1.	$E_K(K,L)=\gamma$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(L)K^\gamma$
2.	$E_K(K,L)=\alpha K+\beta L+\gamma$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(L)K^{\beta L+\gamma}e^{\alpha K}$
3.	$E_K(K,L)=f(K)+g(L)$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(L)K^{g(L)}\exp\int\frac{f(K)}{K}dK$
4.	$E_K(K,L)=K^\alpha f\left(\frac{K}{L}\right)$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(L)\exp\left(L^\alpha\int\xi^{\alpha-1}f(\xi)d\xi\right)_{\vert\xi=\frac{K}{L}}$
5.	$E_K(K,L)=L^\beta f\left(\frac{K}{L}\right)$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(L)\exp\left(L^\beta\int\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi\right)_{\vert\xi=\frac{K}{L}}$
6.	$E_K(K,L)=f\left(K^\alpha L^\beta\right),\quad \alpha,\beta\neq 0$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(L)\exp\left(\frac{1}{\alpha}\int\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi\right)_{\vert\xi=K^\alpha L^\beta}$

Источник: разработана авторами

Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть для некоторого производства известна эластичность выпуска по труду*

$$E_L:(K,L)\to E_L(K,L)\quad\forall(K,L)\in G,\quad G\subset\mathbf{R}_+^2.$$

Тогда этот производственный процесс на области G *описывается одной из производственных функций вида*

$$F_\varphi:(K,L)\to\ \varphi(K)\exp\int\frac{E_L(K,L)}{L}dL\quad\forall(K,L)\in G,$$

где φ *– произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция на открытом числовом промежутке* $(0;+\infty)$.

Основываясь на теореме 2 для некоторых заданных эластичностей выпуска по труду, вычислим соответствующие им классы производственных функций (таблица 2).

Таблица 2 - Вид производственной функции, соответствующий заданной эластичности выпуска по труду (the form of production function with given elasticity of output with respect to labor).

	Эластичность выпуска по труду $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}, \quad f, g \in C(G))$	**Аналитический вид ПФ**
1.	$E_L(K, L) = \gamma$	$F_\varphi(K, L) = \varphi(K)L^\gamma$
2.	$E_L(K, L) = \alpha K + \beta L + \gamma$	$F_\varphi(K, L) = \varphi(K)L^{\alpha K + \gamma} e^{\beta L}$
3.	$E_L(K, L) = f(K) + g(L)$	$F_\varphi(K, L) = \varphi(K)L^{f(K)} \exp \int \frac{g(L)}{L} dL$
4.	$E_L(K, L) = K^\alpha f\left(\frac{K}{L}\right)$	$F_\varphi(K, L) = \varphi(K)\exp\left(-K^\alpha \int \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi\right)_{\mid \xi = \frac{K}{L}}$
5.	$E_L(K, L) = L^\beta f\left(\frac{K}{L}\right)$	$F_\varphi(K, L) = \varphi(K)\exp\left(-K^\beta \int \frac{f(\xi)}{\xi^{\beta+1}} d\xi\right)_{\mid \xi = \frac{K}{L}}$
6.	$E_L(K, L) = f(K^\alpha L^\beta), \quad \alpha, \beta \neq 0$	$F_\varphi(K, L) = \varphi(K)\exp\left(\frac{1}{\beta}\int \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi\right)_{\mid \xi = K^\alpha L^\beta}$

Источник: разработана авторами

В случае, когда известна эластичность производства имеет место

Теорема 3. *Пусть для некоторого производственного процесса задана эластичность производства* $E : G \to \mathbf{R}.$. *Тогда этот процесс описывается одной из производственных функций вида*

$$F_\varphi : (K, L) \to \varphi\left(\frac{K}{L}\right)\exp\left(\int \frac{E(C_1 L, L)}{L} dL\right)_{\mid C_1 = \frac{K}{L}} \quad \forall (K, L) \in G, \tag{9}$$

где φ *– произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция на открытом числовом промежутке* $(0; +\infty)$.

Доказательство. Пусть $E : (K, L) \to E(K, L) \quad \forall (K, L) \in G$ есть эластичность производства, заданная посредством непрерывной функции на области $G \subset \mathbf{R}_+^2$. Тогда производственная функция (1), описывающая этот производственный процесс, находится из дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (согласно формуле (7))

$$K\partial_K F(K, L) + L\partial_L F(K, L) = F(K, L) \cdot E(K, L). \tag{10}$$

Квазилинейному уравнению в частных производных первого порядка (10) соответствует дифференциальная система в симметрической форме

$$\frac{dK}{K} = \frac{dL}{L} = \frac{dF}{E(K, L)F}. \tag{11}$$

Из дифференциального уравнения

$$\frac{dK}{K}=\frac{dL}{L} \quad\Leftrightarrow\quad d\ln K = d\ln L \quad\Leftrightarrow\quad d\ln\frac{K}{L}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln\frac{K}{L}=\tilde{C}_1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{K}{L}=C_1,$$

где $C_1=\exp\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_1$— произвольные вещественные постоянные, получаем, что рациональная функция $\xi_1:(K,L)\to\frac{K}{L}\quad\forall(K,L)\in\mathbf{R}^2_{++}$ является первым интегралом дифференциальной системы (11).

С учётом того, что $\frac{K}{L}=C_1$, а значит, $K=C_1L,$ имеем

$$\frac{dL}{L}=\frac{dF}{E(K,L)F} \quad\Rightarrow\quad \frac{dF}{F}=\frac{E(C_1L,L)}{L}dL \quad\Leftrightarrow\quad \ln F=\int\frac{E(C_1L,L)}{L}dL+\tilde{C}_2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad F=C_2\exp\left(\int\frac{E(C_1L,L)}{L}dL\right) \quad\Leftrightarrow\quad F\exp\left(-\int\frac{E(C_1L,L)}{L}dL\right)=C_2,$$

где $C_2=\exp\tilde{C}_2$ и $\tilde{C}_2$ – произвольные постоянные. Поэтому функция

$$\xi_2:(K,L)\to\ F\exp\left(-\int\frac{E(C_1L,L)}{L}dL\right)_{|C_1=\frac{K}{L}}\quad\forall(K,L)\in G$$

является первым интегралом дифференциальной системы (11).

На основании функционально независимых на области *G* первых интегралов ξ_1 и ξ_2 системы (11) строим общее решение дифференциального уравнения в частных производных (10):

$$\Phi\left(\frac{K}{L},\ F\exp\left(-\int\frac{E(C_1L,L)}{L}dL\right)_{|C_1=\frac{K}{L}}\right)=0,$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Разрешая эту зависимость относительно второго аргумента, получим решение уравнения в частных производных первого порядка (10) в явном виде (9). □

По теореме 3 для некоторых заданных эластичностей производства, вычислим соответствующие им классы производственных функций (таблица 3).

Таблица 3 - Вид производственной функции, соответствующий заданной эластичности производства (the form of production function with given elasticity of production).

	Эластичность производства $(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R},\quad f,g\in C(G))$	**Аналитический вид ПФ**
1.	$E(K,L)=\gamma$	$F_\varphi(K,L)=L^\gamma\varphi\left(\frac{K}{L}\right)$
2.	$E(K,L)=\alpha K+\beta L+\gamma$	$F_\varphi(K,L)=L^\gamma\varphi\left(\frac{K}{L}\right)\exp(\alpha K+\beta L)$
3.	$E(K,L)=f(\alpha K+\beta L)$	$F_\varphi(K,L)=\varphi\left(\frac{K}{L}\right)\exp\left(\int\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi\right)_{\lvert\xi=\alpha K+\beta L}$
4.	$E(K,L)=f(K)+g(L)$	$F_\varphi(K,L)=\varphi\left(\frac{K}{L}\right)\exp\left(\int\frac{f(K)}{K}dK+\int\frac{g(L)}{L}dL\right)$

Продолжение таблицы 3.

5.	$E(K,L)=f\left(\frac{K}{L}\right)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(\frac{K}{L}\right)\exp\left(\ln L\cdot f\left(\frac{K}{L}\right)\right)$
6.	$E(K,L)=K^{\alpha}f\left(\frac{K}{L}\right), \alpha\neq 0$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(\frac{K}{L}\right)\exp\left(\frac{1}{\alpha}K^{\alpha}f\left(\frac{K}{L}\right)\right)$
7.	$E(K,L)=L^{\beta}f\left(\frac{K}{L}\right), \beta\neq 0$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(\frac{K}{L}\right)\exp\left(\frac{1}{\beta}L^{\beta}f\left(\frac{K}{L}\right)\right)$
8.	$E(K,L)=f\left(K^{\alpha}L^{\beta}\right), \alpha\neq -\beta$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(\frac{K}{L}\right)\exp\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\int\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi\right)_{\mid\xi=K^{\alpha}L^{\beta}}$

Источник: разработана авторами

Так, например, если эластичность производства является постоянной

$$E:(K,L)\to\gamma\quad\forall(K,L)\in G,\quad\gamma\in\mathbf{R},$$

то производственный процесс описывается одной из производственных функций вида (таблица 3)

$$F_{\varphi}:(K,L)\to L^{\gamma}\varphi\left(\frac{K}{L}\right)\quad\forall(K,L)\in G,$$

где φ – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция на открытом числовом луче $(0;+\infty)$.

Отметим, что данный класс производственных функций содержит при $\varphi(k)=Ak^{\alpha}$ производственную функцию Кобба-Дугласа (2), CES-функцию (3) при $\varphi(k)=A\left(bk^{\rho}+(1-b)\right)^{\gamma/\rho}$ и линейную функцию (4) при $\varphi(k)=ck+d$ и $\gamma=1$.

ВЫВОДЫ

В работе решены обратные задачи восстановления двухфакторных производственных функций исходя из заданной эластичности выпуска по капиталу (по труду) или эластичности производства. Указаны аналитические виды двухфакторных производственных функций, обладающих заданной эластичностью выпуска по капиталу (теорема 1), эластичностью выпуска по труду (теорема 2) или эластичностью производства (теорема 3). Выделены классы двухфакторных производственных функций, соответствующие заданной (постоянной, линейной, дробно-линейной, степенной и др.) эластичности по капитулу (таблица 1) или эластичности по труду (таблица 2). Построено все множество двухфакторных производственных функций с заданной (постоянной, линейной, дробно-линейной, степенной и др.) эластичностью производства (таблица 3).

Полученные теоретические результаты (теоремы 1 – 3 и таблицы 1 – 3) могут быть использованы при моделирования реальных производственных процессов, которые имеют известные эластичности выпуска по капиталу (по труду) или эластичности производства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berry, A. The pure theory of distribution / A. Berry // British Association of Advancement of Science: Report of the 60th Meeting. – 1891. – P. 923 – 924.

2. Маршал, А. Принципы экономической науки / А. Маршал. – М.: Прогресс, 1993. – 594 с.

3. Humphrey, T. M. Algebraic production functions and their uses before Cobb-Douglas / T.M. Humphrey // Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly. – 1997. – Vol. 83/1. – P. 51 – 83.

4. Mishra, S. K. A brief history of production functions / S. K. Mishra // The IUP Journal of Managerial Economics. – 2010. – Vol. 8(4). – P. 6 – 34.

5. Тарасевич, Л. С. 50 лекций по микроэкономике / Л. С. Тарасевич, В.М. Гальперин, С.М. Игнатьев. – СПб.: Экономическая школа, 2000. – 862 с.

6. Симонов, П. М. Экономико-математическое моделирование / П. М. Симонов. – Пермь: Пермский гос. ун-т., 2009. – Ч. 1. – 338 с.

7. Клейнер, Г. Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г. Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

8. Клейнер, Г. Б. Экономика. Моделирование. Математика. Избранные труды / Г. Б. Клейнер. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 856 с.

9. Горбунов, В. К. Производственные функции: теория и построение / В. К. Горбунов. – Ульяновск: УлГУ, 2013. – 84 с.

10. Cobb, C. W. A theory of production / C.W. Cobb, P.H. Douglas // American Economic Review. – 1928. – Vol. 18. – P. 139 – 165.

11. Douglas, P. H. The Cobb-Douglas production function once again: its history, its testing, and some new empirical values // P.H. Douglas // Journal of Political Economy. – 1976. – Vol. 84, No. 5. – P. 903 – 916.

12. Arrow, K. J. Capital-labor substitution and economic efficiency / K. J. Arrow, H. B. Chenery, B. S. Minhas, R. M. Solow // The Review of Economics and Statistics. – 1961. – Vol. 43, No. 3. – P. 225 – 250.

13. Альсевич, В. В. Математическая экономика. Конструктивная теория / В. В. Альсевич. – Мн.: Дизайн ПРО, 1998. – 240 с.

14. Losonczi, L. Production functions having the CES property / L. Losonczi // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. – 2010. – Vol. 26(1). – P. 113 – 125.

15. Chen, B.-Y. Classification of h-homogeneous production functions with constant elasticity of substitution / B.-Y. Chen // Tamkang journal of mathematics. – 2012. – Vol. 43, No. 2. – P. 321 – 328.

16. Revankar, N. S. A class of variable elasticity of substitution production functions / N. S. Revankar // Econometrica. – 1971. – Vol. 39, No. 1. – P. 61–71.

17. Sato, R. Production function with variable elasticity of factor substitution: some analysis and testing / R. Sato, R. F. Hoffman // The Review of Economics and Statistics. – 1968. – Vol. 50. – P. 453–460.

18. Горбунов, В. К. О представлении линейно-однородных функций полезности / В. К. Горбунов // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. «Фундаментальные проблемы математики и механики». – 1999. – Вып. 1(6). – С. 70 – 75.

19. Хацкевич, Г. А. Измерение индекса потребительских цен на основе переменной эластичности замещения / Г. А. Хацкевич // Экономика и управление. – 2005. – № 1. – С. 32 – 37.

20. Хацкевич, Г. А. Квазиоднородные производственные функции с постоянной эластичностью замещения / Г. А. Хацкевич, А. Ф. Проневич // Экономический рост Республики Беларусь: глобализация, инновационность, устойчивость: материалы X Международной научно-практической конференции, Минск, 18 – 19 мая 2017 г. – Минск: БГЭУ, 2017 – Т.2. – С. 310-312.

21. Господарик, Е. Г. ЕАЭС-2050: глобальные тренды и евразийская экономическая политика/ Е. Г. Господарик, М. М. Ковалев. – Мн.: БГУ, 2015. – 152 с.

Статья поступила в редакцию 27.06.2017