



Учреждение образования
«Международный государственный
экологический институт
имени А. Д. Сахарова»
Белорусского государственного университета

Н. М. Новикова

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕДИЦИНЕ



Учреждение образования
«Международный государственный экологический
институт имени А. Д. Сахарова»
Белорусского государственного университета

Н. М. Новикова

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕДИЦИНЕ

Практикум

Минск
«ИВЦ Минфина»
2017

УДК 311:57:61 (075.8)

ББК 60.6:28:5я73

Н 73

Рецензенты:

кандидат медицинских наук, доцент, заместитель директора по научной работе
ГУ «РНПЦ радиационной медицины и экологии человека» *Э. А. Надыров*

кандидат сельскохозяйственных наук, доцент кафедры экологической медицины и
радиобиологии МГЭИ им. А. Д. Сахарова БГУ *В. О. Лемешевский*

Новикова, Н. М.

Н 73 Статистические методы в медицине: практикум / Н. М. Новикова. –
Минск: ИВЦ Минфина, 2017. – 95 с.

ISBN 978-985-7168-33-0.

В пособии рассмотрены основные методы, используемые в современной медико-биологической статистике. Дается представление, как научиться самостоятельно проводить первоначальную обработку данных, делать выводы на основе результатов статистического анализа. Издание содержит методические указания по изучению тем дисциплины с практическими заданиями, а также контрольные работы с методикой их выполнения.

Предназначается студентам специальностей 1-33 01 05 Медицинская экология и 1-80 02 01 Медико-биологическое дело, а также может быть использовано обучающимися других специальностей при изучении методов обработки проводимых экспериментов.

УДК 311:57:61 (075.8)

ББК 60.6:28:5я73

ISBN 978-985-7168-33-0

© Новикова Н. М., 2017

© МГЭИ им. А. Д. Сахарова БГУ, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ОПИСАНИЕ ДАННЫХ	5
1.1. ВАРИАЦИОННЫЙ РЯД. ПОСТРОЕНИЕ ГИСТОГРАММ	5
1.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ПРОВЕРКА НОРМАЛЬНОСТИ.....	9
2. КРИТЕРИЙ СТЬЮДЕНТА	15
3. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ.....	20
4. АНАЛИЗ ПОВТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ	26
4.1. КРИТЕРИЙ СТЬЮДЕНТА ДЛЯ СРАВНЕНИЯ СРЕДНИХ В ДВУХ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ВЫБОРКАХ (КРИТЕРИЙ СТЬЮДЕНТА ДЛЯ ПОВТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ).....	26
4.2. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ПОВТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ	27
5. АНАЛИЗ КАЧЕСТВЕННЫХ НОМИНАТИВНЫХ ПРИЗНАКОВ ...31	
5.1. ОЦЕНКА И СРАВНЕНИЕ ДОЛЕЙ	31
5.2. КРИТЕРИЙ χ^2	33
5.3. КРИТЕРИЙ МАК-НИМАРА	37
6. ЛИНЕЙНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ	40
7. КОРРЕЛЯЦИЯ	45
7.1. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ ПИРСОНА.....	45
7.2. КОЭФФИЦИЕНТ РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СПИРМЕНА	46
7.3. БИСЕРИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИИ	51
7.4. КОЭФФИЦИЕНТ КОНТИНГЕНЦИИ	55
8. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ	58
9. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ.....	63
9.1. КРИТЕРИЙ МАННА-УИТНИ.....	63
9.2. КРИТЕРИЙ УИЛКОКСОНА.....	65
9.3. КРИТЕРИЙ КРУСКАЛА-УОЛЛИСА	67
9.4. КРИТЕРИЙ ФРИДМАНА	68
ТЕМАТИКА КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ	76
ЛИТЕРАТУРА	80

ВВЕДЕНИЕ

Четкое и точное применение статистических методов, научный подход к планированию биологических и медицинских исследований становятся все более актуальными в последнее время. Корректное использование статистики позволяет биологам и медикам доказывать правильность и обоснованность используемых методов; строго, предельно выверено планировать эксперимент; обобщать его данные; находить зависимости между данными; выявлять наличие существенных различий между группами испытуемых; строить статистические предсказания и др.

Предлагаемое пособие является руководством для студентов по применению статистики в биологических и медицинских исследованиях. Оно призвано решить следующие задачи:

- дать представление об основных статистических процедурах и способах их применения;
- привить навыки проведения первоначальной статистической обработки данных экспериментальных исследований и проверки статистических гипотез;
- научить студентов формулировать статистически значимые заключения по результатам проведенных биологических и медицинских исследований.

Каждый раздел сопровождается примерами применения методов статистического анализа в медико-биологических исследованиях и заданиями для самостоятельного решения. В приложении даны все необходимые статистические таблицы. Изучение учебных изданий, указанных в дополнительной литературе, поможет студентам глубже освоить те или иные методы статистики.

Пособие предназначено для студентов 2-го курса специальностей 1-80 02 01 «Медико-биологическое дело», 1-33 01 05 «Медицинская экология» факультета экологической медицины Международного государственного экологического института имени А. Д. Сахарова БГУ. Оно может быть рекомендовано для использования студентами других специальностей при изучении методов статистической обработки экспериментальных данных.

1. ОПИСАНИЕ ДАННЫХ

1.1. Вариационный ряд. Построение гистограмм

Распределение (в простейшем смысле) – это список всех результатов измерения признака. Если результаты эксперимента расположить упорядоченно (чаще – по возрастанию), то мы получим *вариационный ряд*.

Вся подлежащая изучению совокупность называется *генеральной*. Можно изучать совокупность путем наблюдения некоторой ее части – *выборки*. Полученные результаты обобщаются на всю генеральную совокупность. Отсюда основное требование к выборке – она должна хорошо представлять генеральную совокупность, то есть быть *представительной*. На практике представительность выборки обеспечивается методом отбора. Отбор должен быть случайным.

Распределение может содержать одинаковые значения. Поэтому удобнее записывать результаты в виде таблицы (табл.1), где представлены все разные значения признака (также обычно упорядоченные) и частоты, с которыми эти значения встречаются в распределении. Значения

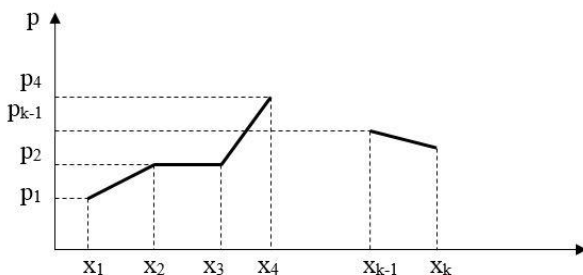
признака носят название *варианты*. Сумма всех частот $\sum_{i=1}^k p_i = n$, где n – объем выборки, k – количество вариантов ($k \leq n$).

Таблица 1

Таблица частот

Значения	x_1	x_2	...	x_k
Частоты	p_1	p_2	...	p_k

В большинстве случаев нас будут интересовать не отдельные измерения, а форма и строение распределения этих измерений. Если нанести на плоскость точки с координатами (x_i, p_i) и соединить их, то мы получим *полигон частот*, который помогает представить форму распределения (рис.1):



При большом объеме выборки представление результатов в виде таблицы частот становится громоздким, а если в распределении мало повторяющихся значений, то полигон частот является неинформативным. Можно разбить всю шкалу измерений на интервалы и подсчитать количество значений, попадающих в каждый интервал. Результаты сводятся в таблицу – получаем *интервальный вариационный ряд*. Обычно выбираются интервалы одинаковой длины.

Гистограмма – график, показывающий частоту попадания значений переменной в отдельные интервалы. Для этого на каждом интервале строится прямоугольник, равный частоте. Гистограмма позволяет качественно оценить различные характеристики распределения. По виду гистограммы делают предположения о характере соответствия эмпирического распределения определенному теоретическому распределению (чаще всего нормальному).

Правила построения гистограмм

Существуют специальные формулы, по которым осуществляют выбор числа интервалов группировки (m):

$$m = 1 + 3,32 \cdot \lg n \quad \text{или}$$

$$m \leq 5 \cdot \lg n.$$

Можно воспользоваться эмпирически выработанными рекомендациями (табл. 2).

Таблица 2

Рекомендуемое число интервалов для построения гистограмм

Объем выборки	Число интервалов
25–40	5–6
40–60	6–8
60–100	7–10
100–200	8–12
более 200	10–15

Когда выбрано число интервалов, то определяют размах вариационного ряда $R = x_{\max} - x_{\min}$ и рассчитывают длину интервала $\Delta x = R/m$. Далее определяют граничные точки интервалов. Обычно за левую границу первого интервала (точка x_1) принимают минимальное значение выборки (но это не обязательно). Следующая граничная точка $x_2 = x_1 + \Delta x$; $x_3 = x_2 + \Delta x$ и т. д. Последняя точка x_{m+1} – правая граница m -го интервала. Если первая точка совпадала с минимальным значением, то последняя будет равна максимальному.

Следует отметить, что выбор количества интервалов и граничных значений не подчиняется строгим правилам. Многое определяется целями пользователя, а также легкостью расчетов. В частности, длину интервала следует выбирать таким образом, чтобы результаты было удобно представлять на графике.

Далее подсчитывается количество значений в выборке, принадлежащих каждому интервалу, и оформляется в виде таблицы 3. Обратите внимание, что значения, совпадающие с границами, будут входить только в один из интервалов – в данном случае при подсчете частот включается нижняя граница интервала.

Таблица 3

Интервальная таблица частот

Интервалы	$x_1 \leq x < x_2$	$x_2 \leq x < x_3$	...	$x_{m-1} \leq x \leq x_m$
Частоты	p_1	p_2	...	p_m

Затем по горизонтальной оси на графике откладываются границы интервалов. На каждом из интервалов строится прямоугольник высотой p_i . Это и будет гистограмма частот распределения.

Пример. Построить гистограмму для следующего распределения ($n=20$):

0,78; -0,12; -0,61; 0,92; 0,55; 1,63; -1,16; 0,01; -0,45; 0,20; -0,38; 0,62; 0,46; -0,22; 1,11; -0,77; 0,37; 0,72; -0,24; 0,42.

Построим вариационный ряд:

-1,16; -0,77; -0,61; -0,45; -0,38; -0,24; -0,22; -0,12; 0,01; 0,20; 0,37; 0,42; 0,46; 0,55; 0,62; 0,72; 0,78; 0,92; 1,11; 1,63.

Отметим, что в ряду нет повторяющихся значений. Поэтому построение полигона частот не даст информации о распределении, поскольку он будет представлять собой прямую линию ($p_i=1$).

Приблизительное число интервалов для выборки такого размера – 5–6. Минимальное значение равно -1,16; максимальное – 1,63. Размах вариации составляет 2,79. Удобнее будет выбрать размах вариации равный 3 – число, которое хорошо делится и на 5, и на 6. При этом левую границу можно выбрать -1,2, а правую 1,8. Возьмем пять интервалов.

$$\Delta x = \frac{1,8 - (-1,2)}{5} = 0,6.$$

Определим граничные точки интервалов и подсчитаем частоты:

Интервалы	$-1,2 \leq x < -0,6$	$-0,6 \leq x < 0$	$0 \leq x < 0,6$	$0,6 \leq x < 1,2$	$1,2 \leq x \leq 1,8$
Частоты	3	5	6	5	1

Строим гистограмму (рис. 2):

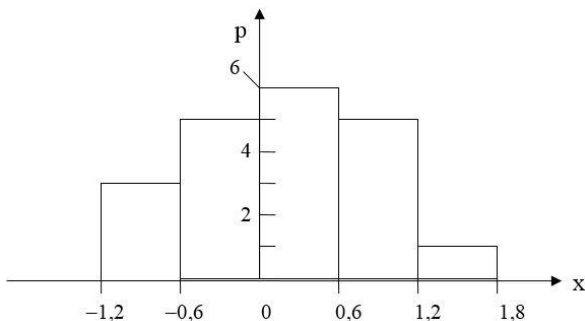


Рис. 2. Гистограмма для данных примера

Задания для самостоятельного решения

Построить вариационный ряд (в виде таблицы частот) и гистограмму для следующих выборок:

1.1 Рост (в см) группы из 40 детей:

130 131 120 124 123 135 128 127
 130 136 125 132 125 126 128 127
 128 127 135 136 130 136 135 136
 132 124 134 124 120 127 125 119
 122 134 129 132 118 121 131 128

1.2 Количество птенцов в гнездах лесной ласточки *Iridoprocne bicolor* (n=100):

4 5 4 5 5 4 5 4 3 5
 5 1 6 4 4 4 5 5 3 5
 6 4 6 2 3 4 5 5 5 5
 5 5 5 6 4 6 2 5 5 3
 4 4 6 4 5 5 5 5 5 5
 5 5 4 6 7 6 3 5 5 6
 3 4 4 2 4 4 6 2 6 5
 2 5 5 5 4 5 4 6 5 4
 3 5 6 6 4 4 4 6 5 4
 4 7 5 5 5 5 4 3 7 6

1.3 Живой вес 60 телят холмогорских помесей при рождении (в кг):

27 32 32 31 32 28 37 35 26 28
 28 39 34 30 37 26 27 40 35 37
 29 43 26 35 45 26 35 32 32 35
 30 28 32 36 32 36 37 33 28 31
 31 33 33 28 23 26 34 32 36 27
 32 39 30 30 36 38 24 32 30 31

1.2. Вычисление параметров распределения.

Проверка нормальности

Наиболее важными параметрами распределения являются характеристики центральной тенденции и разброса. Характеристиками центральной тенденции являются *мода*, *медиана* и *среднее значение*. Эти параметры используются для ответа на вопрос: «Каково типичное значение признака для данного распределения?» Будем рассматривать параметры, описывающие выборочную совокупность.

Оценка среднего, вычисленная по выборке, называется *выборочным средним*. Она представляет сумму значений признака для всех элементов выборки, деленную на число элементов выборки:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Если результаты измерения признака представлены в виде таблицы частот, то формула выглядит следующим образом:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i p_i}{n}.$$

Медиана (Me) – это значение признака, которое делит распределение пополам: половина значений будет больше медианы, половина – меньше. Для нахождения медианы необходимо упорядочить выборку по возрастанию и найти элемент, стоящий посередине вариационного ряда. При этом можно руководствоваться следующими правилами:

- если объем выборки n – нечетное число, то медианой будет элемент с номером $i = (n+1)/2$ в упорядоченном по возрастанию ряду. Например, в выборке объемом 7 медианой будет 4 элемент вариационного ряда.

- если n – четное число, то медианой будет среднее значение двух элементов вариационного ряда с номерами $i = n/2$ и $j = n/2 + 1$. Например, при $n=10$ медианой будет среднее арифметическое 5 и 6 элементов вариационного ряда.

Мода (Mo) – это наиболее часто встречающееся значение признака, то есть значение признака, наиболее характерное для данной совокупности. Мода определяется по следующим правилам:

- если все значения в выборке встречаются одинаково часто, принято считать, что эта выборка не имеет моды;

- если наибольшую одинаковую частоту имеют два соседних значения вариационного ряда, то модой считают среднее арифметическое этих значений. Например, в выборке 2 3 3 6 6 7 8 модой будет значение $(3+6)/2=4,5$;

– если наибольшую одинаковую частоту имеют два несмежных значения, то выделяют две моды и распределение будет бимодальным. Например, в выборке 2 3 3 4 5 6 6 7 8 модами являются значения 3 и 6. Может встречаться и более двух мод.

К характеристикам разброса относят дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации. Выборочная дисперсия вычисляется по формуле:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}.$$

При вычислении дисперсии по таблице частот используют формулу:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k p_i (x_i - \bar{X})^2}{n-1}.$$

Можно воспользоваться и следующими формулами:

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n-1} - \frac{(\sum x_i)^2}{n(n-1)} \quad \text{или} \quad s^2 = \frac{\sum p_i x_i^2}{n-1} - \frac{(\sum p_i x_i)^2}{n(n-1)}$$

Оценка стандартного отклонения называется выборочным стандартным отклонением:

$$s = \sqrt{s^2}.$$

Коэффициент вариации (V) представляет собой выраженное в процентах отношение стандартного отклонения к среднему значению:

$$V = \frac{s}{\bar{X}} \cdot 100\%.$$

Совокупность считается однородной, если коэффициент вариации не превышает 33 %.

Стандартную ошибку среднего вычисляют по формуле:

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Стандартная ошибка среднего показывает точность выборочной оценки среднего.

Важной характеристикой при проверке нормальности распределения являются *процентили*. Чаще всего применяют 25-ый и 75-ый процентили. Если медиана делит распределение пополам, то 25-ый и 75-ый процентили отсекают от него по четверти, то есть одна четверть значений распределения будет не больше 25-го перцентиля, а одна четверть –

больше 75-го процентиля. Саму медиану можно считать 50-ым процентилем. Правила вычисления 25 и 75 перцентилей те же, что и медианы, только применительно к левой и правой половинам вариационного ряда.

Проверка соответствия распределения нормальному закону

Если выборка извлечена из совокупности с нормальным распределением, то должны выполняться следующие условия:

1) выборочные среднее, медиана и мода должны быть близки по значению и находиться примерно посередине между 25 и 75 перцентилями;

2) интервал $\text{среднее} \pm \text{два стандартных отклонения}$ должен включать примерно 95 % значений выборки и не должен содержать много значений, которых не может быть в данном распределении (например, отрицательных, если речь идет о данных, которые могут принимать только положительные значения).

Проверка соответствия распределения нормальному закону может проводиться и с помощью построения гистограммы (при достаточно большом объеме выборки). Если построенное изображение соответствует симметричной колоколообразной форме кривой нормального распределения, то можно с большой долей вероятности утверждать, что выборка извлечена из совокупности с нормальным законом распределения.

Если выборка извлечена из совокупности с нормальным законом распределения, то она хорошо описывается значениями среднего и стандартного отклонения. Если распределение отличается от нормального, то для его описания лучше приводить значения медианы, 25 и 75 перцентилей.

Пример. Найти параметры следующего выборочного распределения (клинические оценки тяжести серповидноклеточной анемии):

0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 3 4 4 5 5 5 5 6 7 9 10 11.

Можно ли считать, что выборка извлечена из совокупности с нормальным распределением?

Составим таблицу частот, в которой добавлено еще несколько столбцов для расчета параметров распределения (табл. 4).

Таблица 4

Таблица для расчета параметров распределения оценок тяжести серповидноклеточной анемии

Значения x_i	Частоты p_i	Накопленные частоты	$x_i \cdot p_i$	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2$	$p_i(x_i - \bar{X})^2$
0	3	3	0	-3,09	9,55	28,65
1	11	14	11	-2,09	4,37	48,07
2	4	18	8	-1,09	1,19	4,76
3	4	22	12	-0,09	0,01	0,04
4	2	24	8	0,91	0,83	1,66
5	4	28	20	1,91	3,65	14,6
6	1	29	6	2,91	8,47	8,47
7	1	30	7	3,91	15,29	15,29
9	1	31	9	5,91	34,93	34,93
10	1	32	10	6,91	47,75	47,75
11	1	33	11	7,91	62,57	62,57
	$n = \sum p_i = 33$		$\sum = 102$			$\sum = 266,8$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i \cdot p_i}{n} = \frac{102}{33} = 3,09;$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k p_i (x_i - \bar{X})^2}{n - 1} = \frac{266,8}{32} = 8,34;$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{8,34} = 2,89;$$

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2,89}{\sqrt{33}} = 0,5;$$

$$V = \frac{s}{\bar{X}} \cdot 100 \% = \frac{2,89}{3,09} \cdot 100 \% = 93,5 \% \text{ — совокупность не является однородной.}$$

Мода в выборке равна 1. Найдем медианы и процентиля. В выборке 33 элемента, поэтому медианой является значение под номером $(33+1)/2=17$. При нахождении медианы по табл. 4 частот удобно пользоваться столбцом накопленных частот. Этот столбец получается последовательным суммированием значений частот от первой до последней. В соответствии с накопленными частотами под номерами 1–3 в вариационном ряду находятся значения, равные 0; под номерами 4–14 – значения, равные 1; под номерами 15–18 – значения, равные 2. Поэтому 17 элементом данного вариационного ряда и его медианой является 2.

Для нахождения процентилей разделим объем выборки на 4: $33/4=8,25$. 25-ым процентилем можно считать 8 значение вариационного

ряда, 75-ым – 25 значение ($8,25 \cdot 3 = 24,75 \approx 25$; умножаем на 3, так как 75 % – это $3/4$ распределения). Итак, 25-ый процентиль равен 1; 75-ый процентиль равен 5.

Интервал $\bar{X} \pm 2 \cdot s$ составляет $3,09 \pm 5,78$, то есть $-2,69 \div 8,87$. Итак, среднее, медиана и мода не совпадают, причем медиана ближе к 25-му процентиллю. Около четверти значений интервала среднее $\pm$ два стандартных отклонения имеют отрицательный знак, а в исходной выборке по самой природе изучаемого признака не может быть отрицательных значений. Выборка вряд ли извлечена из совокупности с нормальным законом распределения. Это можно подтвердить и построением полигона частот (рис. 3). Пик распределения смещен в левую сторону.

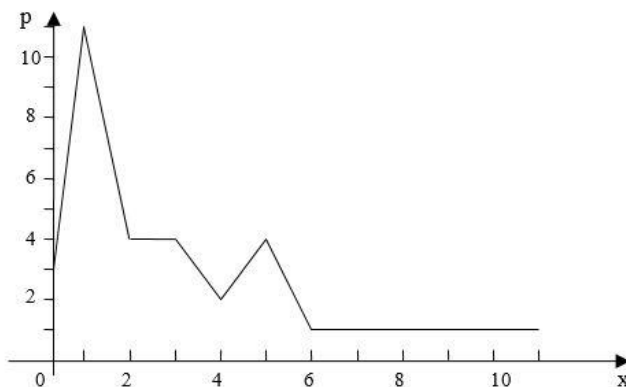


Рис. 3. Полигон частот для данных по клиническим оценкам тяжести серповидноклеточной анемии

Задания для самостоятельного решения

1.4. Найти параметры следующих выборочных распределений. Можно ли считать, что выборки извлечены из совокупностей с нормальным распределением?

а) Продолжительность (в секундах) физической нагрузки до развития приступа стенокардии у больных с ишемической болезнью сердца:

289 203 359 243 232 210 251 246 224 239 220 211;

б) Результаты оценки проницаемости сосудов сетчатки:

1,2; 1,4; 1,6; 1,7; 1,7; 1,8; 2,2; 2,3; 2,4; 6,4; 19; 23,6;

в) Содержание эстрадиола в сыворотке крови (пмоль/л):

115,2; 148; 77,4; 115,6; 68,2; 140,2; 88,2; 177,1; 91,8; 127,8; 154,3; 91,3;

г) значения холестерина индекса атерогенности у больных с гипертонической болезнью:

5,6; 5; 2; 1,2; 2,1; 5,2; 3,2; 1,2; 3,5; 2,8; 3,8.

1.5. Рассчитайте параметры распределения и проверьте нормальность для данных по любой из задач первого занятия (1.1–1.3). Проверьте, насколько ваши выводы о нормальности распределения согласуются с построенной гистограммой.

2. КРИТЕРИЙ СТЬЮДЕНТА

Критерий Стьюдента предназначен для сравнения двух групп по количественному признаку. Условия применения критерия:

- 1) исходная совокупность имеет нормальное распределение;
- 2) дисперсии выборок не сильно отличаются друг от друга;
- 3) выборки извлечены случайным и независимым образом.

Процедура применения критерия:

1. Проверяем соответствие распределения нормальному закону.
2. Для двух выборок вычисляем средние значения $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ и выборочные дисперсии s_1^2 и s_2^2 .

3. Проверяем равенство выборочных дисперсий с помощью критерия Фишера. Для этого находим отношение большей и меньшей по величине дисперсий. Полученное значение F сравниваем с критическим табличным значением в зависимости от числа степеней свободы $v_1=v_{\text{числ}}=n_{\text{числ}}-1$; $v_2=v_{\text{знам}}=n_{\text{знам}}-1$. Если $F < F_{v_1; n_1; n_2}$, принимаем нулевую гипотезу о равенстве дисперсий.

4. Находим объединенную оценку дисперсии s^2 . Для выборок одинакового объема $s^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$. Для выборок произвольного объема n_1 и n_2 объединенная оценка дисперсии будет вычисляться следующим образом:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

5. Вычисляем t по формуле:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}}.$$

4. Сравниваем полученное значение t с критическим значением из таблицы в зависимости от числа степеней свободы $v = n_1 + n_2 - 2$ и уровня значимости α . Если $|t| > t_{\alpha; v}$, то отвергаем нулевую гипотезу и утверждаем, что с уровнем значимости α существуют различия между двумя группами.

Пример. Изучить, как влияют два типа музыки на способность студентов решать задачи, требующие умственной концентрированности. Для решения задачи была отобрана однородная группа из 30 студентов.

Эта группа была случайным образом разделена на две подгруппы по 15 человек. Члены каждой из групп выполняли серию из 40 задач под музыку разных типов. В результате измерялось количество задач, решенных каждым студентом за отведенное время. Результаты исследования представлены в табл. 4.

Таблица 5

Количество задач, решенных студентами

Группа 1 (тип музыки 1)	Группа 2 (тип музыки 2)
26 22 23 26 20	18 23 21 20 20
22 26 25 24 21	28 20 16 20 26
23 23 19 29 22	21 25 17 18 19

Рассчитаем параметры распределений:

$$\overline{X}_1 = 23,4; \quad s_1 = 2,64.$$

$$\overline{X}_2 = 20,8; \quad s_2 = 3,38.$$

Среднее количество решенных задач в первой группе почти на три больше, чем во второй. Означает ли это, что музыка первого типа лучше влияет на способности студентов?

Узнаем, выполняются ли условия применимости критерия Стьюдента. Для этого выполним проверку на нормальность. Для первой группы медиана равна 23, три моды: 22, 23 и 26; 25-ый процентиль равен 22, 75-ый процентиль – 26. Для второй группы медиана равна 20, мода – также 20, 25-ый процентиль равен 18, 75-ый процентиль – 23. Интервалы среднее $\pm$ два стандартных отклонения для первой группы составляет $18,12 \div 28,68$, для второй – $14,04 \div 27,56$, то есть интервалы для обеих групп включают практически все выборочные значения. Таким образом, обе выборки можно считать извлеченными из нормально распределенной совокупности.

Найдем значение критерия Фишера. Разделим большую дисперсию на меньшую:

$$F = \frac{3,38^2}{2,64^2} = 1,64.$$

Число степеней свободы для числителя $v_{\text{числ}} = 15 - 1 = 14$; $v_{\text{знам}} = 15 - 1 = 14$. В табл. 2 прил.; приведены критические значения F. Верхнее число в каждой строке относится к уровню значимости $\alpha = 0,05$, нижнее - $\alpha = 0,01$. Верхняя строка таблицы – число степеней свободы числителя, то есть в нашем случае; первый столбец таблицы – число степеней свободы знаменателя. На пересечении 14 строки и 14 столбца находим, что

$F_{0,05;14;14}=2,48$ (верхнее значение для уровня 0,05, рис. 4). Рассчитанное значение меньше критического, поэтому между выборочными дисперсиями нет статистически значимых различий, и мы можем применить критерий Стьюдента.

		Число степеней свободы для числителя ($\nu_{\text{числ}}$)						
		1	2	3	...	12	13	14
Число степеней свободы для знаменателя ($\nu_{\text{знам}}$)	1	161	199	216	...			
	2							
	...							
	14	4,60	3,74	3,34	...		2,51	2,48
	...	8,86	6,51	5,56	...		3,75	3,70

Рис. 4. Пример использования таблицы критических значений F

Рассчитаем объединенную дисперсию:

$$s^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2} = \frac{2,64^2 + 3,38^2}{2} = 9,2.$$

Вычислим значение критерия:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}} = \frac{23,4 - 20,08}{\sqrt{\frac{9,21}{15} + \frac{9,21}{15}}} = 2,35.$$

Число степеней свободы $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 15 + 15 - 2 = 28$. Найдем критическое значение. Рассмотрим часть таблицы критических значений t (прил.; табл. 1) для 28 степеней свободы (в таблице число степеней свободы обозначено как ν – первый столбец таблицы). На пересечении строки, соответствующей 28 степеням свободы и столбца, соответствующего уровню значимости 0,05 для двустороннего критерия, находится число 2,048. Это и есть критическое значение $t_{0,05;28}$. Поскольку выполняется условие $|2,35| > t_{0,05;28}$, делаем заключение, что группы отличаются статистически значимо с уровнем значимости 0,05.

		Уровень значимости α				
ν	---	0.05	0.02	0.01	---	0.001
	---	---	---	---	---	---
28	---	2.048	2.467	2.763	---	3.674

Рис.5. Пример использования таблицы критических значений t

Применительно к условию задачи это означает, что студенты, слушавшие музыку первого типа, лучше справились с предложенными задачами. Вероятность ошибки нашего заключения менее 5 %.

Задания для самостоятельного решения

2.1. Измерялось время сложной сенсомоторной реакции выбора (в мс) в контрольной и экспериментальной группах (табл. 6). В экспериментальную группу входили 9 спортсменов высокой квалификации. Контрольной группой являлись 8 человек, активно не занимающихся спортом. Исследователь проверял гипотезу о том, что средняя скорость реакции у спортсменов выше, чем эта же величина у людей, не занимающихся спортом. Верно ли это предположение?

Таблица 6

Время сенсомоторной реакции выбора (мс)

<i>Экспериментальная группа</i>	<i>Контрольная группа</i>
504	580
560	692
420	700
600	621
580	640
530	561
490	680
580	630
470	

2.2. Сравнение галотановой и морфиновой анестезии у больных, подвергшихся операции на открытом сердце. Галотан – газ, используемый при анестезии. Действует быстро и кратковременно, но имеет недостаток: угнетает сократимость миокарда и расширяет вены, что ведет к падению артериального давления. Морфин не снижает давление. В исследование включали больных без противопоказаний к обоим препаратам. Способ анестезии выбирался случайным образом. Регистрировалось артериальное давление между началом анестезии и началом операции, вычислялось среднее артериальное давление по специальной формуле. Результаты исследования:

Группа с галотановой анестезией:

$n_1=61$; $\bar{X}_1=66,9$; $s_1=12,1$; $Me_1=66$; 25 %=58; 75 %=74.

Группа с морфиновой анестезией:

$n_2=61$; $\bar{X}_2=73,2$; $s_2=14,4$; $Me_1=70$; 25 %=62; 75 %=84.

В среднем артериальное давление в первой группе на 6,3 мм рт. ст. ниже, чем во второй. Являются ли эти различия статистически значимыми?

2.3. В этом же исследовании у некоторых больных измерялся еще один параметр – минутный объем сердца (объем крови, перекачиваемый за секунду). Он зависит от размеров тела, поэтому деятельность сердца лучше характеризуется сердечным индексом – отношением минутного объема к площади поверхности тела. Результаты измерений:

Группа с галотановой анестезией:

$n_1=9$; $\overline{X}_1 = 2,08$ л/мин/м²; $s_1=1,05$.

Группа с морфиновой анестезией:

$n_2=15$; $\overline{X}_2 = 1,75$ л/мин/м²; $s_2=0,88$.

Являются ли различия статистически значимыми (считать выборки извлеченными из нормально распределенной совокупности)?

2.4. Проводилось обследование амбулаторных пациентов с диагнозом гипертоническая болезнь (ГБ) I и II стадии. Рассчитывался холестериновый индекс атерогенности как характеристика нарушений липидного обмена. Коэффициент рассчитывается на основании определения общего холестерина и холестерина липопротеинов высокой плотности. Были получены следующие результаты (табл.7):

Таблица 7

Значения холестеринового индекса атерогенности
у больных с гипертонической болезнью

ГБ I степени (n=11)	ГБ II степени (n=10)
5,6	2,7
5	3,7
2	4
1,2	6,2
2,1	3,5
5,2	5,2
3,2	5
1,2	6,4
3,5	5,8
2,8	5,3
3,8	

Определите, являются ли различия в индексе атерогенности у больных ГБ I и II степени статистически значимыми.

3. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Критерий Стьюдента может быть использован только для проверки гипотезы о равенстве средних в двух группах. Если схема эксперимента предполагает большее число групп, то нужно воспользоваться дисперсионным анализом. Этот метод позволяет проверить гипотезу о равенстве средних в нескольких группах.

Для k групп с равной численностью n значение критерия F может быть вычислено по формуле:

$$F = \frac{S_{\text{меж}}^2}{S_{\text{внутр}}^2}.$$

$S_{\text{меж}}^2 = n s_{\bar{X}}^2$ – межгрупповая дисперсия, где n – объем выборки, $s_{\bar{X}}^2$ – дисперсия выборки, составленной из выборочных средних.

$S_{\text{внутр}}^2 = \frac{\sum s_i^2}{k}$ – внутригрупповая дисперсия, где k – количество групп, s_i^2 – выборочные оценки дисперсии в группах. Межгрупповое число степеней свободы $v_{\text{меж}} = k - 1$, где k – число групп. Внутригрупповое число степеней свободы $v_{\text{внутр}} = k(n - 1)$, где n – численность каждой группы.

Обобщение на случай групп с произвольной численностью. Пусть имеется k групп, n_i – численность i -ой группы, $\bar{X}_i$ – среднее в i -ой группе, s_i^2 – дисперсия в i -ой группе, $N = \sum n_i$ – общий объем исследования. Тогда:

$$F = \frac{S_{\text{меж}}/v_{\text{меж}}}{S_{\text{внутр}}/v_{\text{внутр}}},$$

где $S_{\text{меж}}$ – это межгрупповая вариация;

$$S_{\text{меж}} = \sum_{i=1}^k n_i \bar{X}_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^k n_i \bar{X}_i)^2}{N}, \quad v_{\text{меж}} = k - 1.$$

$S_{\text{внутр}}$ – внутригрупповая вариация;

$$S_{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2, \quad v_{\text{внутр}} = N - k.$$

Для нахождения критических значений пользуются специальными таблицами. Если рассчитанное значение F будет больше, чем табличное для соответствующего числа степеней свободы и уровня значимости, то нулевая гипотеза о равенстве выборочных средних отвергается.

Условия применимости дисперсионного анализа:

- 1) каждая выборка независима от остальных выборок;
- 2) каждая выборка случайным образом извлечена из исследуемой совокупности;
- 3) совокупность нормально распределена;
- 4) дисперсии всех выборок не сильно отличаются друг от друга.

Критерий Стьюдента является вариантом дисперсионного анализа в случае сравнения двух групп, при этом выполняется равенство $F=t^2$. Межгрупповое число степеней свободы будет равно $v_{\text{меж}}=k-1=2-1=1$; внутригрупповое $v_{\text{внутр}}=k(n-1)=2(n-1)$ – это как раз число степеней свободы в критерии Стьюдента.

Примеры

1. Применим дисперсионный анализ для решения задачи о влиянии двух типов музыки на способность студентов решать задачи.

$$\overline{X}_1 = 23,4 ; \quad s_1 = 2,64.$$

$$\overline{X}_2 = 20,8 ; \quad s_2 = 3,38.$$

$$n_1 = n_2 = 15.$$

Рассчитаем среднее и дисперсию выборочных средних:

$$\overline{X} = \frac{(\overline{X}_1 + \overline{X}_2)}{2} = \frac{23,4 + 20,8}{2} = 22,1,$$

$$s_{\overline{X}}^2 = \frac{(23,4 - 22,1)^2 + (20,8 - 22,1)^2}{2 - 1} = 3,38.$$

Найдем значения межгрупповой и внутригрупповой дисперсий.

$$s_{\text{меж}}^2 = ns_{\overline{X}}^2 = 15 \cdot 3,38 = 50,7,$$

$$s_{\text{внутр}}^2 = \frac{\sum s_i^2}{k} = \frac{2,64^2 + 3,38^2}{2} = 9,2,$$

$$F = \frac{s_{\text{меж}}^2}{s_{\text{внутр}}^2} = \frac{50,7}{9,2} = 5,5.$$

$v_{\text{меж}}=2-1=1$, $v_{\text{внутр}}=2(15-1)=28$. Найдем критическое значение F (прил.; табл. 2). Верхняя строка таблицы – число степеней свободы числителя, то есть в нашем случае $v_{\text{меж}}$; первый столбец таблицы – число степеней свободы знаменателя ($v_{\text{внутр}}$).

На пересечении столбца с номером 1 ($v_{\text{меж}}=1$) и строки с номером 28 ($v_{\text{внутр}}$) находим, что $F_{0,05;1;28}=4,2$ (верхнее значение для уровня 0,05). Рассчитанное нами значение (5,5) больше, чем критическое, поэтому можем заключить, что с уровнем значимости 0,05 между группами существуют статистически значимые различия.

		<i>Число степеней свободы для числителя ($v_{\text{меж}}$)</i>						
		1	2	3	...	12	13	14
<i>Число степеней свободы для знаменателя ($v_{\text{внутр}}$)</i>	1	161	199	216	...			
	2							
	...							
	28	4.20	3.34	2.95	...			
		7.64	5.45	4.57	...			
	...							

Рис. 6. Пример использования таблицы критических значений F

Заметьте, что действительно выполняется соотношение $F=t^2$ ($t=2,35$; $2,35^2 \approx 5,5$), то есть критерий Стьюдента является вариантом дисперсионного анализа в случае сравнения двух групп.

2. Курение считают основным фактором, предрасполагающим к хроническим обструктивным заболеваниям легких. Является ли таким фактором пассивное курение? Для проверки данного предположения изучалась проходимость дыхательных путей у некурящих, активных и пассивных курильщиков. Измерялась максимальная объемная скорость середины вдоха (л/с) у некурящих, активных и пассивных курильщиков. Ее уменьшение свидетельствует о нарушении проходимости дыхательных путей. Можно ли считать этот показатель одинаковым во всех группах? (Выборки считать извлеченными из нормально распределенной совокупности).

Таблица 8

Данные по максимальной объемной скорости середины вдоха (л/с)

Группа	Численность	Среднее значение	Стандартное отклонение
1. Некурящие, работающие в помещении, где не курят.	200	3,17	0,74
2. Некурящие, работающие в накуреном помещении.	201	2,72	0,71
3. Курящие небольшое количество сигарет.	199	2,63	0,73
4. Курящие среднее количество сигарет.	202	2,29	0,7
5. Курящие большое количество сигарет	198	2,12	0,72

Количество групп $k=5$, общая численность исследования $N=1000$ человек.

$$S_{\text{меж}} = \sum_{i=1}^k n_i \overline{X_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^k n_i \overline{X_i})^2}{N} = (200 \cdot 3,17^2 + 201 \cdot 2,72^2 + 199 \cdot 2,63^2 + 202 \cdot 2,29^2 + 200 \cdot 2,12^2) - \frac{(200 \cdot 3,17 + 201 \cdot 2,72 + 199 \cdot 2,63 + 202 \cdot 2,29 + 200 \cdot 2,12)^2}{1000} = 132,9.$$

$$v_{\text{меж}} = k - 1 = 4.$$

$$S_{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2 = (200 - 1) \cdot 0,74^2 + (201 - 1) \cdot 0,71^2 + (199 - 1) \cdot 0,73^2 + (202 - 1) \cdot 0,7^2 + (198 - 1) \cdot 0,72^2 = 515,9.$$

$$v_{\text{внутр}} = N - k = 995.$$

$$F = \frac{S_{\text{меж}}/v_{\text{меж}}}{S_{\text{внутр}}/v_{\text{внутр}}} = \frac{132,9/4}{515,9/995} = 64,1.$$

Табличное значение для $v_{\text{меж}}=4$ и $v_{\text{внутр}}=995$ (в таблице берем последнее максимальное значение $v = 200$, при таких больших объемах исследования это уже не влияет значительно на результат) составляет 2,42 ($\alpha=0,05$) и 3,41 ($\alpha=0,01$). Можем опровергнуть нулевую гипотезу с уровнем значимости 0,01 и утверждать, что максимальная объемная скорость середины вдоха в группах статистически значимо различается (вероятность ошибки менее 1 %).

Задания для самостоятельного решения

3.1. Решите с помощью дисперсионного анализа задачу 2.2 о среднем артериальном давлении при галотановой и морфиновой анестезии.

3.2. При помощи однофакторного дисперсионного анализа проверьте гипотезу о влиянии сорта пшеницы на урожайность при одинаковых почвенных условиях для четырех сортов пшеницы (сначала рассчитайте параметры распределения для каждой из выборок).

Таблица 9

Урожайность в зависимости от сорта пшеницы

Сорт	Урожайность					
1-й сорт	17	17,2	16,1	17	16,8	
2-й сорт	15,8	17	16,4	15,6	15,5	
3-й сорт	17,4	16,6	16,2	15,2	15,8	
4-й сорт	15,7	16,8	15,1	15,9	17,2	

3.3. В исследовании по нарушению обмена мочевой кислоты у больных сахарным диабетом 2 типа под наблюдением находились 54 пациента (24 женщины и 30 мужчин), которые были разделены на подгруппы в зависимости от длительности заболевания. У больных определяли содержание мочевой кислоты (МК) в крови (табл. 10) и клиренс МК (табл. 11). Определите статистическую значимость различий в содержании и клиренсе МК при разной длительности заболевания для обоих полов (по отдельности).

Таблица 10

Содержание мочевой кислоты в крови (мкмоль/л)

Длительность заболевания, лет	Мужчины			Женщины		
	n	среднее	ст. отклон.	n	среднее	ст. отклон.
до 5	7	452,3	21,7	6	361,5	21,1
до 7,5	9	481,7	11,3	8	394,7	19,3
до 10	14	504,3	15,1	10	421,5	21,1

Таблица 11

Клиренс мочевой кислоты (мл/мин)

Длительность заболевания, лет	Мужчины			Женщины		
	n	среднее	ст. отклон.	n	среднее	ст. отклон.
до 5	7	5,7	0,5	6	6	0,7
до 7,5	9	5	0,5	8	5,3	0,5
до 10	14	4,1	0,3	10	4,9	0,3

Дополнительно определите (с помощью критерия Стьюдента), отличается ли содержание и клиренс МК в группе пациентов с длительно-стью заболевания до 10 лет в зависимости от пола (считать распределе-ния нормальными).

3.4. Нитропруссид натрия и дофамин – препараты, используемые при инфаркте миокарда. Эффективность этих препаратов сравнивалась в опытах на собаках. Инфаркт миокарда вызывали перевязкой коронар-ной артерии, после чего вводили препарат (собакам контрольной группы вводили физиологический раствор). Взвешивали пораженный участок миокарда, результат выражали в процентах от веса левого желудочка (табл. 12).

Таблица 12

Данные по весу пораженного участка миокарда
(в процентах от веса левого желудочка)

Группа	Число животных	Среднее значение	Стандартное отклонение
Контроль	30	15	5,48
Дофамин			
– низкая доза	13	15	7,21
– высокая доза	20	9	8,94
Нитропруссид натрия	20	7	4,47

Можно ли считать различия между группами статистически зна-чимыми?

4. АНАЛИЗ ПОВТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

4.1. Критерий Стьюдента для сравнения средних в двух взаимосвязанных выборках (критерий Стьюдента для повторных измерений)

Во взаимосвязанных выборках значения представлены парами, поэтому данный критерий может также носить название «парный». Каждый субъект исследования оценивается дважды: один раз в одних условиях, затем – в других. Следовательно, каждый субъект в одной группе непосредственно связан с субъектом во второй группе.

В данном типе исследования нас интересует только разница между двумя группами, то есть изучается только одна выборка D: разность между двумя измерениями. Значение критерия Стьюдента рассчитывается по следующей формуле:

$$t = \frac{\overline{X_D}}{s_{\overline{X_D}}} = \frac{\overline{X_D}}{s_D / \sqrt{n}},$$

где n – объем выборки; $\overline{X_D}$ – среднее значение для разности измерений; s_D и $s_{\overline{X_D}}$ – стандартное отклонение и стандартная ошибка разности средних. Рассчитанное значение сравнивается с табличным для числа степеней свободы $\nu = n - 1$.

В случае применения критерия Стьюдента для повторных измерений должно соблюдаться нормальное распределение разности между парами значение.

Пример. В исследовании сравнивали два средства для предупреждения образования зубного налета: хлоргексидин и хлорид аммония. Полоскание с хлоргексидином имеет неприятный вкус и окрашивает зубы. Полоскание на основе хлорида аммония приятнее на вкус, не окрашивает зубы; однако считается менее эффективным. Каждый из участников исследования в течение 48 часов полоскал рот одним из средств, после чего налет оценивали визуально (табл. 13). Через некоторое время опыт повторяли с другим средством (очередность определялась случайным образом). Были получены следующие результаты. Эффективно ли полоскание хлоридом аммония?

Посчитаем разность между парами измерений (третий столбец). Среднее значение разности $\overline{X_D} = 50,5$; стандартное отклонение $s_D = 34,05$. $n = 10$, стандартная ошибка среднего $s_{\overline{X_D}} = 34,05 / \sqrt{10} = 10,77$.

Результаты визуальной оценки зубного налета
при применении разных средств

Хлорид аммония	Хлоргексидин	Разность
32	14	18
60	39	21
25	24	1
45	13	32
65	9	56
60	3	57
68	10	58
83	14	69
120	1	119
110	36	74

$$t = \frac{\overline{X_D}}{s_{\overline{X_D}}} = \frac{50,5}{10,77} = 4,69.$$

Число степеней свободы $v=n-1=9$. Находим табличное значение. $t_{0,05;9} = 2,262$; $t_{0,01;9} = 3,25 < 4,69$. Можно сделать вывод, что между эффективностью средств есть статистически значимые различия. Полоскание хлоргексидином является более эффективным (налет меньше). Вероятность ошибки менее 1 %.

4.2. Дисперсионный анализ повторных измерений

В дисперсионном анализе повторных измерений одна и та же группа последовательно подвергается действию изучаемого фактора или просто наблюдается в несколько последовательных моментов времени. Общая вариация делится на межиндивидуальную и внутрииндивидуальную. Внутрииндивидуальная вариация, в свою очередь, подразделяется на факторную и остаточную. В качестве критического значения F принимается отношение двух последних вариаций.

Пусть имеется группа численности n , для которой выполняется k измерений, X_{ij} – результат i -го измерения у j -го члена группы. Факторная вариация вычисляется, как

$$S_{\phi} = \frac{\sum_i (\sum_j X_{ij})^2}{n} - \frac{(\sum_i \sum_j X_{ij})^2}{k \cdot n}.$$

Остаточная вариация $S_{\text{ост}} = S_{\text{ви}} - S_{\text{ф}}$, где $S_{\text{ви}}$ – внутрииндивидуальная вариация:

$$S_{\text{ви}} = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{\sum_j (\sum_i X_{ij})^2}{k}$$

$$v_{\text{ф}} = k - 1; \quad v_{\text{ост}} = (n - 1)(k - 1)$$

$$F = \frac{S_{\text{ф}} / v_{\text{ф}}}{S_{\text{ост}} / v_{\text{ост}}}.$$

Пример. Первичная легочная гипертензия – редкое заболевание, при котором повышается давление в артериях легких. Гидралазин – препарат, расширяющий сосуды, используется при гипертонической болезни. Исследователи предположили, что его можно использовать при первичной легочной гипертензии. Исследование включало четырех больных, у которых трижды измерялся сердечный выброс: перед лечением, через 48 часов и через 3–6 месяцев после лечения. Результаты представлены в таблице:

Измерение (i) Больной (j)	До лечения	Через 48 ч	Через 3-6 мес
1	3,5	8,6	5,1
2	3,3	5,4	8,6
3	4,9	8,8	6,7
4	3,6	5,6	5,0

$$S_{\text{ви}} = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{\sum_j (\sum_i X_{ij})^2}{k} =$$

$$= (3,5^2 + 8,6^2 + 5,1^2 + 3,3^2 + 5,4^2 + 8,6^2 + 4,9^2 + 8,8^2 + 6,7^2 + 3,6^2 + 5,6^2 + 5^2) -$$

$$- ((3,5 + 8,6 + 5,1)^2 + (3,3 + 5,4 + 8,6)^2 + (4,9 + 8,8 + 6,7)^2 + (3,6 + 5,6 + 5)^2) / k = 37,5.$$

$$S_{\text{ф}} = \frac{\sum_i (\sum_j X_{ij})^2}{n} - \frac{(\sum_i \sum_j X_{ij})^2}{k \cdot n} =$$

$$= ((3,5 + 3,3 + 4,9 + 3,6)^2 + (8,6 + 5,4 + 8,8 + 5,6)^2 +$$

$$+ (5,1 + 8,6 + 6,7 + 5)^2) / 4 - (3,3 + 8,6 + 5,1 + 3,3 + 5,4 + 8,6 + 4,9 + 8,8 + 6,7 +$$

$$+ 3,6 + 5,6 + 5)^2 / (4 \cdot 3) = 23,5.$$

$$S_{\text{ост}} = 37,5 - 23,5 = 14; \quad v_{\phi} = 3 - 1 = 2; \quad v_{\text{ост}} = (4 - 1)(3 - 1) = 6.$$

$$F = \frac{23,5 / 2}{14 / 6} = 4,97; \quad F_{0,05;2;6} = 5,14.$$

Поскольку рассчитанное значение F меньше табличного, мы не можем отвергнуть нулевую гипотезу. По результатам анализа нельзя считать, что сердечный выброс в какой-то из моментов наблюдения значительно отличается от остальных.

Задания для самостоятельного решения

4.1. При исследовании влияния курения на агрегацию тромбоцитов. 11-ти добровольцам было предложено выкурить по сигарете. Перед курением и сразу после него были взяты пробы крови и определена агрегация тромбоцитов. Результаты помещены в табл. 14.

Является ли повышение агрегации тромбоцитов после курения статистически значимым? Попробуйте применить к этим данным еще и обычный критерий Стьюдента. Почему он не в состоянии выявить различия?

Таблица 14

Данные по агрегации тромбоцитов до и после курения

До курения	После
25	27
25	29
28	38
30	42
30	46
45	60
51	55
52	79
58	67
61	60
68	83

4.2. Исследователи предположили, что в результате обучения время решения эквивалентных задач (имеющих одинаковый алгоритм решения) будет значительно уменьшаться. Для проверки гипотезы у 8 испытуемых сравнивалось время решения в минутах первой и третьей задач. Наблюдаются ли статистически значимые различия?

1 задача	4,0	3,5	4,1	5,5	4,6	6,0	5,1	4,3
2 задача	3,0	3,0	3,8	2,1	4,9	5,3	3,1	2,7

4.3. Проводилось изучение терапевтических возможностей препарата «Адаптол» в лечении вегетативных нарушений в группе из 12 женщин

в менопаузе. Эффективность лечения оценивали через неделю после его начала. Были получены следующие результаты (измерения содержания гормонов в сыворотке крови, табл. 15).

Таблица 15

Содержание гормонов в сыворотке крови до и после применения препарата

№	Эстрадиол, пмоль/л		Прогестерон, нмоль/л		Трийодтиронин (Т3), нмоль/л	
	До	После	До	После	До	После
1	86,2	115,2	7,8	9,6	1,8	1,7
2	102,1	148	9,9	10,8	1,9	1,7
3	67,3	77,4	10,0	11,1	1,8	1,8
4	89,1	115,6	7,1	9,0	1,8	1,9
5	34,3	68,2	8,3	10,7	1,7	1,9
6	92,0	140,2	11,0	9,0	1,8	1,8
7	81,5	88,2	11,6	12,0	1,9	1,7
8	112,0	177,1	7,0	9,0	1,8	1,7
9	78,2	91,8	10,4	11,0	1,8	1,6
10	95,1	127,8	8,3	10,6	1,7	1,7
11	118,7	154,3	10,9	12,0	1,8	1,6
12	84,9	91,3	8,4	10,0	1,9	1,7

Оцените статистическую значимость изменения содержания гормонов после терапии.

4.4. При ишемической болезни сердца курение может вызвать приступ стенокардии. Это связано с тем, что никотин увеличивает потребность миокарда в кислороде, а окись углерода связывается с гемоглобином, тем самым снижая поступление кислорода. Однако не способствуют ли развитию приступов и другие компоненты табачного дыма? Чтобы выяснить это, у 3 больных ИБС изучалась продолжительность физической нагрузки до развития приступа стенокардии. У каждого больного опыт проводили до и после выкуривания пяти безникотиновых сигарет, а затем до и после вдыхания эквивалентного количества окиси углерода. Были получены следующие результаты:

Таблица 16

Длительность нагрузки (в секундах)

Номер больного	Курение безникотиновых сигарет		Вдыхание окиси углеро- да	
	до	после	до	после
1	300	150	300	170
2	200	100	180	120
3	350	200	360	240

Какие выводы позволяют сделать эти данные?

5. АНАЛИЗ КАЧЕСТВЕННЫХ НОМИНАТИВНЫХ ПРИЗНАКОВ

5.1. Оценка и сравнение долей

Пусть имеется выборка из n объектов, при этом m из них обладает каким-то качественным признаком, которого нет у остальных $n-m$ объектов. Тогда доля объектов выборки, обладающих признаком, вычисляется как $\hat{p} = \frac{m}{n}$. Показатель разброса значений – стандартное отклонение до-

ли – вычисляется по формуле: $S = \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}$; стандартная ошибка доли: $s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$.

Критерий z для проверки нулевой гипотезы о равенстве долей в двух выборках:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}},$$

где $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$ – выборочные доли, $\hat{p}_1 = \frac{m_1}{n_1}$; $\hat{p}_2 = \frac{m_2}{n_2}$,

$s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$ – стандартная ошибка разности долей.

Мы можем рассчитать объединенную оценку доли $\hat{p} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$.

Тогда стандартная ошибка разности долей вычисляется:

$$s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{s_{\hat{p}}^2}{n_1} + \frac{s_{\hat{p}}^2}{n_2}} = \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}.$$

Для нахождения критических значений z необходимо воспользоваться таблицами значений стандартного нормального распределения. При увеличении числа степеней свободы распределение Стьюдента стремится к нормальному, поэтому критические значения z можно найти в последней строке таблицы распределения Стьюдента. Для $\alpha = 0,05$ $z_{0,05} = 1,96$; для $\alpha = 0,01$ $z_{0,01} = 2,58$.

Нормальное распределение служит лишь приближением для распределения z . При этом оценка оказывается заниженной. Для компенсации вводится поправка Йейтса. С учетом этой поправки формула для расчета z имеет следующий вид:

$$z = \frac{|\hat{p}_1 - \hat{p}_2| - \frac{1}{2}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}.$$

Пример. Применим z-критерий для задачи о влиянии дополнительного приема эстрогена на риск развития болезни Альцгеймера. В группе, принимавшей эстроген ($n_1=156$) количество заболевших составило 9 ($m_1=9$). Во второй группе ($n_2=968$) количество заболевших составило 158 ($m_2=158$).

$$\hat{p}_1 = \frac{m_1}{n_1} = 9/156 = 0,058; \quad \hat{p}_2 = \frac{m_2}{n_2} = 158/968 = 0,163.$$

$$\hat{p} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \frac{9 + 158}{156 + 968} = 0,149.$$

$$s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{s_{\hat{p}}^2}{n_1} + \frac{s_{\hat{p}}^2}{n_2}} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})} =$$

$$= \sqrt{0,149(1-0,149)(\frac{1}{156} + \frac{1}{968})} = 0,031.$$

$$z = \frac{|\hat{p}_1 - \hat{p}_2| - \frac{1}{2}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{|0,058 - 0,163| - \frac{1}{2}(\frac{1}{156} + \frac{1}{968})}{0,03} = 3,318.$$

Рассчитанное значение больше, чем $z_{0,01}=2,58$. Поэтому с уровнем значимости 0,01 можем утверждать, что между долями заболевших существуют статистически значимые различия.

Задания для самостоятельного решения

5.1. Исследовался уровень летальности при различных формах гнойной деструкции легких. При гнойном абсцессе число летальных исходов составило 4 от общего количества больных – 140; при гангренозном абсцессе число летальных исходов составило 11 от общего количества больных – 48. Если статистически значимые различия в уровнях летальности? Каков уровень значимости различий?

5.2. Изучалась распространенность метаболического синдрома в выборке жителей крупного города в возрасте 45–69 лет ($n=4543$). Метаболи-

ческий синдром был выражен у 18 % мужчин и 33 % женщин. Являются ли различия в распространенности синдрома статистически значимыми?

5.3. Определите, имеются ли статистически значимые различия в частоте регистрации проявления астеноневротического синдрома у детей с пищевой аллергией и диспептическими жалобами в дошкольном и школьном возрасте (табл. 17).

Таблица 17

Частота проявления астеноневротического расстройства у детей

Жалобы	Дошкольники (n=46)	Школьники (n=37)
Слабость	8	9
Утомляемость	15	16
Раздражительность	27	22
Головокружение	2	12
Головная боль	12	23

5.2. Критерий χ^2

Критерий χ^2 не требует никаких предположений относительно параметров совокупности, из которой извлечены выборки – это непараметрический критерий. Он является аналогом дисперсионного анализа в случае качественных номинативных признаков.

По имеющимся данным исследования строят таблицу сопряженности. Строки таблицы представляют собой сравниваемые факторы, а столбцы – возможные исходы эксперимента. Подсчитывают число объектов в каждой строке и каждом столбце. Наблюдаемые значения обозначают буквой О (observed). Таблица сопряженности выглядит следующим образом (R_i – суммы в строках таблицы, C_j – суммы в столбцах таблицы, N – общий объем исследования, r – число строк, c – число столбцов):

Таблица 18

Таблица сопряженности

O_{11}	O_{12}	...	O_{1c}	R_1
O_{21}	O_{22}	...	O_{2c}	R_2
...	...	...	...	...
O_{r1}	O_{r2}	...	O_{rc}	R_r
C_1	C_2	...	C_c	N

Далее подсчитывают с точностью до двух знаков после запятой ожидаемые числа – количество объектов, которое попало бы в каждую клетку, если бы связь между строками и столбцами отсутствовала, то есть изучаемые факторы не влияли бы на исход. Ожидаемые значения обозначают буквой Е (expected). Таблица ожидаемых чисел рассчитыва-

ется следующим образом (обратите внимание, что суммы по строкам и столбцам должны сохраниться):

Таблица 19

Таблица ожидаемых чисел

$E_{11}=R_1 \cdot C_1/N$	$E_{12}=R_1 \cdot C_2/N$	...	$E_{1c}=R_1 \cdot C_c/N$	R_1
$E_{21}=R_2 \cdot C_1/N$	$E_{22}=R_2 \cdot C_2/N$	...	$E_{2c}=R_2 \cdot C_c/N$	R_2
...	...	...	...	...
$E_{r1}=R_r \cdot C_1/N$	$E_{r2}=R_r \cdot C_2/N$	...	$E_{rc}=R_r \cdot C_c/N$	R_r
C_1	C_2	...	C_c	N

По полученным таблицам рассчитывается значение критерия:

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}},$$

где O_{ij} – наблюдаемые значения в клетках таблицы, E_{ij} – ожидаемые значения. Суммирование производится по всем клеткам таблицы.

Применение критерия χ^2 правомерно, если ожидаемые числа в любой из клеток больше либо равны 5. Число степеней свободы $v=(r-1)(c-1)$.

Приведенная формула для χ^2 в случае таблицы 2×2 дает несколько завышенное значение. На практике это приводит к тому, что нулевая гипотеза будет отвергаться слишком часто. Чтобы компенсировать этот эффект, в формулу вводят поправку Йейтса:

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(|O - E| - \frac{1}{2}\right)^2}{E}.$$

Пример. Изучение влияния дополнительного приема эстрогена на риск развития болезни Альцгеймера. В исследовании принимала участие группа из 1124 пожилых женщин, 156 из которых длительное время получали эстроген. Группа наблюдалась в течение пяти лет, регистрировались случаи болезни Альцгеймера. Результаты в таблице:

Эстроген	Болезнь Альцгеймера		
	Нет	Да	
Да	147	9	156
Нет	810	158	968
	957	167	1124

Очевидно, что доля заболевших в группе, принимавшей эстроген, почти в три раза ниже. Являются ли эти различия статистически значимыми?

Рассчитаем таблицу ожидаемых чисел (те результаты, которые были бы, если бы прием эстрогена не влиял на риск развития болезни Альцгеймера):

Эстроген	Болезнь Альцгеймера		
	Нет	Да	
Да	$\frac{156 \cdot 957}{1124} = 132,82$	$\frac{156 \cdot 167}{1124} = 23,18$	156
Нет	$\frac{968 \cdot 957}{1124} = 824,18$	$\frac{968 \cdot 167}{1124} = 143,82$	968
	957	167	1124

Вычислим значение χ^2 (поскольку размер таблицы 2×2 , применим поправку):

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(|O - E| - \frac{1}{2}\right)^2}{E} = \frac{(|147 - 132,82| - 0,5)^2}{132,82} + \frac{(|9 - 23,18| - 0,5)^2}{23,18} + \frac{(|810 - 824,18| - 0,5)^2}{824,18} + \frac{(|158 - 143,82| - 0,5)^2}{143,82} = 11,01.$$

Найдем критическое значение χ^2 . Число степеней свободы для таблицы 2×2 равно 1. Критическое значение находим по прил. табл. 3 на пересечении строки с числом степеней свободы v и столбца с подходящим уровнем значимости. Для уровня 0,05 и $v=1$ критическое значение χ^2 равно 3,84; для уровня 0,001 – 10,83. Рассчитанное значение больше критического для уровня 0,001, поэтому можем утверждать, что дополнительный прием эстрогена снижает риск развития болезни Альцгеймера (вероятность ошибки менее 0,1%).

Задания для самостоятельного решения

5.4. Исследовалось влияние экзогенных стероидных гормонов во время беременности у 108 матерей, дети у которых родились с врожденными дефектами. Непреднамеренное использование оральных контрацептивов на ранних сроках беременности рассматривалось как основной фактор воздействия. У матерей больных детей отмечено употребление контрацептивов в 15 случаях, в контрольной группе (также 108 матерей) – в 4 случаях. Есть ли статистически значимые различия между группами? Решите эту же задачу с помощью оценки долей и z-критерия.

5.5. Проводилась оценка эффективности терапии для лечения синдрома хронической обеспокоенности. В исследовании принимало участие 150 человек, 60 из которых получали двухмесячную программу ле-

чения. После двух месяцев проводилась оценка состояния (ухудшилось, улучшилось, не изменилось). Результаты в таблице:

Терапия	Состояние			
	Ухудшилось	Не изменилось	Улучшилось	
Да	24	11	25	60
Нет	30	31	29	90
	54	42	54	150

Есть статистически значимые различия между группами?

5.6. Синдром внезапной детской смерти – основная причина смерти детей в возрасте от 1 недели до 1 года. Обычно смерть наступает на фоне полного здоровья незаметно, во сне, поэтому определение факторов риска имеет первостепенное значение. Исследователи собрали сведения о 18 955 детях, родившихся в одном из роддомов Окленда, штат Калифорния, с 1960 по 1967 г. Судьбу детей проследили до 1 года. От синдрома внезапной детской смерти умерли 44 ребенка. Данные о предполагаемых факторах риска представлены в табл. 20. Найдите признаки, связанные с риском синдрома внезапной детской смерти. По некоторым признакам данные отсутствуют, поэтому сумма в третьем столбце может оказаться меньше 44, а в четвертом – меньше 18 995.

Таблица 20

Предполагаемые факторы синдрома внезапной детской смерти

Фактор		Синдром	
		Да	Нет
<i>Возраст матери</i>	До 25 лет	29	7301
	25 лет и старше	15	11241
<i>Время от окончания предыдущей беременности</i>	Менее 1 года	23	4694
	Более 1 года	11	7339
<i>Планировалась ли беременность</i>	Нет	23	7654
	Да	5	4253
<i>Курение во время беременности</i>	Да	24	5228
	Нет	10	9595
<i>Низкий гемоглобин во время беременности</i>	Да	26	12613
	Нет	7	2678
<i>Раса</i>	Белые	31	12240
	Афроамериканцы	9	4323
	Другие	4	2153

5.7. Проводилось исследование влияния курения на риск развития артериальной гипертензии. Для этого были отобраны две группы иссле-

дующих: в первую вошли 70 человек, ежедневно выкуривающих не менее 1 пачки сигарет, во вторую – 80 некурящих такого же возраста. Результаты исследования представлены в таблице:

	Артериальная гипертензия есть	Артериальной гипертензии нет
Курящие	40	30
Некурящие	32	48

Имеются ли статистически значимые различия между частотой лиц с повышенным артериальным давлением среди курящих и некурящих?

5.3. Критерий Мак-Нимара

Критерий χ^2 для анализа таблиц сопряженности размером 2x2 применим только в отношении независимых наблюдений. Если же учет какого-либо дихотомического признака выполняется, например, на одних и тех же испытуемых, вместо критерия χ^2 следует использовать критерий Мак-Нимара (аналог критерия Стьюдента для повторных измерений в случае количественных признаков).

Критерий Мак-Нимара часто используется для выявления изменений в наблюдениях типа «до–после», например, наблюдение группы больных до и после лечения, когда требуется оценить эффект этого лечения по наличию/отсутствию какого-либо симптома.

В данной критерии строится таблица абсолютных частот для парных наблюдений. Структура этой таблицы в корне отличается от таковой для критерия χ^2 , хотя внешне эти таблицы похожи. Главное отличие – измеряемой единицей является пара наблюдений.

Таблица 21

Таблица абсолютных частот для парных наблюдений

После До лечения	Симптом есть	Симптома нет
Симптом есть	A	B
Симптома нет	C	D

При применении критерия из рассмотрения исключаются объекты, для которых результаты не изменились (то есть A и D). Для тех объектов, реакция которых изменилась (то есть B и C), ожидаемым значением будет величина $E=(B+C)/2$. Следовательно, если бы лечение не оказывало никакого эффекта, распределение объектов по этим группам было бы одинаковое. Для сравнения наблюдаемых и ожидаемых значений используем χ^2 :

$$\chi^2 = \frac{(|B - E| - 0,5)^2}{E} + \frac{(|C - E| - 0,5)^2}{E} = \frac{(|B - C| - 1)^2}{B + C}.$$

Полученное значение сравнивается с табличным для числа степеней свободы $\nu=1$.

Пример. Оценить эффективность лечения по наличию боли до и после лечения.

После До лечения	Боль есть	Боли нет
Боль есть	80	50
Боли нет	25	20

$$E=(50+25)/2=37,5.$$

$$\chi^2 = \frac{(|50 - 25| - 1)^2}{50 + 25} = 7,68.$$

Табличное значение χ^2 для уровня значимости 0,05 равно 3,84, для уровня 0,01 – 6,635. Таким образом, существуют статистически значимые различия, вероятность ошибки составляет менее 1 %. Лечение имеет эффект. До лечения боль отмечали 130 человек (сумма первой строки), после лечения – 105 человек (сумма первого столбца).

Задания для самостоятельного решения

5.8. Произошли ли статистически значимые уменьшения проявлений кардиального синдрома в исследовании терапевтических возможностей препарата «Адаптол» в группе из 45 женщин в менопаузе? В таблице приведены результаты обследования до начала приема препарата и через неделю после начала приема.

1. Сердцебиение:

После До	Есть	Нет
Есть	6	29
Нет	1	9

2. Одышка:

До \ После	Есть	Нет
Есть	11	26
Нет	2	6

3. Нарушения ритма сердца:

До \ После	Есть	Нет
Есть	17	1
Нет	0	27

6. ЛИНЕЙНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим связь между двумя количественными признаками, которые характеризуют членов одной группы, при этом ограничимся случаем линейной зависимости двух переменных.

Линейная зависимость признака y от признака x определяется формулой: $y = \alpha + \beta \cdot x$. Коэффициент α определяет координату точки пересечения прямой с осью Y ; его называют также коэффициентом сдвига. Коэффициент β называют коэффициентом наклона. Сама линия называется прямой регрессии.

Выборочные оценки обозначим a и b . Формулы для расчета коэффициентов уравнения регрессии:

- коэффициент сдвига:

$$a = \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{n(\sum X^2) - (\sum X)^2};$$

- коэффициент наклона:

$$b = \frac{n(\sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{n(\sum X^2) - (\sum X)^2},$$

где X , Y – значения переменных для n членов выборки. Вычисления можно упростить, если сначала вычислить b , а затем найти a по формуле:

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}.$$

При каждом X существует разброс значений Y со стандартным отклонением $\sigma_{Y|X}$. Выборочной оценкой $\sigma_{Y|X}$ служит остаточное стандартное отклонение $s_{Y|X}$, которое вычисляется по формуле:

$$s_{Y|X} = \sqrt{\frac{n-1}{n-2}(s_Y^2 - b^2 s_X^2)},$$

где s_X , s_Y – стандартные отклонения X и Y .

Стандартные ошибки коэффициентов регрессии рассчитываются по следующим формулам:

$$s_a = s_{Y|X} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X})^2}{(n-1)s_X^2}},$$

$$s_b = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{s_{Y|X}}{s_X}.$$

Для проверки статистической значимости линейной зависимости можно воспользоваться критерием Стьюдента:

$$t = \frac{b}{s_b}.$$

Найдем t_α – критические значения t для уровня значимости α и числа степеней свободы $\nu = n-2$. Если $|t| > t_\alpha$, то зависимость статистически значима.

Условия применимости регрессионного анализа:

- 1) линейность связи переменных: перед тем как приступить к расчетам, необходимо нанести данные на график;
- 2) изучаемые признаки должны быть количественного типа;
- 3) нормальность распределения.

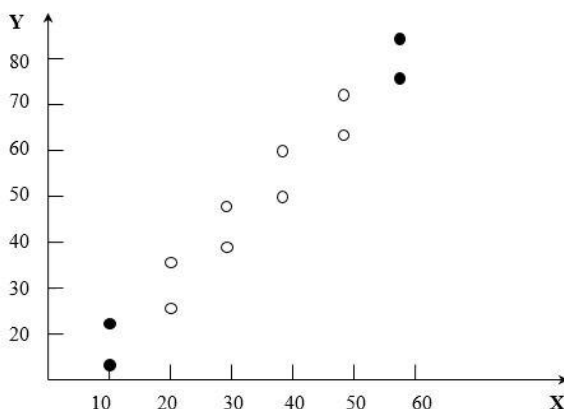
Пример. Построить графики для приведенных наборов данных. Найти коэффициенты уравнения регрессии и проверить статистическую значимость найденной линейной зависимости.

Таблица 22

Данные для построения линий регрессии

X_1	Y_1	X_2	Y_2
30	37	30	37
30	47	30	47
40	50	40	50
40	60	40	60
20	25	20	25
20	35	20	35
50	62	50	62
50	72	50	72
		10	13
		10	23
		60	74
		60	84

Нанесем точки на плоскость (черным цветом обозначены точки, принадлежащие только второй выборке):



Очевидно, что наблюдаемую зависимость можно описать линейным уравнением. Для расчета коэффициентов регрессии удобно пользоваться следующей таблицей (рассмотрим на примере первой выборки):

	X	Y	XY	X ²
	30	37	1110	900
	30	47	1410	900
	40	50	2000	1600
	40	60	2400	1600
	20	25	500	400
	20	35	700	400
	50	62	3100	2500
	50	72	3600	2500
Сумма	280	388	14820	10800

$$\bar{X} = 280 / 8 = 35; \bar{Y} = 388 / 8 = 48,5;$$

$$b = \frac{n(\sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{n(\sum X^2) - (\sum X)^2} = \frac{8 \cdot 14820 - 280 \cdot 388}{8 \cdot 10800 - 280^2} = 1,24;$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X} = 48,5 - 1,24 \cdot 35 = 5,1.$$

Оценим статистическую значимость найденной линейной зависимости ($s_X=11,95$, $s_Y=15,76$).

$$s_{Y|X} = \sqrt{\frac{n-1}{n-2} (s_Y^2 - b^2 s_X^2)} = \sqrt{\frac{7}{6} (15,76^2 - 1,24^2 \cdot 11,95^2)} = 5,78.$$

$$s_b = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{s_{Y|X}}{s_X} = \frac{1}{\sqrt{7}} \frac{5,78}{11,95} = 0,18; \quad t = \frac{b}{s_b} = \frac{1,24}{0,18} = 6,89.$$

Критическое значение t для уровня значимости 0,05 и $\nu=n-2=6$ степеней свободы составляет 2,447, для уровня значимости 0,001 – 5,959, что меньше рассчитанного. Таким образом, коэффициент наклона является статистически значимым.

Для второй выборки $b=1,23$; $a=5,6$; $s_b=0,087$; $t=14,28$. Таким образом, увеличение объема выборки позволило уточнить коэффициенты уравнения регрессии и повысить статистическую значимость линейной зависимости.

Задания для самостоятельного решения

6.1. Постройте графики для двух наборов данных. Найдите для каждого линию регрессии. Нанесите полученные прямые регрессии на графики с исходными данными. Почему получились такие результаты? Выполнены ли условия применимости регрессионного анализа; можно ли для второй выборки выразить связь единственной линией регрессии?

Таблица 23

Данные для построения линий регрессии

X_1	Y_1	X_2	Y_2
15	19	20	21
15	29	20	31
20	25	30	18
20	35	30	28
25	31	40	15
25	41	40	25
30	37	40	75
30	47	40	85
60	40	50	65
		50	75
		60	55
		60	65

6.2. В таблице представлены результаты трех экспериментов. Нанесите результаты на график. Вычислите коэффициенты линейной регрессии для того эксперимента, где выполняются условия применимости регрессионного анализа.

Результаты экспериментов

Эксперимент А		Эксперимент Б		Эксперимент В	
Х	У	Х	У	Х	У
4	4,26	4	3,10	4	5,39
5	5,68	5	4,74	5	5,73
7	4,82	7	7,26	7	6,42
6	7,24	6	6,13	6	6,08
8	6,95	8	8,14	8	6,77
9	8,81	9	8,77	9	7,11
10	8,04	10	9,14	10	7,46
11	8,33	11	9,26	11	7,81
12	10,84	12	9,13	12	8,15
13	7,58	13	8,74	13	12,74
14	9,96	14	8,10	14	8,84

6.3. Исследуется связь между поглощенной дозой облучения, Гр (Х) и долей аберрантных клеток костного мозга, % (У) у 15 подопытных животных (белые мыши). Результаты приведены в табл. 25. Вычислите коэффициенты уравнения линейной регрессии и оцените статистическую значимость коэффициента наклона b .

Таблица 25

Данные по связи поглощенной дозы облучения
и доли аберрантных клеток костного мозга

Доза облучения, Гр (Х)	Доля аберрантных клеток костного мозга, % (У)
3,2	59
2,5	44
4,5	85
4,0	70
3,0	52
0,8	21
1,3	26
4,0	79
3,1	41
3,5	67
1,8	32
0,7	18
4,3	90
0,3	12
5,0	100

7. КОРРЕЛЯЦИЯ

Характеристика тесноты связи между двумя переменными, выраженная одним числом, называется *коэффициентом корреляции*. Обычно его обозначают r .

Коэффициент корреляции может принимать значения от -1 до 1 . Знак показывает направление связи (прямая – при положительном значении коэффициента или обратная – при отрицательном), а абсолютная величина – тесноту. В отсутствие связи коэффициент корреляции равен нулю. Чем ближе абсолютное значение r к единице, тем теснее связь.

Коэффициент корреляции Пирсона предназначен для описания линейной связи количественных признаков. Он требует нормального распределения. *Коэффициент ранговой корреляции Спирмена* можно использовать и в случае нелинейной связи, и для качественных порядковых признаков. Это непараметрический метод, он не требует нормальности распределения. Также рассмотрим бисериальные коэффициенты корреляции и коэффициент контингенции.

7.1. Коэффициент корреляции Пирсона

Коэффициент корреляции Пирсона вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2 \sum (Y - \bar{Y})^2}}.$$

Для оценки статистической значимости коэффициента корреляции r можно воспользоваться критерием Стьюдента. При этом значение t вычисляется по следующей формуле:

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}; \quad v = n-2.$$

Пример. Рассчитать коэффициенты корреляции по выборкам, для которых строили уравнения регрессии в примере из предыдущего раздела (табл. 22).

Для расчета коэффициента корреляции построим таблицу (рассмотрим на примере первой выборки):

$$\bar{X} = 280 / 8 = 35; \quad \bar{Y} = 388 / 8 = 48,5;$$

$$r = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2 \sum (Y - \bar{Y})^2}} = \frac{1240}{\sqrt{1000 \cdot 1738}} = 0,94.$$

	X	Y	$X - \bar{X}$	$(X - \bar{X})^2$	$Y - \bar{Y}$	$(Y - \bar{Y})^2$	$(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$
	30	37	-5	25	-11,5	132,25	57,5
	30	47	-5	25	-1,5	2,25	7,5
	40	50	5	25	1,5	2,25	7,5
	40	60	5	25	11,5	132,25	57,5
	20	25	-15	225	-23,5	552,25	352,5
	20	35	-15	225	-13,5	182,25	202,5
	50	62	15	225	13,5	182,25	202,5
	50	72	15	225	23,5	552,25	352,5
Сумма	280	388		1000		1738	1240

Итак, между двумя переменными X и Y существует тесная положительная корреляционная связь. Оценим статистическую значимость этой связи:

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{0,94}{\sqrt{\frac{1-0,94^2}{8-2}}} = 6,75.$$

Критическое значение t для уровня значимости 0,05 и $\nu = n - 2 = 6$ степеней свободы составляет 2,44, для уровня значимости 0,001 – 5,959. Таким образом, коэффициент корреляции является статистически значимым с уровнем значимости 0,001.

Для второй выборки $r=0,97$, $t=13,22$ (рассчитайте самостоятельно). Увеличение объема выборки позволило выявить еще более тесную корреляционную связь и повысить статистическую значимость коэффициента корреляции.

7.2. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена не требует нормальности распределения и линейной зависимости, может применяться как к количественным, так и к качественным порядковым переменным.

Для вычисления коэффициента корреляции Спирмена необходимо упорядочить данные по возрастанию и заменить их реальные значения рангами. *Рангом* значения называется его номер в упорядоченном ряду. Если в ряду встречаются одинаковые значения, то им следует присвоить ранг, равный среднему значению занимаемых ими мест.

Коэффициент корреляции Спирмена можно рассчитать по формуле:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n^3 - n},$$

где d – разность рангов каждого члена выборки.

Существуют таблицы критических значений коэффициента ранговой корреляции Спирмена для разных уровней значимости и объемов выборки (прил.; табл. 4). Если объем выборки больше 50, то можно применить критерий Стьюдента:

$$t = \frac{r_s}{\sqrt{\frac{1 - r_s^2}{n - 2}}}, \quad v = n - 2.$$

Пример. В исследовании сравнивались два способа оценки зубного налета: отделение налета с последующим взвешиванием и визуальная оценка. Результаты сопоставления этих способов представлены в табл. 26. Насколько, судя по этим данным, можно полагаться на визуальный способ оценки?

Таблица 26

Результаты измерения зубного налета

Визуальная оценка зубного налета, баллы	Сухой вес зубного налета, мг
25	2,7
32	1,2
45	2,7
60	2,1
60	3,5
65	2,8
68	3,7
78	8,9
80	5,8
83	4,0
100	5,1
110	5,1
120	4,8
125	5,8
140	11,7
143	8,5
143	11,1
145	7,1
148	14,2
153	12,2

Чтобы ответить на поставленный в задаче вопрос, необходимо рассчитать коэффициент корреляции между результатами двух способов оценки. Если он будет близок к единице, значит, между этими способами существует тесная связь, и можно ограничиться визуальной оценкой, не проводя взвешивание. Поскольку результаты, оцененные в баллах (в данном примере – визуальная оценка), обычно не подчиняются закону нормального распределения, следует воспользоваться непараметрическим коэффициентом корреляции.

Присвоим ранги результатам измерений:

Визуальная оценка зубного налета, баллы		Сухой вес зубного налета, мг		Разность рангов, d	d ²
Значение	Ранг	Значение	Ранг		
25	1	2,7	3,5	–2,5	6,25
32	2	1,2	1	1	1
45	3	2,7	3,5	–0,5	0,25
60	4,5	2,1	2	2,5	6,25
60	4,5	3,5	6	–1,5	2,25
65	6	2,8	5	1	1
68	7	3,7	7	0	0
78	8	8,9	16	–8	64
80	9	5,8	12,5	–3,5	12,25
83	10	4,0	8	2	4
100	11	5,1	10,5	0,5	0,25
110	12	5,1	10,5	1,5	2,25
120	13	4,8	9	4	16
125	14	5,8	12,5	1,5	2,25
140	15	11,7	18	–3	9
143	16,5	8,5	15	1,5	2,25
143	16,5	11,1	17	–0,5	0,25
145	18	7,1	14	4	16
148	19	14,2	20	–1	1
153	20	12,2	19	1	1
				Сумма d²	147,5

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \cdot 147,5}{20^3 - 20} = 0,89.$$

Критическое значение r_s для объема выборки $n=20$ и уровня значимости 0,05 составляет 0,447, для уровня значимости 0,001 – 0,696 (прил.;

табл. 4). Таким образом, мы выявили достаточно тесную статистически значимую корреляционную связь. Можно полагаться на визуальный способ оценивания зубного налета.

Задания для самостоятельного решения

7.1. Исследователи решили выяснить, есть ли связь между тяжестью серповидноклеточной анемии и адгезивностью эритроцитов (табл. 27). Было обследовано 20 больных. У каждого оценили тяжесть заболевания и коэффициент адгезии. Подтверждают ли эти данные гипотезу о связи между адгезивностью эритроцитов и тяжестью серповидноклеточной анемии?

Таблица 27

Оценка тяжести серповидноклеточной анемии
и коэффициента адгезии эритроцитов

<i>Тяжесть заболевания, баллы</i>	<i>Коэффициент адгезии</i>
0	1,0
0	1,4
1	1,0
1	1,0
1	1,9
1	2,0
1	2,5
1	3,0
2	2,0
2	3,2
3	3,0
3	3,2
3	6,3
4	2,7
5	3,0
5	5,0
5	17,0
6	5,2
9	19,8
11	25,0

7.2. Изучая проницаемость сосудов сетчатки, исследователи решили выяснить, связан ли этот показатель с электрической активностью сетчатки

(табл. 28). Позволяют ли полученные данные говорить о существовании связи? Оцените статистическую значимость коэффициента корреляции.

Таблица 28

Данные по проницаемости сосудов и электрической активности сетчатки

<i>Проницаемость сосудов сетчатки</i>	<i>Электрическая активность сетчатки</i>
19,5	0,0
15,0	38,5
13,5	59,0
23,3	97,4
6,3	119,2
2,5	129,5
13,0	198,7
1,8	248,7
6,5	318,0
1,8	438,5

7.3. Определите наличие и значимость корреляционной связи уровня вербальной агрессии и раздражимости в группе из 14 умственно отсталых детей (табл. 29).

Таблица 29

Результаты оценки уровня вербальной агрессии и раздражимости

<i>Вербальная агрессия</i>	<i>Раздражимость</i>
9	8
7	6
12	8
6	4
8	6
12	10
9	7
3	4
7	7
7	6
8	6
7	4
7	6
13	7
9	8

7.4. В группе из 20 пациентов с сахарным диабетом 1-го типа проводилось исследование связи дефицита витамина В₁₂ с повышенным уровнем депрессии (табл. 30). Оценка уровня депрессии проводилась с использованием госпитальной шкалы тревоги и депрессии (HADS). О наличии депрессивного состояния свидетельствовали значения 8–21 балл по шкале HADS. Рассчитайте соответствующий коэффициент корреляции и оцените его статистическую значимость.

Таблица 30

Результаты оценки содержания витамина В₁₂ и уровня депрессии

<i>Содержание витамина В₁₂ (п.моль/л)</i>	<i>Уровень депрессии (баллы)</i>
299	2
242	2
211	3
250	3
162	4
257	4
223	5
248	5
198	6
123	7
179	7
81	8
87	8
84	9
108	9
127	9
128	10
85	11
91	12
100	12

7.3. Бисериальные коэффициенты корреляции

Бисериальные коэффициенты корреляции применяются в том случае, если одна из переменных измерена в номинативной дихотомической шкале (принимает только одно из двух значений, например, 0 или 1). Если при этом вторая переменная является количественной, то рассчитывается точечный бисериальный коэффициент корреляции, а если вторая переменная относится к порядковому типу – рангово-бисериальный коэффициент корреляции.

Как и ранее рассмотренные коэффициенты, бисериальные коэффициенты корреляции изменяются в пределах от –1 до 1.

Точечный бисериальный коэффициент корреляции

Пусть переменная X – количественная, Y – дихотомическая. Точечный бисериальный коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r_{pb} = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_0}}{s_x} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_0}{n(n-1)}},$$

где $\overline{X_1}$ – среднее для тех значений X , у которых переменная Y равна 1;

$\overline{X_0}$ – среднее для тех значений X , у которых переменная Y равна 0;

s_x – стандартное отклонение для всех значений X ;

n_1 – количество объектов выборки со значением Y , равным 1;

n_0 – количество объектов выборки со значением Y , равным 0;

$n=n_1+n_0$ – объем выборки.

Проверка значимости точечного бисериального коэффициента корреляции выполняется с помощью критерия Стьюдента.

$$t = \frac{r_{pb}}{\sqrt{\frac{1-r_{pb}^2}{n-2}}}, \quad v = n-2.$$

Пример. В группе из 15 подростков изучалась зависимость между ростом и полом. Результаты измерения роста представлены в таблице:

Рост, см	Пол (1–мальчики, 0–девочки)
151	1
170	0
162	1
165	1
143	0
182	1
157	0
152	0
165	1
168	1
179	1
155	1
158	0
161	0
154	0

$n_1 = 8$ (количество мальчиков);

$n_0 = 7$ (количество девочек);

$n=n_1+n_0=15$;

$$\overline{X}_1 = \frac{151 + 162 + 165 + 182 + 165 + 168 + 179 + 155}{8} = 165,87 -$$

средний рост мальчиков.

$$\overline{X}_0 = \frac{170 + 143 + 157 + 152 + 158 + 161 + 154}{7} = 156,43 -$$

средний рост девочек.

В среднем мальчики в группе на 9,4 см выше девочек. Найдем стандартное отклонение для роста во всей группе и рассчитаем коэффициент корреляции.

$$s_x = 10,49$$

$$r_{pb} = \frac{165,87 - 156,43}{10,49} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 7}{15(15-1)}} = 0,465.$$

Оценим значимость найденного коэффициента корреляции:

$$t = \frac{r_{pb}}{\sqrt{\frac{1 - r_{pb}^2}{n - 2}}} = \frac{0,465}{\sqrt{\frac{1 - 0,465^2}{15 - 2}}} = 1,89.$$

Критическое значение t для уровня значимости 0,05 и 13 степеней свободы составляет 2,16, что больше рассчитанного. Таким образом, корреляция между ростом и полом не является статистически значимой.

Рангово-бисериальный коэффициент корреляции

В данном типе корреляции переменная X – порядковая, Y – дихотомическая. В этом случае коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r_{rb} = \frac{2}{n} \cdot (\overline{X}_1 - \overline{X}_0),$$

Где $\overline{X}_1$ – средний ранг объектов выборки, у которых переменная Y равна 1;

$\overline{X}_0$ – средний ранг объектов выборки, у которых переменная Y равна 0;

n – объем выборки.

Проверка значимости также выполняется с помощью критерия Стьюдента по формуле, приведенной выше.

Пример. Решим задачу о корреляции роста и пола с помощью расчета рангово-бисериального коэффициента. Проранжируем возраст, результаты занесем в таблицу:

Рост, см	Ранг для роста	Пол (1–мальчики, 0–девочки)
151	2	1
170	13	0
162	9	1
165	10,5	1
143	1	0
182	15	1
157	6	0
152	3	0
165	10,5	1
168	12	1
179	14	1
155	5	1
158	7	0
161	8	0
154	4	0

$$\overline{X}_1 = \frac{2 + 9 + 10,5 + 15 + 10,5 + 12 + 14 + 5}{8} = 9,75 -$$

средний ранг для роста мальчиков;

$$\overline{X}_0 = \frac{13 + 1 + 6 + 3 + 7 + 8 + 4}{8} = 6 -$$

средний ранг для роста девочек;

$$r_{rb} = \frac{2}{n} \cdot (\overline{X}_1 - \overline{X}_0) = \frac{2}{15} (9,75 - 6) = 0,5.$$

Выполним проверку значимости:

$$t = \frac{r_{pb}}{\sqrt{\frac{1 - r_{pb}^2}{n - 2}}} = \frac{0,5}{\sqrt{\frac{1 - 0,5^2}{15 - 2}}} = 2,08.$$

Данный коэффициент также не является статистически значимым. Различия в результатах решения одной и той же задачи разными методами объясняются тем, что при замене значений рангами мы теряем некоторую часть информации о распределении.

Поскольку рост человека является количественный признаком, распределенным в соответствии с нормальным законом (проверьте самостоятельно на данных примера), то в данном случае лучше полагаться на значение точечного бисериального коэффициента.

7.4. Коэффициент контингенции

Связь между качественными номинативными признаками называется сопряженностью. При корреляционном анализе дихотомических переменных используется коэффициент контингенции Пирсона.

Рассмотрим исследование степени тесноты связи между переменными X и Y, каждая из которых принимает одно из двух значений (1 или 0). Расчетная таблица коэффициента контингенции выглядит следующим образом:

X \ Y	1	0
1	a	b
0	c	d

Сумма частот a, b, c и d равна общему количеству объектов, участвующих в исследовании: $n=a+b+c+d$. Каждая из этих частот соответствует частоте выбора определенного значения того и другого признака. Например, a – это количество объектов исследования, для которых оба признака равны 1.

Коэффициент контингенции Пирсона рассчитывается по формуле:

$$\varphi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(b+d)(a+c)(c+d)}}$$

Значения φ изменяются от -1 до 1 , как и для всех остальных коэффициентов корреляции. Проверка значимости связи между переменными осуществляется с помощью критерия χ^2 . Между χ^2 и φ существует следующая связь:

$$\chi^2 = \varphi^2 \cdot n.$$

Рассчитанное значение χ^2 сравнивается с критическим (прил.; табл. 3) для числа степеней свободы $\nu=1$.

Пример. Изучается общественное мнение (положительное/ отрицательное) по важному вопросу. Распределение ответов респондентов, мужчин и женщин, приведено в таблице. Требуется определить наличие связи между полом и определенным мнением.

Мнение Пол	Положительное	Отрицательное
Мужчины	59	41
Женщины	36	64

Рассчитаем значение коэффициента контингенции:

$$\varphi = \frac{59 \cdot 64 - 36 \cdot 41}{\sqrt{(59+41)(41+64)(59+36)(36+64)}} = 0,23;$$

$$n = 59 + 41 + 36 + 64 = 200;$$

$$\chi^2 = 0,23^2 \cdot 200 = 10,58.$$

Критическое значение χ^2 для одной степени свободы и уровня значимости 0,05 составляет 3,84; для уровня 0,01 – 6,635. Таким образом, между полом и определенным мнением существует статистически значимая связь ($\alpha < 0,01$).

Задания для самостоятельного решения

7.5. У студентов вуза был измерен уровень потребности в достижении цели с помощью тест-опросника (результаты приведены в табл. 31). Требуется рассчитать бисериальную корреляцию (оба коэффициента) между уровнем потребности в достижениях и успеваемостью. Успеваемость оценивалась по дихотомической шкале: высокая (1) и низкая (0).

Таблица 31

Результаты оценки уровня потребности в достижении цели и успеваемость

Результаты теста (в баллах)	Успеваемость
57,4	высокая (1)
61,9	высокая (1)
25,3	низкая (0)
79,6	высокая (1)
24,3	низкая (0)
45,2	низкая (0)
43,1	низкая (0)
73,4	высокая (1)
52,5	низкая (0)
38,4	низкая (0)
66,5	высокая (1)
39,6	высокая (1)
55,4	высокая (1)
49,4	низкая (0)
72,1	высокая (1)

7.6. Рассчитайте коэффициент контингенции Пирсона и оцените его значимость для следующей задачи (изучение эффективности вакцинации):

Таблица 32

Результаты оценки эффективности вакцинации

Заболевание Вакцинация	<i>Заболели</i>	<i>Не заболели</i>
<i>Не проводилась</i>	25	75
<i>Проводилась</i>	5	95

8. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Доверительный интервал – это интервал, в котором находится неизвестная величина (с заданной вероятностью). Например, 95 % доверительный интервал для интересующей нас величины с вероятностью 95 % содержит эту величину.

Доверительные интервалы можно использовать для оценки статистической значимости различий, так как их расчет имеет общую базу с традиционными методами проверки гипотез. Можно сформулировать следующее *правило*: если $(100-\alpha)\%$ доверительный интервал для разности двух величин (например, средних значений) не содержит нуля, то различия статистически значимы с уровнем значимости α . Напротив, если этот интервал содержит ноль, то различия не являются статистически значимыми.

Способы определения доверительных интервалов для среднего и разности средних основаны на критерии Стьюдента, поэтому их можно применять только тогда, когда совокупность имеет хотя бы приблизительно нормальное распределение. Для расчета доверительных интервалов при оценке долей необходимо, чтобы значение $n_i \hat{p}$ было больше 5 для всех выборок.

Доверительный интервал для разности средних

Истинная разность средних $\mu_1 - \mu_2$ с вероятностью $(100-\alpha)\%$ находится в интервале :

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\alpha} s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\alpha} s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2},$$

где $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ – разность выборочных средних, $s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$ – стандартная ошибка разности выборочных средних, t_{α} – критическое значение t для уровня значимости α и числа степеней свободы $v = n_1 + n_2 - 2$. (Например, для 95 % доверительного интервала берется $t_{0,05}$. В этот интервал разность средних попадет в 95 % случаев).

Доверительный интервал для среднего

Истинное среднее μ с вероятностью $(100-\alpha)\%$ находится в интервале:

$$\bar{X} - t_{\alpha} s_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha} s_{\bar{X}},$$

где $\bar{X}$ – выборочное среднее, $s_{\bar{X}}$ – стандартная ошибка среднего, t_{α} – критическое значение t для уровня значимости α и числа степеней свободы $v = n - 1$.

Если объем выборки достаточно велик, то можно воспользоваться правилом «двух стандартных ошибок среднего»: доверительный интервал равен $\bar{X} \pm 2s_{\bar{X}}$, поскольку для выборок объемом 20 и более $t_{0,05} \approx 2$. Но если объем выборки меньше двадцати, то доверительный интервал при таком подходе окажется зауженным.

Доверительный интервал для разности долей

Истинная разность долей $p_1 - p_2$ с вероятностью $(100 - \alpha) \%$ находится в интервале:

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha} s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha} s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}.$$

где $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ – разность выборочных долей, $s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$ – стандартная ошибка разности долей, z_{α} – критическое значение стандартного нормального распределения. Для 95 % доверительного интервала $z_{\alpha} = z_{0,05} = 1,96$.

Доверительный интервал для доли

Истинная доля p с вероятностью $(100 - \alpha) \%$ находится в интервале:

$$\hat{p} - z_{\alpha} s_{\hat{p}} < p < \hat{p} + z_{\alpha} s_{\hat{p}},$$

где $\hat{p}$ – выборочная доля, $s_{\hat{p}}$ – стандартная ошибка доли.

Примеры.

1. Рассчитаем 95 % доверительный интервал для разности средних по данным задачи из примера раздела «Критерий Стьюдента».

Параметры выборок:

1) студенты, слушавшие музыку 1-го типа: $\bar{X}_1 = 23,4$; $s_1 = 2,64$.

2) студенты, слушавшие музыку 2-го типа: $\bar{X}_2 = 20,8$; $s_2 = 3,38$.

Объединенная дисперсия: $s^2 = 9,21$.

Стандартная ошибка разности средних:

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{9,21}{15} + \frac{9,21}{15}} = 1,11.$$

Число степеней свободы $v = n_1 + n_2 - 2 = 15 + 15 - 2 = 28$. $t_{0,05;28} = 2,05$.

$(23,4 - 20,8) - 2,05 \cdot 1,11 < \mu_1 - \mu_2 < (23,4 - 20,8) + 2,05 \cdot 1,11$

$0,325 < \mu_1 - \mu_2 < 4,875$.

Доверительный интервал не включает нуля, поэтому между группами есть статистически значимые различия ($\alpha = 0,05$).

2. Рассчитаем 95 % доверительные интервалы в задаче из примера № 2 к разделу «Дисперсионный анализ».

В задаче измерялась максимальная объемная скорость середины вдоха (л/с) у некурящих, активных и пассивных курильщиков. Рассчитаем по данным исследования значения стандартных ошибок среднего в каждой группе:

Группа	Численность, n	Среднее значение	Стандартное отклонение, s	Ошибка среднего, $S_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$
1. Некурящие, работающие в помещении, где не курят.	200	3,17	0,74	0,052
2. Некурящие, работающие в накуренном помещении.	201	2,72	0,71	0,050
3. Курящие небольшое количество сигарет.	199	2,63	0,73	0,052
4. Курящие среднее коли- чество сигарет.	202	2,29	0,7	0,049
5. Курящие большое коли- чество сигарет.	198	2,12	0,72	0,051

Значения ошибок близки, поэтому возьмем одинаковое значение для всех групп: 0,05. Поскольку объем выборок достаточно большой, то $t_{0,05} \approx 2$.

$$3,17 - 2 \cdot 0,05 < \mu_1 < 3,17 + 2 \cdot 0,05,$$

$$2,72 - 2 \cdot 0,05 < \mu_2 < 2,72 + 2 \cdot 0,05,$$

$$2,63 - 2 \cdot 0,05 < \mu_3 < 2,63 + 2 \cdot 0,05,$$

$$2,29 - 2 \cdot 0,05 < \mu_4 < 2,29 + 2 \cdot 0,05,$$

$$2,12 - 2 \cdot 0,05 < \mu_5 < 2,12 + 2 \cdot 0,05.$$

Таким образом, получаем следующие величины 95 % доверительных интервалов:

$$3,07 < \mu_1 < 3,27,$$

$$2,62 < \mu_2 < 2,82,$$

$$2,53 < \mu_3 < 2,73,$$

$$2,19 < \mu_4 < 2,39,$$

$$2,02 < \mu_5 < 2,22.$$

Обратите внимание на то, что доверительные интервалы для 2-ой и 3-ей групп, а также для 4-ой и 5-ой групп перекрываются. Это свидетельствует о том, что между этими группами нет значимых различий и их можно объединять в одну категорию при дальнейшем анализе.

Доверительный интервал для доли, равной 0 или 1

Если мы не наблюдаем в выборке объектов, обладающих изучаемым признаком, либо, наоборот, этим признаком обладают все объекты в выборке, это означает, что доля объектов будет равна 0 или 1. В этом случае мы не можем воспользоваться вышеприведенными формулами, поскольку стандартная ошибка доли будет равна 0.

$$s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0 \cdot (1 - 0)}{n}} = 0$$

либо

$$s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{1 \cdot (1 - 1)}{n}} = 0.$$

В этом случае для оценки доверительного интервала используются следующие формулы:

1) в случае доли, равной 0:

$$0 < p < \frac{z_{\alpha}^2}{n + z_{\alpha}^2};$$

2) в случае доли, равной 1:

$$\frac{n}{n + z_{\alpha}^2} < p < 1,$$

где n – объем выборки, z_{α}^2 – критическое значение стандартного нормального распределения для уровня значимости α . Можно воспользоваться последней строкой таблицы распределения Стьюдента: тогда для 95 % доверительного интервала $z_{0,05}=1,96$; для 99 % доверительного интервала $z_{0,01}=2,58$.

Пример. Изучалась концентрация гормона пролактина у пациентов с хроническими болями, использующих неопиоидные анальгетики. В группе из 21 больного не было обнаружено концентрации пролактина,

выходящей за пределы нормы. Каким будет 95 % доверительный интервал для доли больных с концентрацией пролактина, выходящей за пределы нормы, для всей совокупности?

Найдем доверительный интервал, для доли, равной 0:

$$0 < p < \frac{1,96^2}{21 + 1,96^2}$$
$$0 < p < 0,15$$

Таким образом, доля больных с концентрацией пролактина выше нормы в совокупности с вероятностью 95 % будет находиться в интервале от 0 до 15 %.

Задания для самостоятельного решения.

8.1. Рассчитать 95 % доверительный интервал для разности средних по данным задачи 2.1 (сравнение галотановой и морфиновой анестезии).

8.2. Рассчитать 95 % доверительные интервалы для средних по данным задачи 3.2 (сравнение эффективности нитропруссид натрия и дофамина).

8.3. Найти 95 % доверительные интервалы для числа летальных исходов при различных формах гнойной деструкции легких (задача 5.1).

8.4. Изучалась эффективность высокочастотной стимуляции нерва в качестве обезболивающего средства при удалении зуба. При включенном приборе в группе из 15 пациентов никто не чувствовал боли. Найдите 95 % доверительный интервал для доли пациентов, не чувствующих боли при применении данного средства, в совокупности.

9. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ

Непараметрические критерии не нуждаются в предположениях о типе распределения и могут применяться к признакам любого типа. Они основаны на рангах, то есть номерах, под которым будут стоять исходные данные в упорядоченном по возрастанию ряду (правила расстановки рангов нами уже рассмотрены на примере коэффициента корреляции Спирмена).

9.1. Критерий Манна–Уитни

Критерий Манна–Уитни является аналогом критерия Стьюдента для независимых выборок. Для его применения необходимо упорядочить значения для обеих групп вместе, заменить значения рангами, а затем найти сумму рангов для каждой группы.

Критические значения критерия Манна–Уитни приводятся в специальной таблице (прил.; табл. 5). В ней задается численность групп (меньшей и большей). Столбец критических значений содержит пары чисел T_1 и T_2 . Если сумма рангов меньшей группы $T_{\text{меньш}}$ не больше первого из них или не меньше второго (то есть $T_{\text{меньш}} \leq T_1$ или $T_{\text{меньш}} \geq T_2$), то различия статистически значимы.

При численности групп больше 8 распределение суммы рангов приближается к нормальному со средним значением:

$$\mu_{T_i} = \frac{n_i(n_1 + n_2 + 1)}{2}$$

и стандартным отклонением

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}},$$

где i – номер группы, n_i – численность группы. В таком случае величина

$$z_T = \frac{T_1 - \mu_{T_1}}{\sigma_T} = \frac{T_2 - \mu_{T_2}}{\sigma_T}$$

имеет стандартное нормальное распределение. Рассчитанное значение сравнивают с критическими значениями стандартного нормального распределения (последняя строка таблицы Стьюдента). Более точный результат обеспечивает поправка на непрерывность:

$$z_T = \frac{|T_i - \mu_{T_i}| - 0,5}{\sigma_T}.$$

Пример. Группа, 21 человек, нуждающихся в лечении клаустрофобии, была случайным образом разделена на две подгруппы: $n_1=11$ и $n_2=10$ (табл. 33). Члены первой группы получали лечение одного типа, второй – другого типа. В конце исследования независимая группа экспертов оценила поведение пациентов в стрессовых ситуациях клаустрофобии по 10-балльной шкале: 1 – очень низкий уровень клаустрофобии, 10 – очень высокий. В табл. 33 приведены средние значения оценок для каждого пациента. Является ли лечение первого типа более эффективным?

Заменим значения рангами, упорядочив значения для объединенной группы. Поскольку численность исследования 21 человек, то минимальное значение рангов – единица, максимальное – 21. Значение 5,5 встречается дважды и занимает 5 и 6 места в упорядоченном ряду. Поэтому его ранг равен $(5+6)/2$. Следующее значение 5,3 занимает 7 место и ему присваивается 7 ранг. Аналогично поступают и в случае значения 6,5. Если бы одинаковых значений было 3, то сумма занимаемых ими мест делилась бы на 3 и т. д.

Таблица 33

Оценки поведения пациентов в стрессовых ситуациях клаустрофобии

<i>Лечение 1-го типа</i>		<i>Лечение 2-го типа</i>	
Оценка	Ранг	Оценка	Ранг
4,6	1	5,2	5,5
4,7	2	5,3	7
4,9	3	5,4	8
5,1	4	5,6	10
5,2	5,5	6,2	13
5,5	9	6,3	14
5,8	11	6,8	17
6,1	12	7,7	19
6,5	15,5	8,0	20
6,5	15,5	8,1	21
7,2	18		
Сумма рангов	96,5		134,5

Итак, сумма рангов в первой группе меньше, что подтверждает гипотезу о большей эффективности первого типа лечения. Но являются ли различия между группами статистически значимыми? Поскольку численность групп больше 8, то рассчитаем значение z :

$$\mu_{T_1} = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{11(11 + 10 + 1)}{2} = 121;$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}} = \sqrt{\frac{11 \cdot 10(11 + 10 + 1)}{12}} = 14,2;$$

$$z_T = \frac{|T_1 - \mu_{T_1}| - 0,5}{\sigma_T} = \frac{|96,5 - 121| - 0,5}{14,2} = 1,69.$$

Критическое значение z для уровня значимости 0,05 составляет 1,96, что больше рассчитанного значения. Таким образом, между группами нет статистически значимых различий и нельзя говорить о превосходстве какого-либо метода лечения.

9.2. Критерий Уилкоксона

Критерий Уилкоксона является непараметрическим аналогом парного критерия Стьюдента. Принцип критерия: для каждого члена выборки вычисляют величину изменения признака. Все изменения упорядочивают по абсолютной величине (без учета знака). Затем рангам приписывают знак изменения и суммируют их. В результате получается значение критерия Уилкоксона – W .

Если значения первого и второго измерений для члена выборки совпадают, то есть изменение признака равно нулю, то такую пару значений исключают из дальнейшего рассмотрения, при этом объем выборки уменьшается на единицу.

Критические значения W находят по специальной таблице для критерия Уилкоксона, в зависимости от объема выборки (прил.; табл. 6). Если рассчитанное значение по абсолютной величине меньше критического, то изменения не являются статистически значимыми.

При $n > 20$ распределение W достаточно близко к нормальному со средним значением $\mu_W = 0$ и стандартным отклонением, которое вычисляется по формуле:

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}.$$

Далее рассчитывают значение $z_W = \frac{W}{\sigma_W}$, которое имеет стандартное

нормальное распределение. Вычисленное значение сравнивают с крити-

ческими значениями стандартного нормального распределения. Более точный результат обеспечивает поправка на непрерывность:

$$z_W = \frac{|W| - 0,5}{\sigma_W}.$$

Пример. Студенты отвечают на вопросы по теории вероятностей (табл. 34). Им нужно оценить вероятность события в каждом вопросе по шкале от 0 до 100 %. Преподавателя интересуют ответы на вопросы А и В, поскольку студенты, которые хорошо усвоили курс, должны были оценить вероятность события в вопросе А выше, чем в вопросе В. Результаты приведены в таблице. Для удобства ответы уже упорядочены по возрастанию абсолютной величины разности между ними.

Мы видим, что большая часть студентов действительно оценила вероятность события в вопросе А выше. Но будут ли эти различия статистически значимыми?

Таблица 34

Ответы студентов на вопросы по теории вероятностей

№ студента	Ответ А	Ответ В	Разность	Абсолютная величина разности	Ранг
1	78	78	0	0	–
2	24	24	0	0	–
3	64	62	2	2	1
4	45	48	–3	3	–2
5	64	68	–4	4	–3,5
6	52	56	–4	4	–3,5
7	30	25	5	5	5
8	50	44	6	6	6
9	64	56	8	8	7
10	50	40	10	10	8,5
11	78	68	10	10	8,5
12	22	36	–14	14	–10
13	84	68	16	16	11
14	40	20	20	20	12
15	90	58	32	32	13
16	72	32	40	40	14
				Сумма W	67

Для двух первых значений разность равна 0, поэтому исключаем их из дальнейшего рассмотрения. Теперь $n=14$. Критическое табличное значение критерия Уилкоксона для выборки объема 14 составляет 63 (уровень значимости 0,05), что меньше W, поэтому делаем заключение о ста-

стистической значимости различий между ответами на вопросы А и В. Для примера рассмотрим и использование z-критерия.

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} = \sqrt{\frac{14(14+1)(14+2)}{6}} = 23,66;$$

$$z_W = \frac{|W| - 0,5}{\sigma_W} = \frac{67 - 0,5}{23,66} = 2,8.$$

Критическое значение z для уровня 0,01 составляет 2,58. Рассчитанное значение больше – различия статистически значимы, уровень значимости 0,01.

9.3. Критерий Крускала–Уоллиса

Критерий Крускала–Уоллиса является непараметрическим аналогом дисперсионного анализа. Сначала все значения объединяют и упорядочивают по возрастанию. Каждому значению присваивается ранг. Затем вычисляют суммы рангов, относящихся к каждой группе, и для каждой группы вычисляют средний ранг.

Значением критерия Крускала–Уоллиса является величина:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum n_i (\bar{R}_i - \bar{R})^2,$$

где R_i – сумма рангов в i-ой группе; n_i – численность этой группы;

$\bar{R}_i = \frac{R_i}{n_i}$ – средний ранг в i-ой группе; $N = \sum n_i$ – общая численность

исследования, $\bar{R}$ – средний ранг для объединенной группы: $\bar{R} = \frac{N+1}{2}$.

Если группы не слишком малы, то распределение H хорошо приближается распределением χ^2 с числом степеней свободы $v=k-1$ (k – количество групп). В случае трех групп это применимо, если численность каждой группы не меньше пяти. Для четырех групп – если общая численность исследования не меньше десяти. Для меньших объемов исследования существует таблица значений критерия Крускала–Уоллиса (прил.; табл. 7).

Пример. При заболеваниях сетчатки повышается проницаемость ее сосудов. В исследовании сравнивалась проницаемость сосудов сетчатки в трех группах: у здоровых людей ($n_1=12$); у больных с поражениями сет-

чатки преимущественно в области центра ($n_2=12$); у больных с аномалиями и в центре, и на периферии ($n_3=9$). Результаты приведены в табл. 35. Различается ли проницаемость сосудов сетчатки в этих группах статистически значимо?

Таблица 35

Данные по проницаемости сосудов сетчатки

<i>Группа 1</i>		<i>Группа 2</i>		<i>Группа 3</i>	
Значение	Ранг	Значение	Ранг	Значение	Ранг
0,5	1	1,2	6,5	6,2	22
0,7	2,5	1,4	9	12,6	24
0,7	2,5	1,6	12	12,8	25
1,0	4,5	1,7	15	13,2	26
1,0	4,5	1,7	15	14,1	27
1,2	6,5	1,8	17	15,0	28
1,4	9	2,2	18,5	20,3	30
1,4	9	2,3	20	22,7	31,5
1,6	12	2,4	21	22,7	31,5
1,6	12	6,4	23		
1,7	15	19,0	29		
2,2	18,5	23,6	33		
<i>Сумма</i>	97	<i>Сумма</i>	219	<i>Сумма</i>	245
<i>Средний ранг</i>	8,08	<i>Средний ранг</i>	18,25	<i>Средний ранг</i>	27,2

Средний ранг для объединенной группы: $\bar{R} = \frac{N+1}{2} = 34/2=17$.

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{12}{N(N+1)} \sum n_i (\bar{R}_i - \bar{R})^2 = \\
 &= \frac{12}{33(33+1)} (12 \cdot (8,08 - 17)^2 + 12 \cdot (18,3 - 17)^2 + 9 \cdot (27,2 - 17)^2) = \\
 &= 20,426.
 \end{aligned}$$

Табличное значение χ^2 для двух степеней свободы и уровня значимости 0,05 составляет 5,991, для уровня значимости 0,001 – 13,816. Рассчитанное значение H больше, поэтому делаем вывод о статистической значимости различий между группами (уровень значимости меньше 0,001).

9.4. Критерий Фридмана

Критерий Фридмана – непараметрический аналог дисперсионного анализа повторных измерений. При применении этого критерия упорядочиваются значения у каждого члена группы, независимо от остальных.

Таким образом, количество упорядоченных рядов равно численности группы. Затем для каждого момента наблюдения вычисляется сумма рангов. Если разброс этих сумм велик – различия статистически значимы.

Критерий Фридмана вычисляется следующим образом. Сначала рассчитывается сумма рангов по каждому моменту наблюдения (R_i). Затем вычисляется сумма квадратов отклонений истинных сумм рангов от средней суммы рангов для всего исследования.

Если численность группы составляет n , то средняя сумма рангов равна $\bar{R} = \frac{n(k+1)}{2}$, где k – количество моментов наблюдения. Критерий рассчитывается следующим образом:

$$\chi_r^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum (R_i - \bar{R})^2.$$

При большой численности групп его величина приблизительно следует распределению χ^2 с числом степеней свободы $v=k-1$. Но при $k=3$ и $n \leq 9$; $k=4$ и $n \leq 4$ это приближение может быть слишком грубым и необходимо пользоваться табличными значениями.

Пример. Первичная легочная гипертензия – редкое заболевание, при котором повышается давление в артериях легких. Гидралазин – препарат, расширяющий сосуды, используется при гипертонической болезни. Исследователи предположили, что его можно использовать при первичной легочной гипертензии. Исследование включало четырех больных, у которых трижды измерялся сердечный выброс: перед лечением, через 48 часов и через 3–6 месяцев после лечения. Результаты помещены в табл. 36. Изменялось ли сердечное сопротивление статистически значимо?

Таблица 36

Данные по сердечному выбросу у больных первичной легочной гипертензией

Номер больного	До лечения		Через 48 ч после лечения		Через 3–6 месяцев после лечения	
	значение	ранг	значение	ранг	значение	ранг
1	3,5	1	8,6	3	5,1	2
2	3,3	1	5,4	2	8,6	3
3	4,9	1	8,8	3	6,7	2
4	3,6	1	5,6	3	5,0	2
Сумма рангов		4		11		9

$$\bar{R} = \frac{n(k+1)}{2} = \frac{4(3+1)}{2} = 8;$$

$$\chi_r^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum (R_i - \bar{R})^2 = \frac{12}{4 \cdot 3 \cdot (3+1)} ((4-8)^2 + (11-8)^2 + (9-8)^2) = 6,5.$$

По табл. критических значений критерия Фридмана (прил.; табл. 8) для $k=3$ и $n=4$ различия статистически значимы ($\chi^2_{\text{г}} = 6,5$ $\alpha=0,042$). Если воспользоваться таблицей для критерия χ^2 , то для двух степеней свободы и $\alpha=0,05$ $\chi^2=5,991$ – также обнаруживаем статистически значимые различия. Таким образом, по крайней мере, в один из моментов наблюдения сердечное сопротивление значимо отличается – препарат обладает эффективностью.

Задания для самостоятельного решения

9.1. Предсердный натрий-уретический гормон усиливает выведение натрия и воды почками. Исследовалась его роль в задержке натрия и воды при циррозе печени. Крысам вводили экстракт предсердия: одной группе — экстракт, полученный от здоровых крыс, другой – от крыс с циррозом печени. Регистрировали изменение выделения натрия с мочой (в процентах от исходного). Результаты представлены в табл. 37. Какой вывод можно сделать по результатам опыта?

Таблица 37

Данные по сердечному выбросу у больных первичной легочной гипертензией

<i>Экстракт от здоровых крыс</i>	<i>Экстракт от крыс с циррозом</i>
760	80
1000	80
1370	80
1680	210
1970	210
2420	320
3260	500
5000	610
5400	760
7370	760
	890
	890
	1870
	1950

9.2. У участников психологического эксперимента, моделирующего деятельность воздушного диспетчера, был измерен уровень вербального интеллекта с методики Д. Векслера. Было обследовано 26 юношей в возрасте от 18 до 24 лет, 14 из них были студенты физического факультета, 12 – студенты психологического факультета. Можно ли утверждать, что одна из групп превосходит другую по уровню вербального интеллекта. Данные представлены в табл. 38.

Таблица 38

Данные по уровню вербального интеллекта

Физический факультет	Психологический факультет
132	126
134	127
124	132
132	120
135	119
132	126
131	120
132	123
121	120
127	116
136	123
129	115
136	
136	

9.3. Психолог проводит групповой тренинг. Его задача – выяснить, будет ли эффективен данный вариант тренинга для снижения уровня тревожности участников. Для решения этой задачи с помощью специальной шкалы был дважды выявлен уровень тревожности у 17 участников до и после проведения тренинга. Результаты приведены в табл. 39.

Данные по уровню тревожности у участников эксперимента

<i>Уровень тревожности до тренинга</i>	<i>Уровень тревожности до тренинга</i>
30	34
39	39
35	26
34	33
40	34
35	40
22	25
22	23
32	33
23	24
16	15
34	27
33	35
34	37
40	23
38	26
28	22

Можно ли утверждать, что после тренинга наблюдается уменьшение уровня тревожности участников?

9.4. Решите задачу 4.1 с помощью соответствующего непараметрического критерия.

9.5. При поражении левой коронарной артерии кровоснабжение левого желудочка ухудшается. В покое это никак не проявляется, однако при физической нагрузке это приводит к накоплению крови в легких. При поражении правой коронарной артерии этого не происходит. Для подтверждения этой гипотезы было обследовано 33 человека: 9 здоровых (1-я группа) и 24 больных ишемической болезнью сердца, из них 5 с поражением только правой коронарной артерии (2-я группа) и 15 с поражением обеих коронарных артерий или только левой (3-я группа). Рассчитывали отношение кровенаполнения легких при физической нагрузке к кровенаполнению в покое. В 3-й группе этот показатель должен быть выше, чем в первых двух. Результаты представлены в табл. 40. Различаются ли группы между собой?

Таблица 40

Данные по отношению кровенаполнения легких при физической нагрузке к кровенаполнению в покое

<i>Группа 1</i>	<i>Группа 2</i>	<i>Группа 3</i>
0,83	0,86	0,98
0,89	0,92	1,02
0,91	1,00	1,03
0,93	1,02	1,04
0,94	1,20	1,05
0,97		1,06
0,97		1,07
0,98		1,22
1,02		1,07
		1,23
		1,13
		1,08
		1,32
		1,37
		1,18

9.6. Шести школьникам было предложено ответить на вопросы теста (табл. 41). Фиксировалось время решения каждого задания. Наблюдаются ли статистически значимые различия между временем решения первых трех заданий теста?

Таблица 41

Время решения тестов

<i>№ испытуемых</i>	<i>Время решения первого теста (с)</i>	<i>Время решения второго теста (с)</i>	<i>Время решения третьего теста (с)</i>
1	8	3	5
2	4	15	12
3	6	23	15
4	3	6	6
5	7	12	3
6	15	24	12

9.7. При ишемической болезни сердца курение может вызвать приступ стенокардии. Это связано с тем, что никотин увеличивает потребность миокарда в кислороде, а окись углерода связывается с гемоглобином, тем самым снижая поступление кислорода. Для изучения влияния

пассивного курения исследователи определяли у 12 больных ишемической болезнью сердца продолжительность физической нагрузки до развития приступа стенокардии. Измерения проводились 4 раза: до и после 2 часов отдыха на свежем воздухе и до и после 2 часов отдыха в комнате, где курили. Результаты приведены в табл. 42. Являются ли различия в продолжительности физической нагрузки статистически значимыми?

Таблица 42

Продолжительность физической нагрузки (в секундах)
до развития приступа стенокардии

<i>Свежий воздух</i>		<i>Пассивное курение</i>	
<i>До отдыха</i>	<i>После</i>	<i>До отдыха</i>	<i>После</i>
193	217	202	127
206	214	189	130
188	197	192	128
375	412	387	230
204	199	196	132
287	310	312	198
221	215	232	135
216	223	209	124
195	208	200	129
231	224	218	125

9.8. Три группы испытуемых обследовались по шкале выраженности астенического состояния (результаты в табл. 43). Можно ли утверждать, что группы различаются по уровню выраженности астении?

Таблица 43

Показатели выраженности астении

<i>Группа 1</i>	<i>Группа 2</i>	<i>Группа 3</i>
30	34	51
33	58	84
48	63	36
50	71	75
32	35	64
38	42	
	51	

9.9. В исследовании оценивалась эффективность препарата «Корвитол» (пролонгированная форма метопролола) в лечении больных артериальной гипертензией I–II степени. Было изучено влияние корвитола на величины артериального давления, частоту сердечных сокращений, уровень общего холестерина и глюкозы в сыворотке крови в группе из 6 больных.

Оценка проводилась перед началом приема препарата, через 30 и 60 суток приема. Оцените эффективность терапии по данным табл. 44.

Таблица 44

Результаты терапии препаратом «Корвитол»

Систолическое артериальное давление (мм. рт. ст.)

№	До приема	Через 30 сут	Через 60 сут
1	163,3	132,8	129,3
2	164,2	143,2	143
3	157,8	134,2	133,2
4	151,2	136,7	135,8
5	171,2	138,6	140,1
6	174,2	145,7	146,5

Частота сердечных сокращений (уд/мин)

№	До приема	Через 30 сут	Через 60 сут
1	81,6	81	66,8
2	78,2	74,3	61,2
3	85,8	77,4	68
4	79,1	74,8	67,2
5	83,4	72,5	69,1
6	76,3	73,4	67

Общий холестерин (ммоль/л)

№	До приема	Через 30 сут	Через 60 сут
1	6,3	6,1	5,8
2	4,9	4,9	5
3	5,3	5,1	4,8
4	5,1	5,3	5,9
5	5,1	5,4	5,2
6	6,2	6	6

Концентрация глюкозы в сыворотке крови (ммоль/л)

№	До приема	Через 30 сут	Через 60 сут
1	2,5	3	3,4
2	3,3	3,6	4,8
3	4,5	4,1	4,1
4	3,7	4,2	3,4
5	3,7	3,1	3,6
6	4	3,4	2,5

ТЕМАТИКА КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

Тематика контрольных работ связана с содержанием практических занятий. При выполнении контрольных работ следует пользоваться пояснениями и рекомендациями к практическим занятиям. Отчетом по выполнению контрольных работ являются письменные решения задач.

1. Определите с помощью критерия Стьюдента статистическую значимость различий между двумя группами (предварительно выполните проверку принадлежности выборок к совокупности с нормальным распределением):

- | | | |
|--|---|----------------------------------|
| 1.1. 2; 4; 6; 8; 5; 3; 3; 5; 7; 4; 4; 1 | и | 9; 3; 1; 9; 5; 6; 2; 6; 5; 5; 4 |
| 1.2. 10; 7; 7; 7; 3; 10; 3; 9; 8; 9; 4; 3 | и | 6; 9; 6; 4; 4; 7; 4; 8; 7; 5; 9 |
| 1.3. 3; 1; 1; 2; 4; 6; 3; 3; 3; 8; 4; 2 | и | 3; 9; 7; 4; 6; 1; 8; 1; 5; 8; 5 |
| 1.4. 4; 7; 2; 5; 2; 1; 1; 3; 2; 4; 2; 1 | и | 6; 9; 10; 2; 9; 1; 1; 8; 6; 4; 6 |
| 1.5. 2; 4; 6; 8; 5; 3; 3; 5; 7; 4; 4; 1 | и | 6; 9; 10; 2; 9; 1; 1; 8; 6; 4; 6 |
| 1.6. 10; 7; 7; 7; 3; 10; 3; 9; 8; 9; 4; 3 | и | 9; 3; 1; 9; 5; 6; 2; 6; 5; 5; 4 |
| 1.7. 3; 1; 1; 2; 4; 6; 3; 3; 3; 8; 4; 2 | и | 6; 9; 6; 4; 4; 7; 4; 8; 7; 5; 9 |
| 1.8. 4; 7; 2; 5; 2; 1; 1; 3; 2; 4; 2; 1 | и | 3; 9; 7; 4; 6; 1; 8; 1; 5; 8; 5 |

2. Решите следующие задачи с помощью дисперсионного анализа

2.1. Изучали продолжительность развития эмбрионов (в днях) у кроликов разных пород. Определить, влияет ли породность на продолжительность развития отдельных крольчат.

Породы	n_i	Среднее значение	Стандартное отклонение
Альбиносы	12	32	1,7
Шиншиллы	10	31	1,1
Голландские	13	30	0,6

2.2. Сравнивалась эффективность нитропруссид натрия и дофамина в опытах на собаках с инфарктом миокарда. Инфаркт миокарда вызывали перевязкой коронарной артерии, после чего вводили препарат. Взвешивали пораженный участок миокарда, результат выражали в процентах от веса левого желудочка. Можно ли считать различия между группами статистически значимыми?

Группа	n_i	Среднее значение	Стандартное отклонение
Контроль	29	14	2,3
Дофамин	33	10	3,0
Нитропруссид	28	8	2,1

2.3. Определялось содержание тромбоцитов в крови взрослых и грудных детей разного возраста. Можно ли говорить о существовании значимых различий в количестве тромбоцитов?

Группа	n_i	Среднее значение	Стандартное отклонение
Взрослые	20	250	16
Дети в возрасте 4 суток	15	190	36
Дети в возрасте 1 месяца	18	220	34

2.4. Сравнивалась продолжительность физической нагрузки (в секундах) до развития приступа стенокардии у больных ИБС после воздействия компонентов табачного дыма. Можно ли считать различия между группами статистически значимыми?

Группа	n_i	Среднее значение	Стандартное отклонение
Контроль	18	244	43
Курение безникотиновых сигарет	12	133	22
Вдыхание окиси углерода	13	159	30

3. Решите следующие задачи с помощью χ^2 -критерия

3.1. Изучалась эффективность высокочастотной стимуляции нерва в качестве обезболивающего средства при удалении зуба. Все больные подключались к прибору, но в одних случаях он работал, в других был выключен. Ни стоматолог, ни больной не знали, включен ли прибор. Позволяют ли следующие данные считать высокочастотную стимуляцию нерва действенным обезболивающим средством?

	Прибор включен	Прибор выключен
Боли нет	25	5
Боль есть	4	16

3.2. При вспышке гастроэнтерита в маленьком городке исследователи предположили, что источником инфекции была водопроводная вода. Они исследовали зависимость между количеством выпитой воды и числом заболевших. Какие выводы можно сделать из приводимых данных?

Количество выпитой воды, стаканов в день	Число заболевших	Число не заболевших
Менее 1	41	120
От 1 до 4	260	253

3.3. Одна из причин инсульта – окклюзия сонной артерии. Чтобы выяснить, какое лечение – медикаментозное или хирургическое – дает в этом случае лучшие результаты, сравнили долгосрочный прогноз у леченных двумя методами. Можно ли говорить о превосходстве одного из видов лечения?

Лечение	Повторный инсульт или смерть	
	Да	Нет
Хирургическое	40	35
Медикаментозное	50	21

3.4. Сравнивалась эффективность двух антибактериальных препаратов при рецидивирующей инфекции мочевых путей. При выявлении бактериурии после курса лечения констатировали рецидив. Есть ли основания говорить о разной эффективности препаратов?

	Рецидив	
	Да	Нет
Ампициллин	25	10
Сульфаметоксазол	20	23

4. Найдите уравнение регрессии для связи суточного потребления азота (X) и азотистого баланса (Y). Изобразите результаты на графике. Оцените статистическую значимость коэффициента наклона b.

4.1. X: 49 47 50 76 77 99 98 103 118 105 100 98
Y: -30 -22 -29 -22 -15 -10 -11 -10 -1 -4 -13 -14

4.2. X: 32 31 32 51 53 51 54 74 72 74 98 97
Y: -32 -20 -17 -10 -20 -18 -21 4 -16 -14 6 -7

4.3. X: 45 48 50 52 49 77 89 84 100 105 99 97
Y: -22 -21 -24 -23 -19 -14 -10 -9 -11 -2 -4 -5

4.4. X: 33 30 31 49 54 50 61 73 69 82 102 97
Y: -31 -22 -19 -11 -13 -17 -15 2 -16 -9 -7 1

4.5. X: 49 47 50 76 77 99 98 103 118 105 100 98
Y: -32 -20 -17 -10 -20 -18 -21 4 -16 -14 6 -7

4.6. X: 32 31 32 51 53 51 54 74 72 74 98 97
Y: -30 -22 -29 -22 -15 -10 -11 -10 -1 -4 -13 -14

4.7. X: 33 30 31 49 54 50 61 73 69 82 102 97
Y: -22 -21 -24 -23 -19 -14 -10 -9 -11 -2 -4 -5

4.8. X: 45 48 50 52 49 77 89 84 100 105 99 97
Y: -31 -22 -19 -11 -13 -17 -15 2 -16 -9 -7 1

5. Определите коэффициент корреляции между частотой пульса (X) и максимальным артериальным давлением (Y) у здоровых детей в возрасте до 5 лет. Оцените статистическую значимость коэффициента корреляции.

5.1. X: 88 100 85 94 83 92 95 100 96 98
Y: 90 95 95 102 95 100 102 105 103 102

5.2. X: 118 107 123 107 103 100 85 95 82 100
Y: 98 99 110 105 105 95 96 101 94 104

5.3. X: 99 118 113 112 108 105 111 109 105 107
Y: 94 110 98 108 101 95 105 115 98 96

5.4. X: 100 102 90 100 78 87 90 103 99 110
Y: 100 95 97 98 94 98 100 105 100 102

5.5. X: 88 100 85 94 83 92 95 100 96 98
Y: 100 95 97 98 94 98 100 105 100 102

5.6. X: 118 107 123 107 103 100 85 95 82 100
Y: 94 110 98 108 101 95 105 115 98 96

5.7. X: 99 118 113 112 108 105 111 109 105 107
Y: 98 99 110 105 105 95 96 101 94 104

5.8. X: 100 102 90 100 78 87 90 103 99 110
Y: 90 95 95 102 95 100 102 105 103 102

6. Найдите в любом из научных журналов медико-биологической тематики пример статистической обработки результатов исследования и проанализируйте применяемые методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гланц С.* Медико-биологическая статистика: пер. с англ. – М.: Практика, 1999. – 459 с.
2. *Жижин К. С.* Медицинская статистика: учебное пособие. – Ростов на Дону : Феникс, 2007. – 160 с.
3. *Зайцев В. М.* Прикладная медицинская статистика / В. М. Зайцев, В. Г. Лифляндский, В. И. Маринкин. – СПб: ООО «Издательство ФОЛИАНТ», 2003. – 432 с.
4. *Медик В. А.* Статистика в медицине и биологии: руководство: в 2-х т. / В. А. Медик, М. С. Токмачев, Б. Б. Фишман; под ред. Ю. М. Комарова – М.: Медицина, 2000. – Т.1. –Теоретическая статистика. – 412 с.
5. *Петри А.* Наглядная медицинская статистика: пер. с англ. / А. Петри, К. Сэбин; под ред. В. П. Леонова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ГЭОТАР-Медиа, 2009. – 168 с.
6. *Юнкеров В. И.* Математико-статистическая обработка данных медицинских исследований / В. И. Юнкеров, С. Г. Григорьев. – СПб.: ВМедА, 2002. – 266 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица 1

Критические значения t (двусторонний вариант)

v	Уровень значимости α								
	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	127,321	318,289	636,578
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,328	31,600
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,214	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,894	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,689
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,660
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
31	0,682	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744	3,022	3,375	3,633
32	0,682	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,015	3,365	3,622
33	0,682	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733	3,008	3,356	3,611
34	0,682	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,002	3,348	3,601
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	2,996	3,340	3,591
36	0,681	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	2,990	3,333	3,582
37	0,681	1,305	1,687	2,026	2,431	2,715	2,985	3,326	3,574
38	0,681	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	2,980	3,319	3,566
39	0,681	1,304	1,685	2,023	2,426	2,708	2,976	3,313	3,558

Таблица 1 (продолжение)

	Уровень значимости α								
v	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971	3,307	3,551
42	0,680	1,302	1,682	2,018	2,418	2,698	2,963	3,296	3,538
44	0,680	1,301	1,680	2,015	2,414	2,692	2,956	3,286	3,526
46	0,680	1,300	1,679	2,013	2,410	2,687	2,949	3,277	3,515
48	0,680	1,299	1,677	2,011	2,407	2,682	2,943	3,269	3,505
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	2,937	3,261	3,496
52	0,679	1,298	1,675	2,007	2,400	2,674	2,932	3,255	3,488
54	0,679	1,297	1,674	2,005	2,397	2,670	2,927	3,248	3,480
56	0,679	1,297	1,673	2,003	2,395	2,667	2,923	3,242	3,473
58	0,679	1,296	1,672	2,002	2,392	2,663	2,918	3,237	3,466
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	2,915	3,232	3,460
62	0,678	1,295	1,670	1,999	2,388	2,657	2,911	3,227	3,454
64	0,678	1,295	1,669	1,998	2,386	2,655	2,908	3,223	3,449
66	0,678	1,295	1,668	1,997	2,384	2,652	2,904	3,218	3,444
68	0,678	1,294	1,668	1,995	2,382	2,650	2,902	3,214	3,439
70	0,678	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	2,899	3,211	3,435
72	0,678	1,293	1,666	1,993	2,379	2,646	2,896	3,207	3,431
74	0,678	1,293	1,666	1,993	2,378	2,644	2,894	3,204	3,427
76	0,678	1,293	1,665	1,992	2,376	2,642	2,891	3,201	3,423
78	0,678	1,292	1,665	1,991	2,375	2,640	2,889	3,198	3,420
80	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	2,887	3,195	3,416
90	0,677	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	2,878	3,183	3,402
100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	2,871	3,174	3,390
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	2,860	3,160	3,373
140	0,676	1,288	1,656	1,977	2,353	2,611	2,852	3,149	3,361
160	0,676	1,287	1,654	1,975	2,350	2,607	2,847	3,142	3,352
180	0,676	1,286	1,653	1,973	2,347	2,603	2,842	3,136	3,345
200	0,676	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	2,838	3,131	3,340
∞	0,675	1,282	1,645	1,960	2,327	2,576	2,808	3,091	3,291

Таблица 2

Критические значения F для $\alpha=0,05$ (верхняя строка) и $\alpha=0,01$ (нижняя строка)

		Число степеней свободы для числителя ($\nu_{\text{числ}}$)													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Число степеней свободы для знаменателя ($\nu_{\text{знам}}$)	1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	245
	2	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107	6126	6143
	3	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,42	19,42
	4	98,5	99,0	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,41	99,42	99,42	99,43
	5	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71
	6	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05	26,98	26,92
	7	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,89	5,87
	8	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	14,31	14,25
	9	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,66	4,64
	10	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89	9,82	9,77
	11	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98	3,96
	12	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,66	7,60
	13	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,53
	14	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,41	6,36
	15	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24
	16	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67	5,61	5,56
	17	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03
	18	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	5,05	5,01
	19	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86
	20	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71	4,65	4,60
	21	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74
	22	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,34	4,29
	23	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64
	24	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,10	4,05
	25	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58	2,55
	26	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,91	3,86
	27	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51	2,48
	28	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,75	3,70
	29	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,45	2,42
	30	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67	3,61	3,56

Таблица 2 (продолжение)

		Число степеней свободы для числителя (ν _{числ})													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Число степеней свободы для знаменателя (ν _{знам})	16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40	2,37
		8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55	3,50	3,45
	17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,33
		8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46	3,40	3,35
	18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,29
		8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37	3,32	3,27
	19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26
		8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30	3,24	3,19
	20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22
		8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13
	21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,22	2,20
		8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17	3,12	3,07
	22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,20	2,17
		7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12	3,07	3,02
	23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,18	2,15
		7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07	3,02	2,97
	24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,15	2,13
		7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03	2,98	2,93
	25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,14	2,11
		7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99	2,94	2,89
	26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09
		7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96	2,90	2,86
	27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,10	2,08
		7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,99	2,93	2,87	2,82
	28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,06
		7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90	2,84	2,79
	29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,08	2,05
		7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,93	2,87	2,81	2,77
	30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06	2,04
		7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84	2,79	2,74
	31	4,16	3,30	2,91	2,68	2,52	2,41	2,32	2,25	2,20	2,15	2,11	2,08	2,05	2,03
		7,53	5,36	4,48	3,99	3,67	3,45	3,28	3,15	3,04	2,96	2,88	2,82	2,77	2,72

Таблица 2 (продолжение)

		Число степеней свободы для числителя ($\nu_{\text{числ}}$)													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Число степеней свободы для знаменателя ($\nu_{\text{знам}}$)	32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,10	2,07	2,04	2,01
		7,50	5,34	4,46	3,97	3,65	3,43	3,26	3,13	3,02	2,93	2,86	2,80	2,74	2,70
	33	4,14	3,28	2,89	2,66	2,50	2,39	2,30	2,23	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	2,00
		7,47	5,31	4,44	3,95	3,63	3,41	3,24	3,11	3,00	2,91	2,84	2,78	2,72	2,68
	34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05	2,02	1,99
		7,44	5,29	4,42	3,93	3,61	3,39	3,22	3,09	2,98	2,89	2,82	2,76	2,70	2,66
	35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,07	2,04	2,01	1,99
		7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88	2,80	2,74	2,69	2,64
	36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,07	2,03	2,00	1,98
		7,40	5,25	4,38	3,89	3,57	3,35	3,18	3,05	2,95	2,86	2,79	2,72	2,67	2,62
	37	4,11	3,25	2,86	2,63	2,47	2,36	2,27	2,20	2,14	2,10	2,06	2,02	2,00	1,97
		7,37	5,23	4,36	3,87	3,56	3,33	3,17	3,04	2,93	2,84	2,77	2,71	2,65	2,61
	38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02	1,99	1,96
		7,35	5,21	4,34	3,86	3,54	2,32	3,15	3,02	2,92	2,83	2,75	2,69	2,64	2,59
	39	4,09	3,24	2,85	2,61	2,46	2,34	2,26	2,19	2,13	2,08	2,04	2,01	1,98	1,95
		7,33	5,19	4,33	3,84	3,53	3,30	3,14	3,01	2,90	2,81	2,74	2,68	2,62	2,58
	40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,97	1,95
		7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66	2,61	2,56
	41	4,08	3,23	2,83	2,60	2,44	2,33	2,24	2,17	2,12	2,07	2,03	2,00	1,97	1,94
		7,30	5,16	4,30	3,81	3,50	3,28	3,11	2,98	2,87	2,79	2,71	2,65	2,60	2,55
	42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	2,03	1,99	1,96	1,94
		7,28	5,15	4,29	3,80	3,49	3,27	3,10	2,97	2,86	2,78	2,70	2,64	2,59	2,54
	43	4,07	3,21	2,82	2,59	2,43	2,32	2,23	2,16	2,11	2,06	2,02	1,99	1,96	1,93
		7,26	5,14	4,27	3,79	3,48	3,25	3,09	2,96	2,85	2,76	2,69	2,63	2,57	2,53
	44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98	1,95	1,92
		7,25	5,12	4,26	3,78	3,47	3,24	3,08	2,95	2,84	2,75	2,68	2,62	2,56	2,52
	45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	2,01	1,97	1,94	1,92
		7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	3,07	2,94	2,83	2,74	2,67	2,61	2,55	2,51
	50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,92	1,89
		7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,63	2,56	2,51	2,46
	55	4,02	3,16	2,77	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,88
		7,12	5,01	4,16	3,68	3,37	3,15	2,98	2,85	2,75	2,66	2,59	2,53	2,47	2,42

Таблица 2 (продолжение)

		Число степеней свободы для числителя ($\nu_{\text{меж}}$)													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Число степеней свободы для знаменателя ($\nu_{\text{внутр}}$)	60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,89	1,86
		7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50	2,44	2,39
	65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,03	1,98	1,94	1,90	1,87	1,85
		7,04	4,95	4,10	3,62	3,31	3,09	2,93	2,80	2,69	2,61	2,53	2,47	2,42	2,37
	70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89	1,86	1,84
		7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,91	2,78	2,67	2,59	2,51	2,45	2,40	2,35
	80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,84	1,82
		6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,42	2,36	2,31
	90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94	1,90	1,86	1,83	1,80
		6,93	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,84	2,72	2,61	2,52	2,45	2,39	2,33	2,29
	100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85	1,82	1,79
		6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,43	2,37	2,31	2,27
	110	3,93	3,08	2,69	2,45	2,30	2,18	2,09	2,02	1,97	1,92	1,88	1,84	1,81	1,78
		6,87	4,80	3,96	3,49	3,19	2,97	2,81	2,68	2,57	2,49	2,41	2,35	2,30	2,25
	120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,80	1,78
		6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34	2,28	2,23
	130	3,91	3,07	2,67	2,44	2,28	2,17	2,08	2,01	1,95	1,90	1,86	1,83	1,80	1,77
		6,83	4,77	3,94	3,47	3,16	2,94	2,78	2,65	2,55	2,46	2,39	2,32	2,27	2,22
	140	3,91	3,06	2,67	2,44	2,28	2,16	2,08	2,01	1,95	1,90	1,86	1,82	1,79	1,76
		6,82	4,76	3,92	3,46	3,15	2,93	2,77	2,64	2,54	2,45	2,38	2,31	2,26	2,21
	160	3,90	3,05	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,81	1,78	1,75
		6,80	4,74	3,91	3,44	3,13	2,92	2,75	2,62	2,52	2,43	2,36	2,30	2,24	2,20
	180	3,89	3,05	2,65	2,42	2,26	2,15	2,06	1,99	1,93	1,88	1,84	1,81	1,77	1,75
		6,78	4,73	3,89	3,43	3,12	2,90	2,74	2,61	2,51	2,42	2,35	2,28	2,23	2,18
	200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80	1,77	1,74
		6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27	2,22	2,17

Таблица 3

Критические значения χ^2

v	0,50	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828
2	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816
3	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266
4	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467
5	4,351	6,626	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750	20,515
6	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458
7	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322
8	7,344	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,124
9	8,343	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877
10	9,342	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588
11	10,341	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264
12	11,340	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300	32,909
13	12,340	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528
14	13,339	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123
15	14,339	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697
16	15,338	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252
17	16,338	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	40,790
18	17,338	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	42,312
19	18,338	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,820
20	19,337	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	45,315
21	20,337	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	46,797
22	21,337	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	48,268
23	22,337	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181	49,728
24	23,337	28,241	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559	51,179
25	24,337	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	52,620
26	25,336	30,435	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	54,052
27	26,336	31,528	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645	55,476
28	27,336	32,020	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993	56,892
29	28,336	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336	58,301
30	29,336	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	59,703
31	30,336	35,887	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003	61,098
32	31,336	36,973	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328	62,487
33	32,336	38,058	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648	63,870
34	33,336	39,141	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964	65,247
35	34,336	40,223	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275	66,619
36	35,336	41,304	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581	67,985
37	36,336	42,383	48,363	52,192	55,668	59,893	62,883	69,346
38	37,335	43,462	49,513	53,384	56,896	61,162	64,181	70,703
39	38,335	44,539	50,660	54,572	58,120	62,428	65,476	72,055
40	39,335	45,616	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766	73,402

Таблица 3 (продолжение)

v	0,50	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
41	40,335	46,692	52,949	56,942	60,561	64,950	68,053	74,745
42	41,335	47,766	54,090	58,124	61,777	66,206	69,336	76,084
43	42,335	48,840	55,230	59,304	62,990	67,459	70,616	77,419
44	43,335	49,913	56,369	60,481	64,201	68,710	71,893	78,750
45	44,335	50,985	57,505	61,656	65,410	69,957	73,166	80,077
46	45,335	52,056	58,641	62,830	66,617	71,201	74,437	81,400
47	46,335	53,127	59,774	64,001	67,821	72,443	75,704	82,720
48	47,335	54,196	60,907	65,171	69,023	73,683	76,969	84,037
49	48,335	55,265	62,038	66,339	70,222	74,919	78,231	85,351
50	49,335	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490	86,661

Таблица 4

Критические значения коэффициента ранговой корреляции Спирмена

n	Уровень значимости α								
	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
4	0,600	1,000	1,000						
5	0,500	0,800	0,900	1,000	1,000				
6	0,371	0,657	0,829	0,886	0,943	1,000	1,000		
7	0,321	0,571	0,714	0,786	0,893	0,929	0,964	1,000	1,000
8	0,310	0,524	0,643	0,738	0,833	0,881	0,905	0,952	0,976
9	0,267	0,483	0,600	0,700	0,783	0,833	0,867	0,917	0,933
10	0,248	0,455	0,564	0,648	0,745	0,794	0,830	0,879	0,903
11	0,236	0,427	0,536	0,618	0,709	0,755	0,800	0,845	0,873
12	0,217	0,406	0,503	0,587	0,678	0,727	0,769	0,818	0,846
13	0,209	0,385	0,484	0,560	0,648	0,703	0,747	0,791	0,824
14	0,200	0,367	0,464	0,538	0,626	0,679	0,723	0,771	0,802
15	0,189	0,354	0,446	0,521	0,604	0,654	0,700	0,750	0,779
16	0,182	0,341	0,429	0,503	0,582	0,635	0,679	0,729	0,762
17	0,176	0,328	0,414	0,485	0,566	0,615	0,662	0,713	0,748
18	0,170	0,317	0,401	0,472	0,550	0,600	0,643	0,695	0,728
19	0,165	0,309	0,391	0,460	0,535	0,584	0,628	0,677	0,712
20	0,161	0,299	0,380	0,447	0,520	0,570	0,612	0,662	0,696
21	0,156	0,292	0,370	0,435	0,508	0,556	0,599	0,648	0,681
22	0,152	0,284	0,361	0,425	0,496	0,544	0,586	0,634	0,667
23	0,148	0,278	0,353	0,415	0,486	0,532	0,573	0,622	0,654
24	0,144	0,271	0,344	0,406	0,476	0,521	0,562	0,610	0,642
25	0,142	0,265	0,337	0,398	0,466	0,511	0,551	0,598	0,630
26	0,138	0,259	0,331	0,390	0,457	0,501	0,541	0,587	0,619
27	0,136	0,255	0,324	0,382	0,448	0,491	0,531	0,577	0,608
28	0,133	0,250	0,317	0,375	0,440	0,483	0,522	0,567	0,598
29	0,130	0,245	0,312	0,368	0,433	0,475	0,513	0,558	0,589
30	0,128	0,240	0,306	0,362	0,425	0,467	0,504	0,549	0,580
31	0,126	0,236	0,301	0,356	0,418	0,459	0,496	0,541	0,571
32	0,124	0,232	0,296	0,350	0,412	0,452	0,489	0,533	0,563
33	0,121	0,229	0,291	0,345	0,405	0,446	0,482	0,525	0,554
34	0,120	0,225	0,287	0,340	0,399	0,439	0,475	0,517	0,547
35	0,118	0,222	0,283	0,335	0,394	0,433	0,468	0,510	0,539
36	0,116	0,219	0,279	0,330	0,388	0,427	0,462	0,504	0,533
37	0,114	0,216	0,275	0,325	0,383	0,421	0,456	0,497	0,526
38	0,113	0,212	0,271	0,321	0,378	0,415	0,450	0,491	0,519
39	0,111	0,210	0,267	0,317	0,373	0,410	0,444	0,485	0,513
40	0,110	0,207	0,264	0,313	0,368	0,405	0,439	0,479	0,507

Таблица 5

Критические значения критерия Манна-Уитни

Численность группы		Приблизительный уровень значимости α					
меньшей	большей	0,05			0,01		
		Критические значения		α	Критические значения		α
3	4	6	18	0,057			
	5	6	21	0,036			
	5	7	20	0,071			
	6	7	23	0,048	6	24	0,024
	7	7	26	0,033	6	27	0,017
	7	8	25	0,067			
4	8	8	28	0,042	8	30	0,012
	4	11	25	0,057	10	26	0,026
	5	11	29	0,032	10	30	0,016
	5	12	28	0,063			
	6	12	32	0,038	10	34	0,010
	7	13	35	0,042	10	38	0,012
	8	14	38	0,048	11	41	0,008
5	8				12	40	0,016
	5	17	38	0,032	15	40	0,008
	5	18	37	0,056	16	39	0,016
	6	19	41	0,052	16	44	0,010
	7	20	45	0,048	17	48	0,010
6	8	21	49	0,045	18	52	0,011
	6	26	52	0,041	23	55	0,009
	6				24	54	0,015
	7	28	56	0,051	24	60	0,008
	7				25	59	0,014
	8	29	61	0,043	25	65	0,008
7	8	30	60	0,059	26	64	0,013
	7	37	68	0,053	33	72	0,011
	8	39	73	0,054	34	78	0,009
8	8	49	87	0,050	44	92	0,010

Таблица 6

Критические значения критерия Уилкоксона

n	W	α	n	W	α
5	15	0,062	13	65 57	0,022 0,048
6	21 19	0,032 0,062	14	73 63	0,020 0,050
7	28 24	0,016 0,046	15	80 70	0,022 0,048
8	32 28	0,024 0,054	16	88 76	0,022 0,050
9	39 33	0,020 0,054	17	97 83	0,020 0,050
10	45 39	0,020 0,048	18	105 91	0,020 0,048
11	52 44	0,018 0,054	19	114 98	0,020 0,050
12	58 50	0,020 0,052	20	124 106	0,020 0,048

n – объем выборки; α – уровень значимости.

Таблица 7

Критические значения критерия Крускала-Уоллиса
(p – уровень значимости)

Объемы выборок					Объемы выборок					Объемы выборок				
n_1	n_2	n_3	H	p	n_1	n_2	n_3	H	p	n_1	n_2	n_3	H	p
2	1	1	2,7000	0,6	4	4	1	6,6667	0,01	5	4	1	6,9545	0,008
2	2	1	3,6000	0,2					0,022				6,8400	0,011
2	2	2	4,5714	0,067					0,048				4,9855	0,044
3	1	1	3,2000	0,3					0,054				4,8600	0,056
3	2	1	4,2857	0,1					0,082				3,9873	0,098
			3,8571	0,133					0,102				3,9600	0,102
3	2	2	5,3272	0,029	4	4	2	7,0364	0,006	5	4	2	7,2045	0,009
			4,7143	0,048				6,8727	0,011				7,1182	0,010
			4,5000	0,087				5,4545	0,046				5,2727	0,049
			4,4643	0,105				5,2364	0,052				5,2682	0,050
3	3	1	5,1429	0,043				4,5545	0,098				4,5409	0,098
			4,5714	0,100				4,4455	0,103				4,5182	0,101
			4,0000	0,129				7,1439	0,010				7,4449	0,010
3	3	2	6,2500	0,011				7,1364	0,011				7,3949	0,011
			5,3811	0,032				5,5985	0,049				5,6664	0,049
			5,1369	0,081				5,5758	0,051				5,6308	0,060
			4,5556	0,100				4,5455	0,099				4,5487	0,099
			4,2500	0,121				4,4773	0,102				4,5231	0,103
3	3	3	7,2000	0,004	4	4	4	7,6538	0,008	5	4	4	7,7604	0,009
			6,4889	0,011				7,5385	0,011				7,7440	0,011

Таблица 8

Критические значения критерия Фридмана

k=3			k=4		
n	χ^2_r	α	n	χ^2_r	α
3	6,00	0,028	2	6,00	0,042
4	6,50 8,00	0,042 0,005	3	7,00 8,20	0,054 0,017
5	5,20 6,40 8,40	0,093 0,039 0,008	4	7,50 9,30	0,054 0,011
6	5,33 6,33 9,00	0,072 0,052 0,008	5	7,80 9,96	0,049 0,009
7	6,00 8,86	0,051 0,008	6	7,60 10,20	0,043 0,010
8	6,25 9,00	0,047 0,010	7	7,63 10,37	0,051 0,009
9	6,22 8,67	0,048 0,010	8	7,65 10,35	0,049 0,010
10	6,20 8,60	0,046 0,012			
11	6,54 8,91	0,043 0,011			
12	6,17 8,67	0,050 0,011			
13	6,00 8,67	0,050 0,012			
14	6,14 9,00	0,049 0,010			
15	6,40 8,93	0,047 0,010			

k – число моментов наблюдения; n – объем выборки; α – уровень значимости.

Учебное издание

Новикова Наталья Михайловна

СТАТИСТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ В МЕДИЦИНЕ

Практикум

Редактор *Л. М. Корневская*
Компьютерная верстка *Д. В. Головач*
Технический редактор *А. В. Красуцкая*

Подписано в печать 01.08.2017. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,94. Уч.-изд. л. 2,88.
Тираж 100 экз. Заказ № 331.

Республиканское унитарное предприятие «Информационно-
вычислительный центр Министерства финансов Республики Беларусь».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/161 от 27.01.2014, № 2/41 от 29.01.2014.
Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.