БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям
_________________ О.И.Чуприс
«12» июля 2019г.

Регистрационный № УД-7254/уч.

Функциональный анализ и интегральные уравнения

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальностей:

1-31 03 05 Актуарная математика
1- 31 03 06 Экономическая кибернетика (по направлениям):
1- 31 03 06 - 01 Экономическая кибернетика
(математические методы и компьютерное моделирование в экономике)
1-98 01 01 Компьютерная безопасность (по направлениям):
1- 98 01 01- 01 Компьютерная безопасность
(математические методы и программные системы)

2019 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1- 31 03 05-2013, 1-31 03 06 -2013, 1-98 01 01-2013 и учебных планов № G31-168/уч., № G31-166/уч., № G138/уч. от 30.05.2013

СОСТАВИТЕЛИ:

Е.С. Чеб, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЗЕНЗЕНТЫ:

Ф.Е. Ломовцев, профессор кафедры математической кибернетики Учреждения образования «Белорусский государственный университет», доктор физико-математических наук, профессор;

О.И. Костюкова, профессор кафедры информатики Учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой компьютерных технологий и систем Белорусского государственного университета

(протокол № 13 от 21.05.2019 г.)

Научно-методическим Советом БГУ

(протокол № 5 от 28.06.2019 г.)

Заведующий кафедрой КТС А. М. Недзьведь

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Функциональный анализ и интегральные уравнения» отражает важное направление развития современной математики, поскольку в ней рассматриваются не отдельные объекты типа функций или уравнений, а обширные классы пространств со структурой векторного пространства и операторов в этих пространствах. Этот подход позволяет с единой точки зрения рассмотреть вопросы решения задач, например, вычислительной математики, сформировать у будущих специалистов абстрактное мышление и получить необходимую базу знаний для их дальнейшего применения в различных областях знаний.

В настоящее время общепризнанна объединяющая роль функционального анализа. Его идеи и методы широко используются в теории дифференциальных и интегральных уравнений, математической физики, в математической экономике, в теории численных методов, в теории управления и других теоретических и прикладных дисциплинах.

Функциональный анализ весьма обширен и интенсивно развивается.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» – овладение основными положениями теории и методами применения ее для решения задач естествознания, техники и управления.

Образовательная цель: формирование составной части банка знаний, получаемых будущими специалистами в процессе учебы и необходимых им в дальнейшем для успешной работы.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, необходимого для исследования разрешимости прикладных задач.

Задачи учебной дисциплины:

1. Изучение основных принципов и методов функционального анализа.
2. Формирование умений в области применения основных методов функционального анализа при решении теоретических и прикладных задач естествознания.
3. Получение практических навыков работы с методами функционального анализа.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Функциональный анализ и интегральные уравнения» относится к циклу специальных дисциплин государственного компонента.

Связи с другими учебными дисциплинами. Курс «Функциональный анализ и интегральные уравнения» тесно связан с курсами алгебры и геометрии, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, математической экономики, методов оптимального управления и численных методов.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» должно обеспечить формирование следующих академических, социально-личностных и профессиональных компетенций:

1-98 01 01 Компьютерная безопасность (по направлениям); 1-31 03 06 Экономическая кибернетика (по направлениям); 1-31 03 05 Актуальная математика

академические компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и прикладных задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным вырабатывать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем;

социально-личностные компетенции:

СЛК-1. Обладание качествами гражданственности.

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

1-98 01 01 Компьютерная безопасность (по направлениям)

профессиональные компетенции:

ПК-1. Работать с научно-технической, нормативно-справочной и специальной литературой с целью получения последних сведений о новых методах защиты информации, о стойкости существующих систем защиты информации.

1-31 03 06 Экономическая кибернетика (по направлениям)

профессиональные компетенции:

ПК-1. Работать с научно-технической, нормативно-справочной и специальной литературой.

ПК-4. Профессионально ставить задачи, вырабатывать идеи и принимать решения.

ПК-5. Владеть современными методами математического и компьютерного моделирования систем и процессов, участвовать в исследованиях разработке новых методов и технологий.

1-31 03 05 Актуальная математика

профессиональные компетенции:

ПК-4. Владеть методами автоматизации научных исследований и применять их в своей работе.

ПК-13. Работать с научной и справочной литературой.

ПК-15. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей.

ПК-24. Разрабатывать новые информационные технологии на основе математического моделирования и оптимизации.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

- основные понятия суммируемости функций по Лебегу;
- основные понятия и методы теории банаховых и гильбертовых пространств;
- основные понятия теории линейных ограниченных операторов и функционалов;
- теорию разрешимости операторных уравнений 1-го и 2-го рода;

уметь:

- исследовать множества в банаховых пространствах и последовательности на сходимость;
- исследовать отображения в банаховых пространствах;
- аппроксимировать функции в гильбертовом пространстве рядами Фурье;
- вычислять норму линейного ограниченного оператора и функционала;
- вычислять сопряженный оператор в гильбертовом пространстве;
- решать интегральные уравнения Фредгольма и Вольтера аналитическими методами и методом последовательных приближений;
- использовать основные результаты функционального анализа в практической деятельности;

владеть:

- основными методами исследования множеств в банаховых и гильбертовых пространствах;
- основами аппроксимации функций в гильбертовых пространствах;
- методами доказательств и аналитического исследования на разрешимость операторных уравнений первого и второго рода;
- основными методами исследования на разрешимость интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера;
- навыками самообразования и способами использования аппарата функционального анализа для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 4 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» отведено:

– для очной формы получения высшего образования всего 158 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Введение. Предмет и основные методы дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения». Исторические сведения о возникновении и развитии этого раздела математики, его место среди других математических наук.

Раздел 1. Нормированные векторные пространства

Тема 1.1. Метрические пространства, нормированные векторные пространства, открытые, замкнутые, выпуклые и ограниченные множества в них. Предельные точки и точки прикосновения множества. Замыкание множества.

Тема 1.2. Сходящиеся последовательности и их свойства. Сходимость в пространствах непрерывных функций и пространстве бесконечных числовых последовательностей.

Тема 1.3. Аппроксимация, построение элемента наилучшей аппроксимации в нормированных конечномерных пространствах.

Тема 1.4. Банаховы пространства и ряды в них. Пополнение нормированных векторных пространств. Пространство суммируемых по Лебегу функций и его полнота.

Тема 1.5. Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре, к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода, к дифференциальным уравнениям.

Раздел 2. Гильбертовы пространства и аппроксимация

Тема 2.1. Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Пространство квадратично суммируемых по Лебегу функций как гильбертово пространство.

Тема 2.2. Элемент наилучшей аппроксимации в гильбертовом пространстве и его связь с проекцией. Ортогональное разложение гильбертова пространства.

Тема 2.3. Ортогональные системы и ряды Фурье. Полные ортонормированные системы. Аппроксимация рядами Фурье и ее применение. Изоморфизм гильбертовых пространств.

Раздел 3. Линейные ограниченные операторы

Тема 3.1. Линейный ограниченный оператор и его норма. Пространство линейных ограниченных операторов и сходимость в нем. Принцип равномерной ограниченности.

Тема 3.2. Обратные операторы, левый и правый обратные операторы и разрешимость операторного уравнения. Непрерывная обратимость оператора и корректная разрешимость.

Тема 3.3. Линейные операторные уравнения первого и второго рода и их решение. Метод резольвент для решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера.

Раздел 4. Сопряженное пространство и сопряженные операторы

Тема 4.1. Линейные ограниченные функционалы и их норма. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
Тема 4.2. Сопряженное пространство. Продолжение линейного ограниченного функционала в сепарабельном пространстве.
Тема 4.3. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах и их применение.
Тема 4.4. Собственные векторы и собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

Раздел 5. Компактные множества и компактные операторы

Тема 5.1. Компактные и предкомпактные множества в банаховых пространства. Критерий предкомпактности Хаусдорфа. Теорема Арцела-Асколи предкомпактности в пространстве непрерывных функций. Критерий конечномерности банахова пространства.
Тема 5.2. Непрерывные отображения на компактах.
Тема 5.3. Компактные операторы и их структура. Компактные самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах и их собственные векторы.
Тема 5.4. Разрешимость интегральных уравнений Вольтера и Фредгольма с ядром Гильберта-Шмидта.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество Часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Нормативные векторные пространства**	**6**	**8**				**4**	
1.1	Метрические пространства, нормированные векторные пространства, открытые и замкнутые множества в них. Предельные точки и точки прикосновения множества. Замыкание множества.	2	2					опрос, отчет
1.2	Сходящиеся последовательности и их свойства. Сходимость в пространствах непрерывных функций и пространстве бесконечных числовых последовательностей.	2	2					опрос, отчет
1.3	Аппроксимация, построение элемента наилучшей аппроксимации в нормированных конечномерных пространствах.	1	1					опрос, отчет
1.4	Банаховы пространства и ряды в них. Пополнение нормированных векторных пространств. Пространство суммируемых по Лебегу функций и его полнота.	1	1					опрос, отчет
1.5	Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре, к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода, к дифференциальным уравнениям.		2				4	коллоквиум
2	**Гильбертовы пространства и аппроксимация**	**6**	**6**					
2.1	Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Пространство квадратично суммируемых по Лебегу функций как гильбертово пространство.	2	2					опрос, отчет
2.2	Элемент наилучшей аппроксимации в гильбертовом пространстве и его связь с про-	2	2					опрос, отчет

	екцией. Ортогональное разложение гильбертова пространства.							
2.3	Ортогональные системы и ряды Фурье. Полные ортонормированные системы. Аппроксимация рядами Фурье и ее применение. Изоморфизм гильбертовых пространств.	2	2					коллоквиум
3	**Линейные ограниченные операторы**	**6**	**6**					
3.1	Линейный ограниченный оператор и его норма. Пространство линейных ограниченных операторов и сходимость в нем. Принцип равномерной ограниченности.	2	2					опрос, отчет
3.2	Обратные операторы, левый и правый обратные операторы и разрешимость операторного уравнения. Непрерывная обратимость оператора и корректная разрешимость.	2	2					опрос, отчет
3.3	Линейные операторные уравнения первого и второго рода и их решение. Метод резольвент для решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера.	2	2					опрос, отчет
4	**Сопряженное пространство и сопряженные операторы**	**7**	**6**					
4.1	Линейные ограниченные функционалы и их норма. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.	2	2					опрос, отчет
4.2	Сопряженное пространство. Продолжение линейного ограниченного функционала в сепарабельном пространстве.	2	2					опрос, отчет
4.3	Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах и их применение. Операторы ортогонального проектирования.	2	2					опрос, отчет
4.4	Собственные векторы и собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.	1						опрос
5	**Компактные множества и компактные операторы**	**6**	**4**					
5.1	Компактные и предкомпактные множества в банаховых пространства. Критерий предкомпактности Хаусдорфа. Теорема Арцела-Асколи предкомпактности в пространстве непрерывных функций. Критерий конечномерности пространства	4	2					опрос
5.2	Непрерывные отображения на компактах.	1						опрос
5.3	Компактные операторы и их структура. Компактные самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах и их собственные векторы.	2	2					опрос
5.4	Разрешимость интегральных уравнений Вольтера и Фредгольма с ядром Гильберта-Шмидта.	2						контрольная работа

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-изд./ А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Мн.: БГУ, 2006. – 434 с.
2. Канторович, Л.В. Функциональный анализ. 4-е изд., испр/ Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – СПб.:BHV, 2017. – 816 с.
3. Лебедев, В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. 4-е изд., испр/ В.И. Лебедев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. –296 с.
4. Треногин, В.А. Функциональный анализ. – 4-е изд., исп./ В.А. Треногин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Хелемский, А.Я. Лекции по функциональному анализу/ А.Я. Хелемский. – М.: МЦНМО, 2009. – 304с.
2. Богачев, В.И. Действительный и функциональный анализ: Университетский курс/ В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. – М.: РХД, 2009. – 724с.
3. Петровский, И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений/ И.Г. Петровский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 131с.
4. Дайняк, В.В.Теория нормированных векторных пространств: метод. указания и задания/ В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2005. – 82 с.
5. Дайняк, В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.1. / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2013. – 52 с.
6. Дайняк, В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.2. / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2015. – 56 с.
7. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: учеб. пособие / А.Б. Антоневич, М.Х. Мазель, Я.В. Радыно. – Минск : БГУ, 2011. – 319 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Текущий контроль осуществляется путем оценки знаний и активности студентов на практических занятиях, рубежных контрольных мероприятий в форме выполнений индивидуальных заданий, контрольных работ и коллоквиумов.

Выполнение заданий является обязательным для всех студентов.

Основным средством диагностики усвоения знаний и овладения необходимыми компетенциями по учебной дисциплине «Функциональный анализ и интегральные уравнения» является проверка индивидуальных заданий, выполняемых в рамках часов, отводимых на текущий контроль знаний, контрольные работы, коллоквиумы.

Для диагностики могут использоваться собеседование по теме занятия, оценка выполнения индивидуального лабораторного задания, оценка результатов коллоквиума.

Оценка за практическое занятие включает:

- ответ (полнота ответа) – 30 %
- выполнение индивидуального лабораторного задания – 70 %

Коллоквиумы используются для обобщения и систематизации учебного материала. В коллоквиум включаются теоретический вопрос и решение практической задачи. При оценивании коллоквиума внимание обращается на:

- содержание и последовательность изложения теоретического вопроса – 30%;
- соответствие и полноту раскрытия вопроса – 30 % ;
- грамотный научный подход к решению практической задачи – 40%.

Формой текущего контроля по дисциплине «Уравнения математической физики» учебным планом предусмотрен экзамен.

Используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

- ответы на практических занятиях– 50%;
- результаты коллоквиума – 50 %.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Оценка по текущей успеваемости составляет 30%, экзаменационная оценка – 70 %.

Пропуск 25 % и более занятий по курсу (в том числе и по уважительной причине) ведет к тому, что положительная оценка по курсу не может быть выставлена.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.5. Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре, к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода, к дифференциальным уравнениям. (4 ч.) (Форма контроля – Отчет).

Примерная тематика практических занятий

Семинар № 1. Некоторые методы решения линейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера с вырожденным ядром.

Семинар № 2. Метрические и нормированные пространства. Способы задания метрики и нормы. Эквивалентные нормы.

Семинар № 3. Предел последовательности в нормированном пространстве.

Семинар № 4. Открытые, замкнутые, ограниченные, выпуклые множества в нормированном пространстве.

Семинар № 5. Банаховы пространства и отображения в них.

Семинар № 6. Сжимающие отображения и метод последовательных приближений.

Семинар № 7. Гильбертовы пространства. Вычисление проекции. и аппроксимация рядами Фурье.

Семинар № 8. Аппроксимация рядами Фурье.

Семинар № 9. Линейные ограниченные операторы и их норма.

Семинар № 10. Левый и правый обратные операторы. Непрерывная обратимость.

Семинар № 11. Метод резольвент решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода.

Семинар № 12. Норма линейного ограниченного функционала. Продолжение функционала.

Семинар № 13. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве и его применение.

Семинар № 14. Компактные операторы.

Семинар № 15. Собственные векторы и собственные значения компактного самосопряженного оператора.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется ***практико-ориентированный подход,*** который предполагает***:***

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Функциональный анализ и интегральные уравнения» используются современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале: комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, задания, тесты, вопросы для самоконтроля, тематика рефератов и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерная тематика заданий для практических занятий

Материалы к практическим занятиям с индивидуальными заданиями для каждого студента представлены в следующих материалах:

- Дайняк, В.В. Теория нормированных векторных пространств: метод. указания и задания / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2005. – 82 с.
- Дайняк В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.1. / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2013. – 52 с.
- Дайняк В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.2. / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2015. – 56 с.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Метрические пространства. Способы задания расстояния. Прикладные задачи и способы задания метрики.
2. Векторные пространства. Примеры. Базис и размерность.
3. Нормированные векторные пространства. Примеры. Свойства нормы. Эквивалентные нормы. Теорема об эквивалентных нормах в конечномерных пространствах.
4. Неравенства Гельдера, Юнга, Минковского. Пространство $CL_p[a,b]$, ℓ_p. $p\geq 1$.
5. Открытые, замкнутые, ограниченные и выпуклые множества в нормированных векторных пространствах и их свойства. Примеры.
6. Внутренние, внешние, граничные и предельные точки. Примеры. Теорема о замкнутом множестве. Всюду плотные и нигде не плотные множества.
7. Предел последовательности в нормированном пространстве. Свойства предела. Теорема о точке прикосновения.
8. Аппроксимация в нормированных пространствах. Теоремы о существовании и единственности элемента наилучшей аппроксимации.
9. Банаховы пространства. Примеры. Принцип вложенных шаров.
10. Ряды в банаховых пространствах. Критерий полноты пространства.
11. Пополнение нормированных векторных пространств.
12. Пространство квадратично суммируемых по Лебегу функций $L_2[a,b]$.
13. Отображения в нормированных пространствах. Теорема о непрерывном отображении, непрерывность композиции отображений.
14. Сжимающие отображения. Теоремы о неподвижной точке сжимающего отображения. Локальный принцип сжимающих отображений.
15. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре.
16. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям второго рода.
17. Предгильбертовы пространства. Свойства скалярного произведения. Примеры.

18. Гильбертовы пространства. Примеры. Теорема об элементе наилучшей аппроксимации.
19. Проекция в гильбертовом пространстве. Теорема о проекции.
20. Ортогональное дополнение. Ортогональное разложение гильбертова пространства в прямую сумму. Теорема о всюду плотном множестве.
21. Ортогональные системы и ряды Фурье в гильбертовых пространствах. Теорема о разложении в ряд Фурье. Экстремальное свойство отрезка ряда Фурье. Аппроксимация рядами Фурье.
22. Полные ортонормированные системы в гильбертовом пространстве и их существование. Примеры полных ортонормированных систем в конкретных пространствах. Изоморфизм гильбертовых пространств.
23. Линейные ограниченные операторы. Ограниченность и непрерывность. Примеры линейных ограниченных операторов. Ограниченность интегрального оператора в пространствах $C[a.b]$, $L_p[a.b]$, $p\geq 1$.
24. Пространство линейных ограниченных операторов и его полнота. Равномерная сходимость. Примеры.
25. Сильная сходимость в пространстве $B(X,Y)$. Принцип равномерной ограниченности.
26. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее применение.
27. Обратные операторы. Непрерывная обратимость оператора и ее критерий. Левый и правый обратные операторы и разрешимость уравнения $Ax=y$. Теорема Банаха об обратном операторе.
28. Непрерывная обратимость оператора I-A. Применение теории обратных операторов к интегральным уравнениям второго рода. Метод резольвент.
29. Сопряженное пространство. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
30. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного ограниченного функционала. Следствия из теоремы Хана-Банаха.
31. Сопряженный оператор и его норма. Свойства операции сопряжения.
32. Применение сопряженного оператора. Теорема о замыкании множества значений линейного ограниченного оператора.
33. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их свойства.
34. Норма самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
35. Собственные векторы и собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
36. Операторы ортогонального проектирования и их свойства.
37. Компактные множества в банаховых пространствах. Критерий компактности Хаусдорфа.
38. Предкомпактные множества в банаховых пространствах. Теорема Арцела-Асколи.
39. Лемма о почти перпендикуляре. Критерий конечномерности нормированного пространства.
40. Пространство компактных операторов. Примеры.
41. Разрешимость уравнений второго рода с компактным оператором.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЛОКВИУМОВ

1. Доказать, что в нормированном пространстве E открытый шар $B(0,r)$ – открытое множество.
2. Доказать, что для любых элементов $B(0,r)$ выполнено неравенство $\|x\| \le \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$.
3. Доказать, что алгебраическая сумма и объединение двух ограниченных множеств – ограниченное множество.
4. Пусть в пространстве со скалярным произведением H последовательности $x^{(n)}, y^{(n)} \in B[0,1]$ и $(x^{(n)}, y^{(n)}) \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|x^{(n)} - y^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$.
5. Пусть M и N – такие множества в гильбертовом пространстве H, что $M \subset N$. Доказать, что $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.
6. В гильбертовом пространстве l_2 рассмотрим последовательность элементов $x^{(n)} = \left\{1, \frac{1}{2^n}, ..., \frac{1}{2^{in}}, ...\right\}$. Доказать, что линейная оболочка этой последовательности всюду плотна в пространстве l_2.
7. Пусть $A \subset E$ – замкнутое множество. Доказать, что $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in A$.
8. Доказать, что для того, чтобы элемент x был ортогонален подпространству $L \subset H$ необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство
9. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ множество $M^{\perp}$ является подпространством.
10. Пусть $A, B \subset E$ и $\overline{A} \subset \overline{B}$. Следует ли, что $A \subset B$? Ответ обоснуйте и приведите пример.
11. Доказать, что гильбертово пространство является строго нормированным.
12. Доказать, что ортогональная система без нулевого элемента линейно независима в гильбертовом пространстве.
13. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ в гильбертовом пространстве имеет место включение $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. Привести пример строгого включения.
14. Пусть $M \subset E$ выпуклое множество и $\lambda \in \Re$ – некоторое число. Доказать, что множество $\lambda M = \{x \in E : x = \lambda y, y \in M\}$ – выпукло. Будет ли множество всех выпуклых подмножеств пространства E векторным пространством?
15. Будет ли замыкание выпуклого множества $M \subset E$ в нормированном векторном пространстве E выпуклым множеством? Ответ обоснуйте.

16. Пусть $A,B \subset E$ – замкнутые множества и их пересечение $A \bigcap B$ пусто. Может ли расстояние $\rho(A,B)=0$?
17. Пусть M и N – подпространства гильбертова пространства H и $M \perp N$. Доказать, что – $M+N$ подпространство в H.
18. Пусть $M,N \subset H$ и $H = M+N$. Верно ли, что $N = M^{\perp}$?
19. Пусть $M,N \subset H$ такие, что любой $x \in H$ единственным образом представим в виде $x = y+z,\, y \in M,\, z \in N$. Следует ли отсюда, что N и M – подпространства в H? Ответ обосновать.
20. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением выполнено равенство $\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2$.
21. Доказать, что в унитарном пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2$ для любых $\alpha, \beta \in C$.
22. Доказать, что в пространстве нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства.
23. Пусть $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}, (y^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset E$ – фундаментальные последовательности. Доказать, что числовая последовательность $\lambda^{(n)} = \left\|x^{(n)} - y^{(n)}\right\|$ сходится.
24. Доказать, что если $f: E \to W$ непрерывно, то $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ для любого $A \subset E$.
25. Пусть множество $A \subset E$ фиксировано. Доказать, что функция $f(x) = \rho(x,A)$ непрерывно отображает E в $\Re$.
26. Образует ли в пространстве $C[a,b]$ подпространство множество многочленов степени не выше чем n?
27. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Доказать, что множество $\{t \in \Re : f(t) < 1\}$ открыто на числовой прямой.
28. Пусть $A,B \subset E$ – произвольные множества в банаховом пространстве E. Доказать, что $\rho(A,B) = \rho(\overline{A},\overline{B})$.
29. Доказать, что множество $A \subset E$ является ограниченным тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x^{(n)} \in A$ и любой последовательности $\lambda^{(n)} \in C, \lambda^{(n)} \to 0$, при $n \to \infty$ последовательность $\lambda^{(n)} x^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$.
30. Пусть $M,N \subset H$ – подпространства гильбертова пространства H и $M \perp N$. Доказать, что $M+N$ – подпространство в H.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант 1.

1. Найти предел последовательности x_n в нормированном пространстве X, если он существует

$$x_n(t)=\frac{3^n t^n - t^{2n}}{3^{2n}}, \quad X = C[0,3].$$

2. Доказать, что оператор $A: X \to Y$ является линейным ограниченным и найти его норму

$$X = L_3[0,1], \quad Y = C[-1,1],$$

$$Ax(t)=\int_0^{1/2}(t^2-5|t|+1)s^2 x(s)ds.$$

3. Показать, что к оператору существует сопряженный и найти его в пространстве $L_2[0,1]$

$$Ax(t)=\int_{t^3}^{1} t^5 s^2 x(s)ds + \int_0^{1/2}\sin(t)\, s^4 x(s)ds.$$

4. Выяснить, при каких значениях параметров разрешимо интегральное уравнение

$$x(t)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t^4+5t^3 s)x(s)ds = at^2+bt.$$

5. Является ли множество M равностепенно непрерывным в пространстве $C[0,1]$?

$$M=\left\{x(t)\in C^2[0,1]: |x(1)|\le 1, \left|x''(t)\right|\le 5, t\in[0,1]\right\}.$$

6. С помощью теоремы Рисса вычислить норму функционала в пространстве $L_2[-1,1]$

$$f(x)=\int_0^1 t^3 x(t)dt - \int_{-1/2}^{1/2} t^4 x(t^3)dt.$$

Вариант 2.

1. Найти предел последовательности x_n в нормированном пространстве X, если он существует

$$x_n(t)=\frac{2nt}{1+2n^2t^2}, \quad X = C[0,1].$$

2. Доказать, что оператор $A: X \to Y$ является линейным, ограниченным, найти его норму

$$X = C[-2,2], \quad Y = L_2[0,2],$$

$$Ax(t)=\int_{-1}^{1} t^2 s\, x(s)ds - t\, x(0).$$

3. Показать, что оператор ограничен и найти к нему сопряженный в пространстве $L_2[0,1]$

$$Ax(t)=\int_0^{t^4}\cos(t)s^2x(s)\,ds+\int_{1/2}^{1}\sin(t)e^s x(s)ds.$$

4. Выяснить, при каких значениях параметров разрешимо интегральное уравнение

$$x(t)-\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(s+s^2t^2\right)x(s)ds=at+b.$$

5. Является ли множество M равностепенно непрерывным в пространстве $C[0,1]$?

$$M=\{x(t)=arctg\,(at+b)\,|\,a\le 2, b>5\}.$$

6. С помощью теоремы Рисса вычислить норму функционала в пространстве $L_2[-1,1]$

$$f(x)=\int_{-1}^{0}t^3x(t^3)dt+\int_{-1/8}^{1/8}tx(t^{1/3})dt.$$

Вариант 3.

1. Найти предел последовательности x_n в нормированном пространстве X, если он существует

$$x_n=\left(\frac{1}{1+n},\frac{1}{1+2n},...,\frac{1}{1+in},...\right),\quad X=\ell_3.$$

2. Доказать, что оператор $A\colon X\to Y$ является линейным, ограниченным и найти его норму

$$X=L_3[0,1],\quad Y=L_{5/2}[-1,2],$$

$$Ax(t)=\int_0^{1/2}t^4s^3x(s)\,ds.$$

3. Показать, что оператор ограничен и найти к нему сопряженный в пространстве $L_2[0,1]$

$$Ax(t)=\int_{t^5}^{1}tg(t)s^2x(s)ds+\int_0^{1/2}t\,s^4x(s)ds.$$

4. Выяснить, при каких значениях параметров разрешимо интегральное уравнение

$$x(t)+6\int_0^1(t^2-2st)x(s)ds=at+bt^3.$$

5. Является ли множество M равностепенно непрерывным в пространстве $C[0,1]$?

$$M=\left\{\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha t}\,\middle|\,\alpha\in R,\ 0<\alpha<+\infty\right\}.$$

6. С помощью теоремы Рисса вычислить норму функционала в пространстве $L_2[-1,1]$

$$f(x)=\int_0^1 tx(t)dt-\int_{-1/2}^{1/2} t^6x(t^3)dt.$$

Вариант 4.

1. Найти предел последовательности x_n в нормированном пространстве X, если он существует

$$x_n=\left(\frac{n}{1+n},\frac{n}{1+2n},\dots,\frac{n}{1+in},\dots\right),\quad X=\ell_2.$$

2. Доказать, что оператор $A\colon X\to Y$ является линейным, ограниченным и найти его норму

$$X=C[-1,1],\quad Y=L_3[0,1],$$
$$Ax(t)=\int_{-1}^{1}t^2s\,x(s)\,ds-tx(1).$$

3. Показать, что оператор линеен и ограничен и найти к нему сопряженный в пространстве $L_2[0,1]$

$$Ax(t)=\int_0^1 e^t tg(s)x(s)\,ds-\int_1^{t^2}t^5s^3x(s)\,ds.$$

4. Выяснить, при каких значениях параметров разрешимо интегральное уравнение

$$x(t)+\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(4ts-s^2)x(s)ds=at^3+bt^2.$$

5. Является ли множество M равностепенно непрерывным в пространстве $C[0,1]$?

$$M=\left\{x(t)=\frac{nt}{1+n^3t^3},n\in N,t\in[0,1]\right\}.$$

6. По определению вычислить норму функционала в пространстве $C[-3,5]$

$$f(x)=x(-2)-x(-1)-\int_{-1}^{3}t^3\,x(t)\,dt-2x(2)+3x(4).$$

Вариант 5.

1. Найти предел последовательности x_n в нормированном пространстве X, если он существует

$$x_n(t)=\frac{t^n}{1+t^n},\quad X=C\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right].$$

2. Доказать, что оператор $A\colon X\to Y$ является линейным, ограниченным и найти его норму

$$X=L_4[0,1],\quad Y=L_{5/3}[-1,2],$$

$$Ax(t)=\int_0^{1/3}t^2s^3x(s)ds.$$

3. Показать, что оператор ограничен и найти к нему сопряженный в пространстве $L_2[0,1]$

$$Ax(t)=\int_{t^2}^{1}\sin te^s x(s)\,ds-\int_0^{1/2}t^7s^2x(s)\,ds..$$

4. Выяснить, при каких значениях параметров разрешимо интегральное уравнение

$$x(t)-\frac{5}{4}\int_{-1}^{1}(2ts^3+5t^2s^2)x(s)ds=at^4+bt+c.$$

5. Является ли множество M равностепенно непрерывным в пространстве $C[0,1]$?

$$M=\left\{x(t)=\frac{nt}{1+n^2t^2},n\in N,t\in[0,1]\right\}.$$

6. По определению вычислить норму функционала в пространстве $C[-3,5]$

$$f(x)=x(-3)+x(-1)-\int_{-1}^{4}t^3x(t)\,dt-2x(2)+3x(4).$$

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Уравнения математической физики	КТС		протокол № 13 от 21мая 2019 г
Методы численного анализа	Выч.М		протокол № 13 от 21мая 2019 г
Методы оптимизации.	МОУ		протокол № 13 от 21мая 2019 г

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры _______________________________ (протокол № ____ от ________ 201_ г.)

Заведующий кафедрой

_______________________ ________________ ___________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

_______________________ ________________ ___________________