БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра высшей математики

Л. А. Альсевич, С. Г. Красовский,
А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович

ПРЕДЕЛЫ

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пособие
для студентов факультета
прикладной математики и информатики

МИНСК
2011

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
А57

Рекомендовано Ученым советом
факультета прикладной математики и информатики
29 марта 2011 г., протокол № 5

Р е ц е н з е н т
кандидат физико-математических наук,
доцент *А. К. Деменчук*

Альсевич, А. А.
А57 Пределы. Предел последовательности : пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики / Л. А. Альсевич, С. Г. Красовский, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Минск : БГУ, 2011. – 58 с.

Пособие содержит основные теоретические сведения о последовательностях и их свойствах и предлагает основные приемы нахождения пределов последовательностей.

Изложение материала иллюстрируется подробно разобранными примерами. В пособие включены упражнения, снабженные ответами. Кроме того, приводятся начальные понятия о методе математической индукции и формула бинома Ньютона.

Предназначено для студентов факультета прикладной математики и информатики; оно будет также полезным для всех студентов, изучающих начальный курс высшей математики.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ АВТОРОВ

В пособии рассматриваются классические понятия математического анализа: метод математической индукции, формула бинома Ньютона и числовые последовательности. С одной стороны, эти понятия являются базовыми для всего курса математического анализа и широко используются в других дисциплинах математического цикла и приложениях. С другой стороны, с изучения этих вопросов начинается курс математического анализа, и пособие призвано способствовать адаптации студентов к самостоятельно работе в вузе. В связи с этим авторы при изложении попытались учесть то обстоятельство, что подготовленность у студентов разная, и не всем просто на первых порах воспринимать достаточно сложный, серьезно отличающийся от школьного материал.

В настоящем пособии даются требуемые определения, приводятся теоретические положения, отмечаются основные свойства рассматриваемых объектов. Все это иллюстрируется подробным решением типовых задач и примеров. Особое внимание уделено методам и приемам нахождения пределов последовательностей. В целях усвоения и закрепления пройденного материала предлагается значительное количество упражнений, снабженных ответами. Это позволяет надеяться, что данное пособие будет полезным как студентам, так и преподавателям высшей математики.

Список обозначений и сокращений

N — множество натуральных чисел;
Z — множество целых чисел;
$Z_0 = N \bigcup \{0\}$;
Θ — множество рациональных чисел;
Р — множество действительных чисел;
Х — множество комплексных чисел;
$\forall$ — квантор всеобщности ($\forall x \in A$ — для всех x из множества A; $\forall x \in P$, $x \neq 0$ — для любых действительных x, не равных нулю);
$\exists$ — квантор существования ($\exists y \in A$ — существует y, принадлежащее множеству A; $\exists y$, $y > 1$ — найдется y, большее 1);
::= — равно по определению (синоним $\overset{\text{def}}{=}$);
=:: — обозначим через;
$\Rightarrow$, $\Leftarrow$ — знаки логического следования;
$\Leftrightarrow$ — знак равносильности;
$\vee$ — или;
$\wedge$ — и;
$\rceil$ — знак отрицания;
:= — положим равным;
$f : X \to Y$ — функция f, заданная на множестве X со значениями во множестве Y;
$f \circ g$ — композиция функций (сложная функция, суперпозиция) т.е. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$;
$|\cdot|$ — модуль; $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a < 0; \end{cases}$
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ — факториал ($0! = 1$);
$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n$ — двойной факториал $(2n)!! = 2^n \cdot n!$;
$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ — двойной факториал;
$A \vdots m$ — A кратно m, A делится на m нацело;
$\sum$ — сигма, знак суммирования: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; k — индекс суммирования. Значение суммы не зависит от того, какой буквой обозначают индекс суммирования: $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{s=1}^{n} a_s = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$;

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ — бесконечная сумма, ряд;

$\prod_{k=1}^{n} b_k = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$ — произведение;

$\prod_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \cdot \ldots$ — бесконечное произведение.

1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Утверждение $T(n)$ будет истинным для всех значений натуральной переменной n, если выполняются условия:

1) утверждение $T(n)$ истинно при $n = 1$;
2) из предположения, что $T(n)$ истинно при $n = k$, $k \in \mathrm{N}$, следует, что $T(n)$ истинно и при $n = k + 1$.

Пример 1.1. Пользуясь методом математической индукции, доказать равенство $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = \dfrac{(n+1)n}{2}$, $n \in \mathrm{N}$.

Р е ш е н и е.

1) $n = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{(1+1)\cdot 1}{2}$, т.е. равенство верно.

2) Предположим, что равенство верно при $n = k$, т. е. $1 + 2 + \ldots + k = \dfrac{(k+1)k}{2}$.

3) Проверим истинность равенства при $n = k + 1$, т.е. покажем, что $1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = \dfrac{(k+2)(k+1)}{2}$.

Рассмотрим левую часть последнего равенства и преобразуем ее к правой: $1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) =$ [на основании условия 2)] $= \dfrac{(k+1)k}{2} + (k + 1) = (k + 1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Следовательно, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)n}{2}$ верно $\forall n \in \mathrm{N}$.

Пример 1.2. Пользуясь методом математической индукции, доказать равенство $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathrm{N}$.

Р е ш е н и е.

1) $n = 1 \Rightarrow 1^2 = \dfrac{1(1+1)(1+2)}{6}$.

2) Предположим, что равенство верно при $n = k$: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

3) Покажем истинность при $n = k + 1$, т.е. покажем, что $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 = \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Преобразуем левую часть:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = [\text{см. пункт 2)}] = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right) = (k+1)\frac{k(2k+1)+6k+6}{6} = (k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6} =$$

$$= [\text{так как } 2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)] = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Получили правую часть. Следовательно, утверждение доказано.

Пример 1.3. Пользуясь методом математической индукции, доказать, что $(7^{2n} - 1) \vdots 48$ $\forall n \in \mathrm{N}$, т. е. $7^{2n} - 1$ делится на 48.

Р е ш е н и е. Покажем, что $7^{2n} - 1 = 48q$.

1) $n = 1 \Rightarrow 7^2 - 1 = 48 = 48 \cdot 1$.

2) Предположим, что $7^{2k-1} - 1 = 48q_1$ при $n = k$.

3) Покажем справедливость утверждения при $n = k + 1$:

$$7^{2(k+1)} - 1 = 7^{2k+2} - 1 = 7^{2k} \cdot 7^2 - 1 = 7^{2k} \cdot (48 + 1) - 1 = 7^{2k} \cdot 48 + 7^{2k} - 1 =$$

$$= [(7^{2k} - 1) \vdots 48, \text{ см. п. 2)}] = 7^{2k} \cdot 48 + 48 \cdot q_1 = 48(7^{2k} + q_1) \vdots 48.$$

Следовательно, утверждение доказано.

Пример 1.4. Пользуясь методом математической индукции, доказать неравенство $|\sin(n\alpha)| \le n|\sin\alpha|$, $\forall n \in \mathrm{N}$.

Р е ш е н и е.

1) $n = 1 \Rightarrow |\sin\alpha| \le |\sin\alpha|$.

2) Предположим, что неравенство верно при $n = k$: $|\sin(k\alpha)| \le$ $\le k|\sin\alpha|$.

3) Докажем, что неравенство истинно и при $n = k + 1$, т.е. покажем: $|\sin((k+1)\alpha)| \le (k+1)|\sin\alpha|$. Имеем

$$|\sin((k+1)\alpha)| = |\sin(k\alpha + \alpha)| = |\sin(k\alpha)\cos\alpha + \cos(k\alpha)\sin\alpha| \le [|a+b| \le |a| + |b|] \le$$

$$\le |\sin(k\alpha)\cos\alpha| + |\cos(k\alpha)\sin\alpha| = [|ab| = |a||b|] =$$

$$= |\sin(k\alpha)||\cos\alpha| + |\cos(k\alpha)||\sin\alpha| \le [|\cos\alpha| \le 1;\ |\cos(k\alpha)| \le 1] \le$$

$$\le |\sin(k\alpha)| \cdot 1 + 1 \cdot |\sin\alpha| = [\text{см. п. 2)}] \le k|\sin\alpha| + |\sin\alpha| = (k+1)|\sin\alpha|,$$

что и требовалось доказать.

Пример 1.5. Доказать неравенство $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\forall n \in \mathrm{N}$.

Р е ш е н и е. Применим метод математической индукции.

1) $n = 1 \Rightarrow \dfrac{1!!}{2!!} = \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2$ — истинно.

2) Предположим, что неравенство имеет место и при $n = k$, т.е. $\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} < \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

3) Покажем, что неравенство истинно при $n = k + 1$:

$$\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} = \frac{(2k-1)!!(2k+1)}{(2k)!!(2k+2)} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \text{[см. пункт 2)]} <$$

$$< \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \text{[убедимся, что } \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

для этого построим цепочку равносильных неравенств:

$$\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3} < 2k+2 \Leftrightarrow (2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2 \Leftrightarrow 4k^2 + 8k + 3 <$$

$$< 4k^2 + 8k + 4 \Leftrightarrow 0 < 1] < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

что и требовалось доказать. Неравенство доказано.

Пример 1.6. Вывести формулу для суммы: $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$.

Р е ш е н и е. Вычислим несколько сумм и попробуем найти закономерность:

$S_1 = 1 \cdot 1! = 1 \Rightarrow S_1 = 2! - 1$.

$S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5 \Rightarrow S_2 = 3! - 1$.

$S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23 \Rightarrow S_3 = 4! - 1$.

Следовательно, можно предположить, что $S_n = (n + 1)! - 1$.

Докажем это, используя метод математической индукции.

1) $n = 1$ — верно.

2) $n = k \Rightarrow S_k = (k + 1)! - 1$, т.е. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! = (k + 1)! - 1$.

3) $n = k + 1$: $S_{k+1} = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! =$ [см. п. 2)] $= (k + 1)! - 1 + (k + 1)(k + 1)! = (k + 1)!(1 + k + 1) - 1 = (k + 1)!(k + 2) - 1 = (k + 2)! - 1$.

Следовательно, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

Отметим, что обобщением метода математической индукции является следующее высказывание.

Если:

1) утверждение $T(n)$ истинно при $n = m$, $m \in \mathrm{Z}$;

2) из предположения, что утверждение $T(n)$ верно при $n = k$ ($k \in Z$, $k \geq m$), следует, что $T(n)$ истинно при $n = k + 1$,

то $T(n)$ истинно для всех n, $n \in Z$, $n \geq m$.

Пример 1.7. Доказать неравенство $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, $n \in Z$, $n \geq 2$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся методом математической индукции:

1) $n = 2 \Rightarrow 1+(1/\sqrt{2})>\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2}+1>(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}+1>2 \Leftrightarrow \sqrt{2}>1$ — верно.

2) $n = k \Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$.

3) $n = k+1 \Rightarrow\; 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>$ [см. п. 2)] $>\sqrt{k}+ +\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Покажем далее, что $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq\sqrt{k+1}$. Действительно, $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq\sqrt{k+1} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{k(k+1)}+1\geq k+1 \;\Leftrightarrow \sqrt{k(k+1)}\geq k \;\Leftrightarrow\; k(k+1)\geq k^2 \Leftrightarrow 1 \geq 0$.

Следовательно, $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$ при $n \geq 2$, что и требовалось доказать.

Пример 1.8. Выяснить, при каких $n \in N$ верно неравенство $2^n > n^2 + n + 1$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим несколько первых значений n:

$n = 1 \Rightarrow 2 < 3$;

$n = 2 \Rightarrow 2^2 < 7$;

$n = 3 \Rightarrow 2^3 < 3^2 + 3 + 1$;

$n = 4 \Rightarrow 2^4 < 4^2 + 4 + 1$;

$n = 5 \Rightarrow 2^5 > 5^2 + 5 + 1 \Leftrightarrow 32 > 31$.

Из проведенных вычислений следует, что при $n = 1,2,3,4$ неравенство не выполняется, а при $n = 5$ выполняется.

Справедливость неравенства для $\forall n \in N$, $n \geq 5$, проверим с помощью метода математической индукции:

1) $n = 5$ – верно;

2) $n = k$, $k \geq 5$: $2^k > k^2 + k + 1$;

3) $n = k + 1 \Rightarrow 2^{k+1} = 2^k \cdot 2 >$ [см. пункт 2)] $> 2(k^2 + k + 1)$.

Покажем далее, что $2(k^2 + k + 1) \geq (k + 1)^2 + (k + 1) + 1$. Тем самым покажем, что неравенство в пункте 3) выполняется.

Поскольку $2(k^2 + k + 1) \geq (k + 1)^2 + (k + 1) + 1 \Leftrightarrow 2k^2 + 2k + 2 \geq k^2 + 3k + 3 \Leftrightarrow k^2 - k - 1 \geq 0 \Leftrightarrow k(k - 1) - 1 > 0$ верно при $\forall k \geq 5$. Таким образом, неравенство $2^n > n^2 + n + 1$ верно при $n \geq 5$, $n \in \mathrm{N}$.

Пример 1.9. Доказать следующие равенства:

а) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $n \geq 2$;

б) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$, $n \in \mathrm{N}$;

в) $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \dfrac{a - b}{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}}$, $a > 0$, $b > 0$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$.

Р е ш е н и е.

а) Докажем с помощью метода математической индукции.

1) $n = 2 \Rightarrow a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — верно;

2) $n = k \Rightarrow a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1})$.

3) $n = k + 1 \Rightarrow a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - a^kb + a^kb - b^{k+1} = a^k(a - b) + b(a^k - b^k) =$ $=$[см. п. 2)] $= a^k(a - b) + b(a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}) = (a - b)\times$ $\times(a^k + a^{k-1}b + a^{k-2}b^2 + \ldots + ab^{k-1} + b^k)$, что и завершает доказательство.

б) Для доказательства равенства используем пример *а*), полагая $n := 2n + 1$, $b := -b$:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

в) Воспользуемся формулой примера *а*), полагая $a := \sqrt[n]{a}$, $b := \sqrt[n]{b}$. Получим

$$a - b = (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}}\sqrt[n]{b} + \ldots + \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a - b = (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}}.$$

Отметим, что формулы примера 1.9 используются в математическом анализе, например, при вычислении пределов.

Упражнение 1.1. Применяя метод математической индукции, доказать равенства.

1. $1 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{4} + \dfrac{15}{8} + \ldots + \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2^{1-n} + 2(n - 1)$, $n \in \mathrm{N}$.

2. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+...+(n-1)\cdot n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$, $n\in\mathrm{N}$, $n\geq 2$.

3. $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $n\in\mathrm{N}$.

4. $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)...\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$, $n\in\mathrm{N}$.

5. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+...+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$, $n\in\mathrm{N}$.

6. $\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 7}+...+\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}=\dfrac{n}{4(n+4)}$, $n\in\mathrm{N}$.

7. $2 + 7 + 14 + \ldots + (n^2 + 2n - 1) = \dfrac{n(2n^2+9n+1)}{6}$, $n\in\mathrm{N}$.

8. $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$, $n\in\mathrm{N}$.

9. $1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \dfrac{(n-1)n}{2}+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$, $n\in\mathrm{N}$.

10. $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+...+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$, $n\in\mathrm{N}$.

11. $1\cdot 4+2\cdot 7+...+n(3n-1)=n(n+1)^2$, $n\in\mathrm{N}$.

12. $1^2-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$, $n\in\mathrm{N}$.

13. $1\cdot 2+2\cdot 5+...+n(3n-1)=n^2(n+1)$, $n\in\mathrm{N}$.

14. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+...+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$, $n\in\mathrm{N}$.

15. $1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$, $n\in\mathrm{N}$.

Упражнение 1.2. Применяя метод математической индукции, доказать неравенства.

1. $|a_1+a_2+...+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+...+|a_n|$, $n\in\mathrm{N}$.

2. $2^n>2n+1$, $n\in\mathrm{N}$, $n\geq 3$.

3. $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, $n\in\mathrm{N}$.

4. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{n+n}>\dfrac{13}{24}$, $n\in\mathrm{N}$, $n\geq 2$.

5. $3n^2 \geq 2n+1,\ n \in \mathrm{N}$.

6. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1,\ n \in \mathrm{N}$.

7. $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2,\ n \in \mathrm{N}$.

8. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n},\ n \in \mathrm{N}$.

Упражнение 1.3. Доказать следующие утверждения.

1. $(5^{n+2}+26\cdot 5^n+8^{2n-1}) \vdots 59,\ n \in \mathrm{N}$.
2. $(5^{n+3}\cdot 2^n-125) \vdots 45,\ n \in \mathrm{N}$.
3. $(n^3+3n^2+5n) \vdots 3,\ n \in \mathrm{N}$.
4. $(10^n-4^n+3n) \vdots 9,\ n \in \mathrm{N}$.
5. $(4^n+15n-1) \vdots 9,\ n \in \mathrm{N}$.
6. $(7^{2n}+7^n-2) \vdots 6,\ n \in \mathrm{N}$.
7. $(17\cdot 5^{2n}+21\cdot 6^n) \vdots 19,\ n \in \mathrm{N}$.
8. $(7^{3n}-4^{3n}) \vdots 31,\ n \in \mathrm{N}$.
9. $(5^{n+3}+11^{3n+1}) \vdots 17,\ n \in \mathrm{N}$.
10. $(9^{n+1}-8n-9) \vdots 16,\ n \in \mathrm{N}$.

2. СОЧЕТАНИЯ

Пусть имеется множество из n элементов. Количество его подмножеств, содержащих k элементов, называется числом *сочетаний* из n элементов по k элементов, $0 \le k \le n$.

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается: «число сочетаний из n по k», C — первая буква французского слова *combinasion* – сочетание). Из приведенного определения следует, что $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$.

Число сочетаний вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Проведем сокращения

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k)(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-k)!(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Следовательно

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Свойства

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Действительно,

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Пользуясь этим свойством, можно упрощать вычисление чисел C_n^k в тех случаях, когда $k > n/2$, например,

$$C_{15}^{12} = C_{15}^{15-12} = C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

2. $C_n^{k+1} + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$.

Действительно,

$$C_n^{k+1}+C_n^k=\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!}+$$
$$+\frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)}=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k}\right)=$$
$$=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\cdot\frac{n+1}{(k+1)(n-k)}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=C_{n+1}^{k+1}.$$

3. $C_n^{k+1}=\dfrac{n-k}{k+1}C_n^k$.

Доказать самостоятельно.

Отметим, что для вычисления числа сочетаний при небольших n можно использовать так называемый треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Каждая их строк треугольника начинается и заканчивается единицей. Каждый элемент строки представляет собой сумму двух элементов, стоящих над ним.

Пример 2.1. Вычислить $\dfrac{C_{15}^9}{C_7^4\cdot C_{13}^{10}}$

Р е ш е н и е.

$$\frac{C_{15}^9}{C_7^4C_{13}^{10}}=[C_n^k=C_n^{n-k}\Rightarrow C_{15}^9=C_{15}^6,\ C_7^4=C_7^3,\ C_{13}^{10}=C_{13}^3]=\frac{C_{15}^6}{C_7^3C_{13}^3}=$$

$$=\text{[применим формулу для числа сочетаний]}=\frac{\dfrac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}}{\dfrac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\cdot\dfrac{13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3}}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2.2. Найти *n*, если $\dfrac{C_{2n}^{n+1}}{C_{2n+1}^{n-1}}=\dfrac{3}{5}$.

Р е ш е н и е. Так как

$$\frac{C_{2n}^{n+1}}{C_{2n+1}^{n-1}}=\frac{\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}}{\dfrac{(2n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}}=\frac{(2n)!(n+2)!}{(n+1)!(2n+1)!}=\frac{(2n)!(n+1)!(n+2)}{(n+1)!(2n)!(2n+1)}=\frac{n+2}{2n+1},$$

то получаем уравнение $\dfrac{n+2}{2n+1}=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow 5(n+2)=3(2n+1)\Rightarrow n=7$.

Пример 2.3. Найти все *n*, удовлетворяющие неравенству $2C_{n+1}^{n-1}+3C_{n+1}^{n}\le 24$.

Р е ш е н и е. Так как $C_{n+1}^{n-1}=C_{n+1}^{2}$, $C_{n+1}^{n}=C_{n+1}^{1}$ (см. свойство 1), то неравенство принимает вид:

$$2C_{n+1}^{2}+3C_{n+1}^{1}\le 24\Leftrightarrow 2\frac{(n+1)n}{2}+3(n+1)\le 24\Leftrightarrow n^2+4n+3\le 24\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+4n-21\le 0\Leftrightarrow n^2+4n+4-25\le 0\Leftrightarrow (n+2)^2-5^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+2+5)(n+2-5)\le 0\Leftrightarrow (n+7)(n-3)\le 0.$$

Так как $n+7>0$, то $n-3\le 0$. Таким образом, $n\in\{1,2,3\}$.

Пример 2.4. Найти множество значений функции $f(x)=C_{x+1}^{2x-8}$.

Р е ш е н и е. Множество допустимых значений *x* определяется системой:

$$\begin{cases} x+1\in \mathrm{N}, \\ 2x-8\in \mathrm{Z}_0, \\ 2x-8\le x+1, \end{cases}\quad \text{т.е.}\quad \begin{cases} x+1\ge 1, \\ 2x-8\ge 0, \\ x\le 9, \\ x\in \mathrm{N}, \end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases} x\ge 0, \\ x\ge 4, \\ x\le 9, \\ x\in \mathrm{N}. \end{cases}$$

Этой системе удовлетворяют числа 4, 5, 6, 7, 8, 9. Вычислим значения функции при указанных *x*:

$$f(4)=C_5^0=1,\quad f(5)=C_6^2=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15,\quad f(6)=C_7^4=C_7^3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=35,$$

$$f(7)=C_8^6=C_8^2=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28,\quad f(8)=C_9^8=C_9^1=9,\quad f(9)=C_{10}^{10}=1.$$

Таким образом, множество значений функции $E(f)=\{1,9,15,28,35\}$.

Упражнение 2.1. Вычислить.

1. $\left(\frac{1}{13}C_{13}^{9}+\frac{1}{12}C_{10}^{3}\right)/(C_5^3+C_3^2)$ (*Ответ:* 5.)

2. $C_{15}^{9}/(C_7^4C_{13}^{10})$ (*Ответ:* 1/2.)

3. $(C_9^3C_8^4)/(C_{10}^3C_7^2)$ (*Ответ:* 7/3.)

4. $C_{12}^2-3C_{10}^5-C_7^4$ (*Ответ:* 1.)

5. $(C_{13}^{11}-C_{11}^2-3C_{10}^2)/C_8^4$ (*Ответ:* – 1/35.)

6. $\left(\frac{1}{13}C_{14}^{4}-C_8^4\right)\Big/\left(\frac{1}{12}C_9^2+\frac{1}{21}C_9^6\right)$ (*Ответ:* 1.)

7. $(C_{13}^9-6C_9^5+C_{10}^2)/(C_{12}^8-7C_8^4+C_4^0)$ (*Ответ:* 2/3.)

8. $(2C_7^3+3C_5^2-C_8^4)/(C_{11}^9-C_{10}^9)$ (*Ответ:* 3.)

9. $(C_8^3+2C_5^2-C_9^2)/(C_{12}^9-C_{10}^6)$ (*Ответ:* 4.)

10. $(C_{13}^3+C_9^3)/(C_{15}^2-4C_{17}^{16})$ (*Ответ:* 10.)

Упражнение 2.2. Найти все *n*, удовлетворяющие условиям

1. $\frac{1}{C_4^n}=\frac{1}{C_5^n}+\frac{1}{C_6^n}$ (*Ответ:* $n=2$.)

2. $C_{2n}^7>C_{2n}^5$ (*Ответ:* $n\in\mathrm{N},\ n>6$.)

3. $C_{2x}^{2x-2}+3x\le 160$ (*Ответ:* $\{1,3/2,2,5/3,...,15/2,8\}$.)

4. $8C_{105}^n<3C_{105}^{n+1}$ (*Ответ:* $\{0,1,...,27\}$.)

5. $C_{n+1}^{n-1}<21$ (*Ответ:* $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.)

6. $C_{2n}^{n+1}/C_{2n+1}^{n-1}=16/29$ (*Ответ:* $n=14$.)

7. $C_{n-1}^{n-2}=n^2-13$ (*Ответ:* $n=4$.)

8. $C_{n+1}^{n-2}-C_{n+1}^{n-1}\le 10$ (*Ответ:* $\{2,3,....,9\}$.)

9. $C_{n+1}^2/C_n^3=4/5$ (*Ответ:* $n=7$.)

10. $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=15(n+2)$ (*Ответ:* $n=27$.)

3. ФОРМУЛА НЬЮТОНА

Для любых чисел a и b и любого натурального n имеет место формула:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

или кратко: $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j a^{n-j} b^j$, которую называют формулой Ньютона (или формулой бинома Ньютона).

В формуле Ньютона числа C_n^k называют еще *биномиальными коэффициентами.* Для вывода формулы Ньютона воспользуемся методом математической индукции:

1) $n=1 \Rightarrow\ a+b = C_1^0 a + C_1^1 b = a+b$ — верно,

2) $n=k \Rightarrow\ (a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j a^{k-j} b^j$,

3) $n=k+1 \Rightarrow$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = [\text{см. пункт 2})] = (a+b)\sum_{j=0}^{k} C_k^j a^{k-j} b^j =$$

$$= [\text{перемножим}] = \sum_{j=0}^{k} C_k^j a^{k+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{k} C_k^j a^{k-j} b^{j+1} =$$

$= [$выпишем отдельно слагаемые: в 1-й сумме при $j = 0$, во 2-й при $j = k] =$

$$= C_k^0 a^{k+1} b^0 + \sum_{j=1}^{k} C_k^j a^{k+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j a^{k-j} b^{j+1} + C_k^k a^0 b^{k+1} = [C_k^0 = C_{k+1}^0,\ \ C_k^k = C_{k+1}^{k+1}] =$$

$$= C_{k+1}^0 a^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} C_k^j a^{j+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j a^{k-j} b^{j+1} + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} =$$

$$= \left[\text{рассмотрим } \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j a^{k-j} b^{j+1} = \begin{bmatrix} j+1 = l, j = 0 \Rightarrow l = 1, \\ j = k-1 \Rightarrow l = k \end{bmatrix} = \right.$$

$$\left. = \sum_{l=1}^{k} C_k^{l-1} a^{k-(l-1)} b^l = \sum_{l=1}^{k} C_k^{l-1} a^{k+1-l} b^l = [l := j] = \sum_{j=1}^{k} C_k^{j-1} a^{k+1-j} b^j \right] =$$

$$= C_{k+1}^0 a^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} C_k^j a^{k+1-j} b^j + \sum_{j=1}^{k} C_k^{j-1} a^{k+1-j} b^j + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} =$$

$$= [\text{приведем подобные члены}] =$$

$$= C_{k+1}^0 a^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} (C_k^j + C_k^{j-1}) a^{k+1-j} b^j + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} =$$

$$= [\text{см. свойство 2: } C_n^j + C_n^{j-1} = C_{n+1}^j] =$$

$$= C_{k+1}^0 a^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} C_{k+1}^j a^{k+1-j} b^j + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j a^{k+1-j} b^j .$$

Таким образом,

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j a^{k+1-j} b^j .$$

А это и означает справедливость формулы при $n = k + 1$. Следовательно, формула Ньютона доказана.

Отметим, что число слагаемых в формуле Ньютона равно $n + 1$, т.е. на единицу больше степени бинома.

Если в формуле Ньютона положить $b := -b$, то получим:

$$(a-b)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j a^{n-j} (-b)^j = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j a^{n-j} b^j$$

или в развернутом виде:

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + (-1)^n C_n^n b^n .$$

Свойства

1. Так как $C_n^k = C_n^{n-k}$, то биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов разложения, равны. Поэтому считать биномиальные коэффициенты достаточно до $k \le n/2$.

2. Формула $C_n^{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1} C_n^k$ позволяет вычислять биномиальные коэффициенты последовательно, т.е. $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^2 = n \cdot \dfrac{n-1}{2}$, $C_n^3 = n \cdot \dfrac{n-1}{2} \cdot \dfrac{n-2}{3}$ и т.д.

3. Так как $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$, то при $x = 1$ получаем $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$, т.е. сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n.

4. Так как $(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^k$, то, полагая $x=1$, получим $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k=0$. Таким образом, сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

5. Если обозначить *k*-й член разложения через T_{k+1}, то $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k$.

6. *k*-я строка треугольника Паскаля представляет собой ряд чисел C_k^0, C_k^1, C_k^2, …, C_k^k и дает набор биномиальных коэффициентов формулы Ньютона для $(a+b)^k$.

Внимание! В формуле Ньютона для $(a+b)^n$ первый коэффициент равен 1, второй равен степени бинома, все последующие подсчитываются по формуле $C_n^{k+1}=\dfrac{n-k}{k+1}C_n^k$.

Пример 3.1. Записать в виде многочлена $(1+x)^6$, используя формулу Ньютона.

Р е ш е н и е. Всего слагаемых $6+1=7$, четвертое слагаемое — это середина разложения (см. формулу $C_n^k=C_n^{n-k}$). Следовательно,

$$(1+x)^6=1+6x+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}x^2+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}x^4+6x^5+x^6=$$
$$=1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6.$$

Пример 3.2. Записать $(x-1)^7$ в виде многочлена.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой Ньютона. Число слагаемых $7+1=8$, следовательно, четвертое и пятое слагаемые будут иметь одинаковые биномиальные коэффициенты. Таким образом,

$$(x-1)^7=x^7-7x^6+\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}x^5-\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}x^4+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}x^3-\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}x^2+7x-1=$$
$$=x^7-7x^6+21x^5-35x^4+35x^3-21x^2+7x-1.$$

Пример 3.3. Найти 5-й член разложения $(z^{1/2}-z^{2/3})^{12}$.

Р е ш е н и е. $T_5=C_{12}^4(z^{1/2})^{12-4}(z^{2/3})^4=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}z^4 z^{8/3}=495z^{20/3}$.

Пример 3.4. Найти номер члена разложения $(x+x^{-2})^{12}$, не содержащего *x*.

Р е ш е н и е. Найдем член разложения, содержащий x^0. Воспользуемся формулой $(k+1)$-го члена разложения: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$. В данном случае $n = 12$, $a = x$, $b = x^{-2}$. Поэтому $T_{k+1} = C_{12}^k x^{12-k} x^{-2k} = C_{12}^k x^{12-3k}$. Следовательно, $12 - 3k = 0$, $k = 4$. Таким образом, не содержит x пятый член разложения.

Пример 3.5. Найти коэффициент при x^8 в многочлене $(1 + x^2 - x^3)^9$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой Ньютона, полагая $a = 1 + x^2$, $b = -x^3$, $n = 9$. Тогда

$$((1+x^2)+x^3)^9 = (1+x^2)^9 - 9(1+x^2)^8 x^3 + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}(1+x^2)^7 x^6 + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — многочлен, степень которого ≥ 9. Поэтому в дальнейшем это слагаемое нас не интересует. Далее, $(1+x^2)^8$ будет содержать четные степени x, следовательно, $(1+x^2)^8 x^3$ будет содержать только нечетные степени x. В итоге осталось проанализировать первое и третье слагаемые. Рассмотрим $(1+x^2)^9$ и выделим слагаемое, содержащее x^8. Это будет $C_9^4 (x^2)^4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^8 = 126x^8$. Далее рассмотрим $36(1+x^2)^7 x^6$ и выделим слагаемое, содержащее x^8. Это будет $36 \cdot 7x^2 \cdot x^6 = 252x^8$. Следовательно, коэффициент при x^8 равен $126 + 252 = 378$.

Пример 3.6. Найти номер наибольшего слагаемого в разложении $\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right)^{100}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим отношение

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{C_{100}^k (9/10)^{100-k} (1/10)^k}{C_{100}^{k-1} (9/10)^{100-(k-1)} (1/10)^{k-1}} = \frac{C_{100}^k (9/10)^{100-k} (1/10)^k}{C_{100}^{k-1} (9/10)^{101-k} (1/10)^{k-1}} =$$

$$= \frac{C_{100}^k}{C_{100}^{k-1}} (9/10)^{-1} (1/10)^1 = \frac{C_{100}^k}{9C_{100}^{k-1}} =$$

=[см. свойство 2: $C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m$, в котором $n = 100$, $m+1 = k$, $m = k-1$]=

$$= \frac{100-k+1}{k} \cdot \frac{C_{100}^{k-1}}{9C_{100}^{k-1}} = \frac{100-k+1}{9k} = \frac{101-k}{9k}.$$

Найдем все k, для которых $\frac{T_{k+1}}{T_k} > 1$. Поскольку $\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{101-k}{9k}$, то $\frac{101-k}{9k} > 1$, из чего следует, что $101-k > 9k \Rightarrow 10k > 101 \Rightarrow k < 10{,}1$. Таким образом, для всех $k \le 10$ получаем $T_{k+1} > T_k$. Следовательно, наибольшее слагаемое имеет номер 11.

Упражнение 3.1. Разложить по формуле Ньютона и упростить.

1. $(a+2b)^5$ (*Ответ:* $a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 8ab^4 + 32b^5$.)
2. $(a-\sqrt{2})^6$ (*Ответ:* $a^6 - 6\sqrt{2}a^5 + 30a^4 - 40\sqrt{2}a^3 + 60a^2 - 24\sqrt{2}a + 8$.)
3. $(1-\sqrt{2})^5$ (*Ответ:* $41 - 29\sqrt{2}$.)
4. $\frac{1}{27}(\sqrt{3}-\sqrt{15})^6$ (*Ответ:* $64(9-4\sqrt{5})$.)
5. $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^8$ (*Ответ:* $x^8 + 4x^6 + 7x^4 + 7x^2 + \frac{35}{8} + \frac{7}{4x^2} + \frac{7}{16x^4} + \frac{1}{16x^6} + \frac{1}{256x^8}$.)
6. $(x^2-y)^6$ (*Ответ:* $x^{12} - 6x^{10}y + 15x^8y^2 - 20x^6y^3 + 15x^4y^4 - 6x^2y^5 + y^6$.)
7. $(x^2-2x)^4$ (*Ответ:* $x^8 - 8x^7 + 24x^6 - 32x^5 + 16x^4$.)
8. $(2-\sqrt{2})^5$ (*Ответ:* $4(58-41\sqrt{2})$.)
9. $(x-x^2)^4$ (*Ответ:* $x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4$.)
10. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\sqrt{x}\right)^6$ (*Ответ:* $x^9 - 6x^7 + 15x^5 - 20x^3 + 15x - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^3}$.)

Упражнение 3.2.

1. Сумма биномиальных коэффициентов разложения $\left(\frac{n}{x}+\frac{x}{2n}\right)^n$ равна 256. Найти член, не содержащий x.

(*Ответ:* 35/8.)

2. Сколько членов разложения $\left(2x\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)^{65}$ не содержит знаков корней?

(*Ответ:* 16.)

3. Найти номер наибольшего слагаемого в разложении $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)^{50}$.

(*Ответ:* 31-й.)

4. Есть ли в разложении $\left(\frac{2x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)^{32}$ члены, не содержащие переменные x и y. Если есть, то каковы их номера?

(*Ответ:* таких членов нет.)

5. При каких значениях x третье слагаемое разложения $(3+2x)^{15}$ больше каждого из соседних с ним членов?

(*Ответ:* $x \in (3/14; 9/26) \bigcup (-\infty; 0)$.)

6. В разложении $(1+2x)^n$ отношение коэффициента при x^7 к коэффициенту при x^6 равно $\frac{10}{7}$. Сколько слагаемых имеет это разложениие?

(*Ответ:* 12.)

7. В какую натуральную степень следует возвести бином $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)$, чтобы отношение четвертого слагаемого разложения к третьему слагаемому было равно $3\sqrt{2}$?

(*Ответ:* $n=5$.)

8. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах в разложении $(ax+x^{-1/4})^n$ равна 512. Найти слагаемое, не содержащее x.

(*Ответ:* $45a^2$ ($n=10$, 9-й член).)

9. Сколько слагаемых имеет разложение $\left(n+\frac{1}{n}\right)^n$, если произведение четвертого от начала и четвертого от конца сланаемых равно 14400?

(*Ответ:* 11 слагаемых.)

10. Найти наибольший коэффициент многочлена $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4$.

(*Ответ:* 27/64.)

11. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$?

(*Ответ:* 26.)

4. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение. *Последовательностью* называют числовую функцию натурального аргумента f: N → Р, т.е. $n \mapsto f(n) =:: a_n$.

Обозначают последовательность символом (a_n) или $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, a_n – n-й член последовательности.

Последовательность (a_n) называют *ограниченной сверху*, если существует число B такое, что $a_n \le B$, $\forall n \in \mathrm{N}$.

Пример 4.1. Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ ограничена сверху числом $B = 1$, так как $\frac{1}{n} \le 1$, $\forall n \in \mathrm{N}$.

Отметим, что данная последовательность ограничена сверху любым числом $B > 1$.

Последовательность (a_n) называют *ограниченной снизу*, если существует число b такое, что $a_n \ge b$, $\forall n \in \mathrm{N}$.

Пример 4.2. Последовательность $\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, 1 - \frac{(-1)^n}{n}, \ldots\right)$ ограничена снизу числом $b = 0$, так как $1 - \frac{(-1)^n}{n} \ge 0$, $\forall n \in \mathrm{N}$.

Отметим, что данная последовательность ограничена снизу любым отрицательным числом.

Если последовательность (a_n) ограничена и сверху, и снизу, то ее называют *ограниченной*.

Пример 4.3. Последовательность $\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \ldots, \frac{n}{n^2+1}, \ldots\right)$ ограничена, так как существуют числа, например, $b = 0$ и $B = 1$ такие, что $0 \le \frac{n}{n^2+1} \le 1$, $\forall n \in \mathrm{N}$.

Последовательность (a_n) называют *возрастающей* (*строго возрастающей*), если $\forall n \in \mathrm{N}$ выполняется неравенство $a_{n+1} \ge a_n$ (неравенство $a_{n+1} > a_n$).

Последовательность (a_n) называют *убывающей* (*строго убывающей*), если $\forall n \in \mathrm{N}$ выполняется неравенство $a_{n+1} \le a_n$ (неравенство $a_{n+1} < a_n$).

Убывающие и возрастающие последовательности называют *монотонными*, а строго убывающие и строго возрастающие — *строго монотонными*.

Пример 4.4. Последовательность $(a_n) = (2^n)$ — строго возрастающая, так как $2^{n+1} > 2^n$, $\forall n \geq 1$, а последовательность $(a_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)$ — строго убывающая, так как $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$ $\forall n \geq 1$.

Последовательность $(a_n) = (a)$, $a \in \mathrm{P}$, $\forall n \in \mathrm{N}$, называют *постоянной*.

Бесконечно малые последовательности

Определение. Последовательность (α_n) называют *бесконечно малой последовательностью* (бмп), если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu_\varepsilon,\ \forall n \geq \nu_\varepsilon \Rightarrow |\alpha_n| \leq \varepsilon,$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число ν, зависящее от ε, что все члены последовательности с номерами $n \geq \nu_\varepsilon$ удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| \leq \varepsilon$, которое равносильно двойному неравенству $-\varepsilon \leq \alpha_n \leq \varepsilon$.

Пример 4.5. Последовательность (α_n) с n-м членом $\alpha_n = \frac{1}{n}$ является бесконечно малой, так как $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$, $\forall n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) бесконечно малая последовательность ограничена;
2) линейная комбинация с постоянными коэффициентами конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;
3) произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность;
4) произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;
5) если бесконечно малая последовательность (α_n) является постоянной последовательностью, то $\alpha_n = 0$, $\forall n \in \mathrm{N}$;
6) последовательность $(|\alpha_n|)$ является бесконечно малой последовательностью тогда и только тогда, когда (α_n) есть бесконечно малая последовательность;

7) если $|\beta_n| \le \alpha_n$, $\forall n \in N$ и (α_n) — бесконечно малая последовательность, то и (β_n) — бесконечно малая последовательность;
8) если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon$ такое, что выполняется неравенство $|\alpha_n| \le M\varepsilon$, $\forall n \ge \nu_\varepsilon$, где M не зависит ни от ε, ни от n, то (α_n) — бесконечно малая последовательность.

Сходящиеся последовательности

Определение. Последовательность (a_n) называют *сходящейся* или имеющей конечный предел, если $\exists a \in P$, такое, что $a_n = a + \alpha_n$, где (α_n) — бесконечно малая последовательность.

Последовательность (a_n) сходится, если $\exists a \in P$ такое, что $(a_n - a)$ — бесконечно малая последовательность.

Последовательность (a_n) сходится к a, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon$, $\forall n \ge \nu_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| \le \varepsilon$.

Так как $|a_n - a| \le \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon \le a_n \le a + \varepsilon$, то это означает, что в ε-окрестности точки a находятся все члены последовательности (a_n) с номерами $n \ge \nu_\varepsilon$.

Число a называют *пределом последовательности* (a_n) и записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Из приведенного определения и определения бесконечно малой последовательности следует, что бесконечно малая последовательность (α_n) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Пример 4.6. Последовательность (a_n) с n-ым членом $a_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ является сходящейся и ее предел равен 1.

Если последовательность (a_n) не является сходящейся, то ее называют *расходящейся*.

Свойства сходящихся последовательностей:
1) сходящаяся последовательность ограничена;
2) сходящаяся последовательность имеет только один предел;
3) изменение конечного числа членов последовательности не нарушает сходимости и не меняет величины предела, если он существует;

4) предел линейной комбинации с постоянными коэффициентами сходящихся последовательностей равен линейной комбинации пределов с этими же коэффициентами, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n .$$

В частности, $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$, $\lim_{n\to\infty} c a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$, $c \in \text{Р}$;

5) предел произведения сходящихся последовательностей равен произведению пределов, т.е. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$;

6) предел частного сходящихся последовательностей равен частному пределов, т.е. $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \Big/ \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$, при условии, что $b_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$;

7) если $a_n \le b_n \le c_n$ для $\forall n$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} c_n = a$, то и $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

8) если $a_n \le b_n$, то $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$. Заметим,что если $a_n < b_n$, $\forall n$, то $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$.

Бесконечно большие последовательности

Определение. Последовательность (A_n) называют *бесконечно большой последовательностью* (ббп), если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu_\varepsilon,\ \forall n \ge \nu_\varepsilon \ \Rightarrow\ |A_n| \ge \varepsilon .$$

В этом случае записывают $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$ или $A_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Пример 4.7. Последовательность (A_n) с n-м членом $A_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ является ббп, так как $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon = \varepsilon + 1$, $\forall n \ge \nu_\varepsilon \ \Rightarrow\ |A_n| \ge \varepsilon$ в силу того, что $\dfrac{n^2}{n+1} \ge \dfrac{n^2 - 1}{n+1} = n - 1 \ge \varepsilon \Rightarrow n \ge 1 + \varepsilon$.

Среди бесконечно больших последовательностей выделяют последовательности, члены которых, начиная с некоторого места, сохраняют знак.

Если (A_n) — бесконечно большая последовательность и $A_n > 0$, начиная с некоторого номера, то пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = +\infty$ или $A_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, что равносильно: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon$, $\forall n \geq \nu_\varepsilon \Rightarrow A_n \geq \varepsilon$.

Аналогично, если (A_n) — бесконечно большая последовательность и $A_n < 0$, начиная с некоторого номера, то пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = -\infty$ или $A_n \to -\infty$ при $n \to \infty$, что равносильно: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon$, $\forall n \geq \nu_\varepsilon \Rightarrow A_n \leq -\varepsilon$.

Отметим, что бесконечно большая последовательность является расходящейся последовательностью.

Свойства бесконечно больших последовательностей:

1) если (α_n) – бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0$ $\forall n \in \mathrm{N}$, то $\left(\dfrac{1}{\alpha_n}\right)$ — бесконечно большая последовательность;
2) если (A_n) — бесконечно большая последовательность и $A_n \neq 0$ $\forall n \in \mathrm{N}$, то $\left(\dfrac{1}{A_n}\right)$ — бесконечно малая последовательность;
3) произведение конечного числа бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность;
4) сумма конечного числа бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность того же знака.
5) если (A_n) — бесконечно большая последовательность, а последовательность (a_n) удовлетворяет условию $|a_n| \geq \gamma > 0$, то $(A_n a_n)$ — бесконечно большая последовательность. В частности, если последовательность (a_n) имеет конечный, отличный от нуля предел, то $(A_n a_n)$ — бесконечно большая последовательность.

Последовательности разделяют на сходящиеся (имеющие конечный предел) и расходящиеся (не имеющие конечного предела). С другой стороны, последовательности делятся на имеющие предел (конечный или бесконечный) и не имеющие предела.

Эталонные пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $|q|<1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, $|q|>1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$, $q=1$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$, не существует при $q=-1$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$, $a>1$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$, $a>1$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a>0$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a^{\alpha} n}{n^{\beta}} = 0$, $a>1$, $\beta>0$.

Доказательство значения предела по определению

Пример 4.8. Доказать, исходя из определения, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-5n+1}{n^2+n+1} = 2$,

Р е ш е н и е. Требуется доказать, что $\forall\varepsilon>0,\ \exists\nu_\varepsilon,\ \forall n\ge\nu_\varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{2n^2-5n+1}{n^2+n+1}-2\right|\le\varepsilon$.

Рассмотрим $\left|\dfrac{2n^2-5n+1}{n^2+n+1}-2\right|$ и проведем следующие преобразования и оценки:

$$\left|\frac{2n^2-5n+1}{n^2+n+1}-2\right| = \frac{|2n^2-5n+1-2n^2-2n-2|}{n^2+n+1} = \frac{|-7n-1|}{n^2+n+1} = \frac{7n+1}{n^2+n+1} \le \frac{7n+1}{n^2} \le$$

$$\le \frac{7n+n}{n^2} = \frac{8}{n} \le \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n \ge \frac{8}{\varepsilon} =:: \nu_\varepsilon .$$

Итак, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\nu_\varepsilon=\dfrac{8}{\varepsilon}$, $\forall n\geq\nu_\varepsilon=\dfrac{8}{\varepsilon}$ $\Rightarrow$ $\left|\dfrac{2n^2-5n+1}{n^2+n+1}-2\right|\leq\varepsilon$. А это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-5n+1}{n^2+n+1}=2$.

Отметим, что оценки можно было проводить и иначе. Например:

$$\left|\frac{2n^2-5n+1}{n^2+n+1}-2\right|=\frac{|-7n-1|}{n^2+n+1}=\frac{7n+1}{n^2+n+1}\leq\frac{7n+7}{n^2+n}=\frac{7}{n}\leq\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad n\geq\frac{7}{\varepsilon}=::\nu_\varepsilon.$$

Тогда получаем, что $\forall\varepsilon>0$, $\exists\nu_\varepsilon=\dfrac{7}{\varepsilon}$, $\forall n\geq\nu_\varepsilon=\dfrac{7}{\varepsilon}$ $\Rightarrow$ $\left|\dfrac{2n^2-5n+1}{n^2+n+1}-2\right|\leq\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-5n+1}{n^2+n+1}=2$.

При решении этого примера мы получили различные значения ν_ε. Это означает, что в ε-окрестность точки 2 в первом случае попали члены последовательности, начиная с номера $n\geq\dfrac{8}{\varepsilon}$, а во втором – с номера $n\geq\dfrac{7}{\varepsilon}$. Отметим, что конкретное значение ν_ε не существенно. Важно, что существует хоть какое-нибудь, обладающее требуемым свойством.

Замечание. Проводимые при решении таких примеров оценки могут быть достаточно грубыми. Главная цель — получить достаточно простое неравенство относительно n, причем решение его должно иметь вид $n\geq A(\varepsilon)$.

Пример 4.9. Доказать, исходя из определения, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=1$.

Р е ш е н и е. Зададим $\varepsilon>0$ и рассмотрим

$$\left|\sqrt{n^2+2n}-n-1\right|=\left|\sqrt{n^2+2n}-(n+1)\right|=$$

= [домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, т.е. на сумму $\sqrt{n^2+2n}+(n+1)$; в числителе получим разность квадратов] =

$$=\left|\frac{(\sqrt{n^2+2n}-(n+1))(\sqrt{n^2+2n}+(n+1))}{\sqrt{n^2+2n}+(n+1)}\right|=\left|\frac{(n^2+2n)-(n+1)^2}{\sqrt{n^2+2n}+(n+1)}\right|=$$

$$=\left|\frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{\sqrt{n^2+2n}+(n+1)}\right|=\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}+(n+1)}\le\frac{1}{n}\le\varepsilon\Leftrightarrow n\ge\frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно, $\forall\varepsilon>0\ \exists\nu_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon},\quad \forall n\ge\nu_\varepsilon,\quad \left|\sqrt{n^2+2n}-n-1\right|\le\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=1$.

Пример 4.10. Доказать, исходя из определения, что последовательность $\frac{n^2-(-1)^n}{n+1}$ является бесконечно большой.

Р е ш е н и е. Требуется доказать, что, $\forall\varepsilon>0\quad\exists\nu_\varepsilon,\quad\forall n\ge\nu_\varepsilon\quad\Rightarrow$ $\left|\frac{n^2-(-1)^n}{n+1}\right|\ge\varepsilon$. Рассмотрим $\left|\frac{n^2-(-1)^n}{n+1}\right|=\frac{n^2-(-1)^n}{n+1}\ge\frac{n^2-1}{n+1}=n-1\ge\varepsilon\quad\Leftrightarrow$ $n\ge1+\varepsilon$.

Положим $\nu_\varepsilon=1+\varepsilon$. Из решения следует, что $\forall n\ge\nu_\varepsilon\quad\Rightarrow$ $\left|\frac{n^2-(-1)^n}{n+1}\right|\ge\varepsilon$. А это и означает,что последовательность $\frac{n^2-(-1)^n}{n+1}$ является ббп.

Упражнение 4.1. Доказать, исходя из определения, что:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-5n}{2+10n}=-\frac{1}{2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}=1$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^n}{3n+2}=\frac{2}{3}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+2\sqrt{n}}{n+2}=0$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sin n+2}{n^2+2n+2}=0$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}+1}{4n-3}=\infty$;
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-3n^2}{6n^2+5}=-\frac{1}{2}$;
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}=1$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{4n^2-1}}=\dfrac{1}{2}$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\cdot 5^n-4^n}{4^n+5^n}=4$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+(-1)^n)n}{2^n+n}=0$;

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=0$;

13. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-3\sqrt{n})=\infty$;

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}=\infty$;

Вычисление пределов с использованием эталонных

Вычислить:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{0.5}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt[2]{0.5}}=1.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{10}-2}{1+\sqrt[n]{0,001}}=\dfrac{1-2}{1+1}=-\dfrac{1}{2}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{9}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{(\sqrt[n]{3}-1)(\sqrt[n]{3}+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\sqrt[n]{3}+1)}=\dfrac{1}{2}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{7n^3}+\sqrt[n]{7}}{3\sqrt[n]{n^2}+\sqrt[n]{3n}}=\left[\sqrt[n]{n^3}=(\sqrt[n]{n})^3\right]=\dfrac{1+1}{3+1}=\dfrac{1}{2}.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\lg n}{n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^2-1}\dfrac{\lg n}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2-1}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n}=1\cdot 0=0.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+\lg n}{n-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n\left(5+\dfrac{\lg n}{n}\right)}{n\left(1-\dfrac{3}{n}\right)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{\lg n}{n}}{1-\dfrac{3}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{\lg n}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n}\right)}=5.$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_4(n^3+2)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_4 n^3(1+\dfrac{2}{n^3})}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_4 n^3+\log_4(1+\dfrac{2}{n^3})}{n}=$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\log_4 n + \log_4(1+\frac{2}{n^3})}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\log_4 n}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\log_4(1+\frac{2}{n^3})}{n} = 3+0=3,$$

так как $\frac{\text{бмп}}{\text{ббп}} = \text{бмп}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(n+1)\cdot n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{3^n}{n!} = 0$, как произведение ограниченной последовательности на бмп.

10.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n!}{2^n + (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\left(\frac{3^n}{n!}+1\right)}{(n+1)!\left(\frac{2^n}{(n+1)!}+1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{n!}+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{(n+1)!}+1\right)} = 0.$$

Подпоследовательности

Последовательность (b_k) называют подпоследовательностью последовательности (a_n), если для $\forall k \in \mathrm{N}\ \exists n_k \in \mathrm{N}$ такое, что $b_k = a_{n_k}$ и при этом $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Подпоследовательность последовательности (a_n) обычно обозначают символом (a_{n_k}).

Если последовательность (a_n) имеет предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

Если из последовательности (a_n) можно выделить две подпоследовательности, имеющие разные пределы, то последовательность (a_n) предела не имеет.

Пример 4.11. Показать, что последовательность $(a_n) = ((-1)^n)$ не имеет предела.

Р е ш е н и е. Построим две подпоследовательности: $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ и $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$, то последовательность (a_n) предела не имеет.

Эквивалентные последовательности

Последовательности (a_n) и (b_n) называют *эквивалентными* при $n \to \infty$ и обозначают $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$. В частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \neq 0$, то $a_n \sim a$, $n \to \infty$.

При нахождении пределов множители в числителе и знаменателе можно заменять эквивалентными. Т.е., если $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n c_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n c_n)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{b_n}$.

Пример 4.12. Показать, что многочлен $a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k$, где $a_j \in \mathrm{P}, j = \overline{0,k}$, $k > 0$, $a_0 \neq 0$, эквивалентен $a_0 n^k$ при $n \to \infty$.

Р е ш е н и е. Составим отношение и рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{a_0 n^k} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{n} + \frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{a_k}{a_0}\cdot\frac{1}{n^k}\right) =$$

$$= \left[\text{предел суммы равен сумме пределов; } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^m} = 0 \text{ при } m > 0\right] = 1.$$

Следовательно, $a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k \sim a_0 n^k$, $n \to \infty$.

Пример 4.13. Доказать, что $\sqrt{n^2 + 2n + 3} + \sqrt{n^2 + n + 1} \sim 2n$ при $n \to \infty$.

Р е ш е н и е. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + \sqrt{n^2 + n + 1}}{2n} =$$

$$=\left[\text{разделим почленно на } n \text{ и внесем } n \text{ под знак корня}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right) =$$

$$=\left[\text{предел суммы равен сумме пределов, } \frac{1}{n} \to 0,\ \frac{1}{n^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Таким образом, $\sqrt{n^2 + 2n + 3} + \sqrt{n^2 + n + 1} \sim 2n$ при $n \to \infty$.

Раскрытие неопределенностей

При разыскании пределов арифметических комбинаций последовательностей часто встречаются ситуации, когда применение теорем о пределе суммы, частного, произведения и т. п. невозможно (даже в случае, когда пределы отдельных компонент комбинации существуют). Так, нахождение предела произведения $a_n b_n$ в случае, когда (a_n) — бесконечно малая последовательность, а (b_n) — бесконечно большая последовательность, может приводить к разным результатам. Например, если

1) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$;

2) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n^3$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$;

3) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n^2$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Аналогично, нельзя применить теоремы о пределах при отыскании $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$, когда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Подобные выражения, где невозможно непосредственное применение теорем о пределах, называют неопределенными выражениями (неопределенностями). К ним относятся пределы, которые символически можно обозначить как $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $(+\infty-(+\infty))$ и некоторые другие. Так, под символической записью $\frac{0}{0}$ понимаем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, где $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Аналогично и с другими неопределенностями. При разыскании пределов в таких ситуациях обычно помогают предварительные преобразования, замена эквивалентными, использование табличных пределов.

Пример 4.14. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n+2}{n^3+1}$.

Р е ш е н и е. Так как $2n^3-3n+2 \sim 2n^3$, $n^3+1 \sim n^3$, $n\to\infty$ (см. пример 12), то, заменяя эквивалентным числитель и знаменатель, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n+2}{n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3}{n^3} = 2$.

Пример 4.15. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+...+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+...+b_k}$, где $a_j, b_i \in \mathrm{P}$, $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,k}$, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$.

Р е ш е н и е. Используя замену многочленов в числителе и знаменателе эквивалентными, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+...+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+...+b_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m}{b_0n^k}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, \text{если } m=k,\\ \infty, \text{если } m>k,\\ 0, \text{если } m<k.\end{cases}$$

Пример 4.16. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{4n^2+1}-2n)$.

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{4n^2+1}-2n)=[\infty(\infty-\infty)]=\text{[умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное скобке, т.е. на } \sqrt{4n^2+1}+2n\text{]}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\frac{(\sqrt{4n^2+1}-2n)(\sqrt{4n^2+1}+2n)}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(4n^2+1-4n^2\right)}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n}=\frac{1}{4},$$

так как $\sqrt{4n^2+1}+2n=2n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{4n^2}}+1\right)\sim 4n$ при $n\to\infty$.

Пример 4.17. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{2}{3^2\cdot 5^2}+...+\frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}+...+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}\right).$$

Р е ш е н и е. С ростом n число слагаемых в n-м члене последовательности увеличивается. Поэтому нельзя воспользоваться теоремой о сумме пределов. Для отыскания предела преобразуем n-й член последовательности, представив каждое из слагаемых в виде разности, используя равенство

$$\frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\right).$$

В результате получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{2}{3^2\cdot 5^2}+\ldots+\frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}\right)+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)\right)=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Пример 4.18. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}\right)$.

Р е ш е н и е. Используя равенство

$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!},$$

запишем каждое из слагаемых суммы, стоящей под знаком предела, в виде разности. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+-\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1.$$

Пример 4.19. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right)$.

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=[\text{домножим и разделим на сопряженное выражение}]=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n+\sqrt{n}} - n}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} + \sqrt{n}} =$$

$$= \left[\sqrt{n+\sqrt{n}} \sim \sqrt{n},\ \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n},\ n\to\infty\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

Пример 4.20. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5 + 3^{2n} + \lg(n+2)}{10^n - 3n^{10} + \lg(n^2+1)}$.

Р е ш е н и е. Так как $n^5 + 3^{2n} + \lg(n+2) \sim 3^{2n}$, $10^n - 3n^{10} + \lg(n^2+1) \sim$ $\sim 10^n$ при $n\to\infty$ (см. эталонные пределы), то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 3^{2n} + \lg(n+2)}{10^n - 3n^{10} + \lg(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n}}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0.$$

(см. пример 1, с. 27, в котором полагаем $q = \dfrac{9}{10} < 1$).

Пример 4.21. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6^{2n} + n^2 + \log_6(n^{10}+1)}{n! + 100^n + n^{99}}$.

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6^{2n} + n^2 + \log_6(n^{10}+1)}{n! + 100^n + n^{99}} = [\left(\frac{\infty}{\infty}\right),\quad 6^{2n} + n^2 + \log_6(n^{10}+1) \sim 6^{2n},$$

$n! + 100^n + n^{99} \sim n!$ при $n\to\infty$, см. эталонные пределы] $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6^{2n}}{n!} = 0$.

Пример 4.22. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n}}{n+2} \cos\dfrac{n^2+1}{n} + \dfrac{2n+1}{3n+2}\right)$.

Р е ш е н и е. Убедимся, что существует предел каждого из слагаемых. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n} = 0$, а $\left(\cos\dfrac{n^2+1}{n}\right)$ — ограниченная последовательность (см. свойство 3 бесконечно малой последовательности), то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+2}\cos\dfrac{n^2+1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{3n}=\dfrac{2}{3}$. Следовательно, предел каждого из слагаемых существует. Воспользуемся свойством: предел суммы равен сумме пределов. В результате:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+2}\cos\frac{n^2+1}{n}+\frac{2n+1}{3n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2}\cos\frac{n^2+1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\frac{2}{3}.$$

Пример 4.23. Выяснить, при каких x последовательность (a_n), где $a_n=\dfrac{2x+1}{3}+\dfrac{(2x+1)^2}{3^2}+\ldots+\dfrac{(2x+1)^{2n}}{3^{2n}}$, сходится, и найти для таких x $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Решение. n-й член последовательности представляет собой сумму $2n$ слагаемых геометрической прогрессии с первым членом $b_1=\dfrac{2x+1}{3}$ и знаменателем $q=\dfrac{2x+1}{3}$. Так как $b_1+b_1q+\ldots+b_1q^{k-1}=$ $=\dfrac{b_1(1-q^k)}{1-q}$, $q\neq 1$, то

$$a_n=\frac{2x+1}{3}+\frac{(2x+1)^2}{3^2}+\ldots+\frac{(2x+1)^{2n}}{3^{2n}}=\frac{2x+1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{2x+1}{3}\right)^{2n}}{1-\frac{2x+1}{3}}=$$

$$=\frac{2x+1}{2-2x}\left(1-\left(\frac{2x+1}{3}\right)^{2n}\right),$$

при условии $\dfrac{2x+1}{3}\neq 1$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)^{2n}=0$ при $q=\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)^2<1$ (см. пример 1, с. 27), а при $q>1$ предел равен бесконечности, то последовательность сходится при условии

$$\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2<1\Leftrightarrow|2x+1|<3\Leftrightarrow-3<2x+1<3\Leftrightarrow-2<x<1.$$

Если же $\dfrac{2x+1}{3}=1$, т. е. $x=1$, то в этом случае получаем $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1+\ldots+1)=\lim\limits_{n\to\infty}(2n)=+\infty$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3}+\frac{(2x+1)^2}{3^2}+\ldots+\frac{(2x+1)^{2n}}{3^{2n}}\right)=\frac{2x+1}{2(1-x)} \text{ при } x\in(-2;1).$$

Для остальных x последовательность (a_n) расходится.

Пример 4.24. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{9}-1}{\sqrt[n]{6}+\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}-1}$.

Р е ш е н и е. Так как $\sqrt[n]{a}\to 1$ при $n\to\infty$, то имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Преобразуем числитель и знаменатель:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{9}-1}{\sqrt[n]{6}+\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{3})^2-1}{\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{3}-1)(\sqrt[n]{3}+1)}{(\sqrt[n]{3}-1)(\sqrt[n]{2}+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}+1}{\sqrt[n]{2}+1}=\frac{1+1}{1+1}=1.$$

Пример 4.25. Построить график функции $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x+x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

Р е ш е н и е. Найдем предел, считая x параметром. Выражение под знаком предела определено для всех $x\in$ Р. Так как $x^{2n}\to 0$ при $|x|<1$, $x^{2n}\to+\infty$ при $|x|>1$, то рассмотрим случаи:

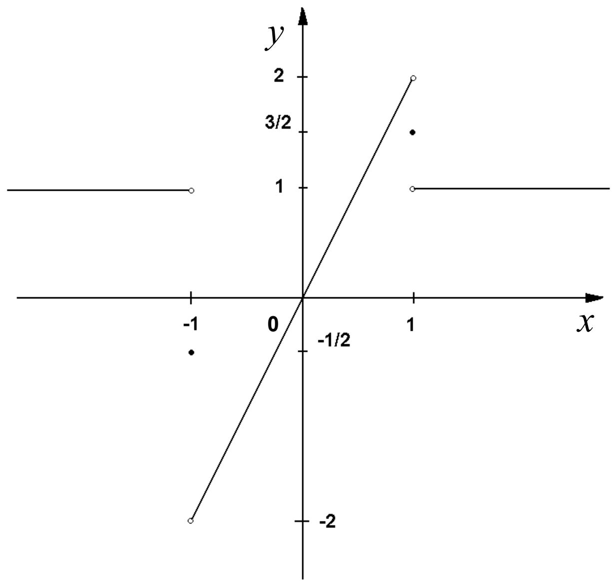
а) $|x|<1$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x+x^{2n}}{1+x^{2n}}=\dfrac{2x+0}{1+0}=2x$;

б) $|x|>1$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x+x^{2n}}{1+x^{2n}}=\left[\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\right.$, замена эквивалентными$\left.\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{x^{2n}}=1$;

в) $x=1$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x+x^{2n}}{1+x^{2n}}=\dfrac{2+1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$;

г) $x=-1$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x+x^{2n}}{1+x^{2n}}=\dfrac{-2+1}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$.

Таким образом, $f(x)=\begin{cases} 2x, \text{ если } |x|<1; \\ 1, \text{ если } |x|>1; \\ \dfrac{3}{2}, \text{ если } x=1; \\ -\dfrac{1}{2}, \text{ если } x=-1. \end{cases}$ и график имеет следующий вид:



Упражнение 4.2. Найти предел последовательности

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$ (*Ответ:* 4.)

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+...+(2n+1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right)$ (*Ответ:* 1/2.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+3n+1}-3n\right)$ (*Ответ:* 1/2.)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{\sqrt{16n^4+4n^2+1}}$ (*Ответ:* 1/8.)

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4(n+2)!+3(n+1)!}{2(n+2)!-3(n+1)!}$ (*Ответ:* 2.)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+4}+2n)^2}{\sqrt[4]{n^8+n^4+16}}$ (*Ответ:* 9.)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+2n^2-2}+\sqrt[3]{n^4+n^2+1}}{\sqrt[4]{n^6+n^3+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+7}}$ (*Ответ:* 1.)

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)^4-(n+2)^4}{(n+1)^4+(2n+1)^4}$ (*Ответ:* 15/17.)

9. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n)$ (*Ответ:* 1/3.)

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+...-2n}{\sqrt{9n^2+1}+\sqrt{4n^2+1}}$ (*Ответ:* – 1/5.)

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+...+n}{n+5}-\dfrac{n}{2}\right)$ (*Ответ:* – 2.)

Упражнение 4.3. Найти предел последовательности

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n!}{\sqrt{n^3+n+1}}$ (*Ответ:* 0.)

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\sin(\ln n)$ (*Ответ:* 0.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^n+n^{10}}{n!+20^n}(\sin n+\cos n)$ (*Ответ:* 0.)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^3-n^3}{(n-1)^3+n^3}\sin\dfrac{n!}{\sqrt{n}+1}$ (*Ответ:* 0.)

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n}{3^n-n}\sin(3^n+2^n)$ (*Ответ:* 0.)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\ln n}\sin(\cos\sqrt{n})$ (*Ответ:* 0.)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+1}{n!+1}\cos(n^2+1)$ (*Ответ:* 0.)

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{2^n}\cos\dfrac{2^n}{n^2+2}$ (*Ответ:* 0.)

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{2^{n+3}}(4\cdot(-1)^{n+4})$ (*Ответ:* 0.)

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg(2+\sqrt{n})}{2+\sqrt{n}}\sin(\sqrt{n}+2)$ (*Ответ:* 0.)

Число *e*

Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$. Справедливы и такие равенства:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{1/\alpha_n} = e,$$

где (α_n) — бесконечно малая последовательность;

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\beta_n}\right)^{\beta_n} = e,$$

где (β_n) — бесконечно большая последовательность.

Отметим, что в этих случаях имеется неопределенность вида (1^∞).

Пример 4.26. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3}$.

Р е ш е н и е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3} = [\dfrac{n+2}{n+1}\to 1,\ \ 2n+3\to\infty$ при $n\to\infty$, неопределенность $(1^\infty)]$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\right)^{\frac{2n+3}{n+1}} =$ $[(1+\alpha_n)^{1/\alpha_n}\to e,\ \dfrac{2n+3}{n+1}\to 2$ при $n\to\infty] = e^2$.

Пример 4.27. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-n+5}{3n^2+n+5}\right)^{6n+1}$.

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-n+5}{3n^2+n+5}\right)^{6n+1}=[1^\infty]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2n}{3n^2+n+5}\right)^{6n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2n}{3n^2+n+5}\right)^{\frac{3n^2+n+5}{-2n}}\right)^{\frac{(6n+1)(-2n)}{3n^2+n+5}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(6n+1)(-2n)}{3n^2+n+5}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n\cdot(-2n)}{3n^2}}=e^{-4}.$$

Упражнение 4.4. Найти предел последовательности:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+3}{2n^2-2n-3}\right)^{n}$ (*Ответ:* e^2.)

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+2n+3}{3n^2-2n+3}\right)^{3n+1}$ (*Ответ:* e^4.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n+n^2+1}{2^n+2n^2+3}\right)^{2^n}$ (*Ответ:* 0.)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{2n+2}$ (*Ответ:* e^{-2}.)

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n-2}\right)^{\frac{2n^2+n+1}{n+3}}$ (*Ответ:* $e^{8/3}$.)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n+2}{n^2-4n+10}\right)^{\frac{(3n+1)(2-n)}{n}}$ (*Ответ:* e^{-18}.)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2\ln n}{n+2}\right)^{\frac{2n(n+1)}{n\ln n+4}}$ (*Ответ:* e^4.)

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5-2n^2}{3-2n^2}\right)^{\frac{(n+1)^3}{n+3}}$ (*Ответ:* e^{-1}.)

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{4-2n}{n}\right)^{3n+4\sqrt{n}}$ (*Ответ:* e^{12}.)

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{12-6n}{5-3n}-1\right)^{\frac{2n^3+n-13}{n^2+n+1}}$ (*Ответ:* $e^{-4/3}$.)

Критерий Коши сходимости последовательности

Для сходимости последовательности (a_n) необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной, т. е. чтобы для нее выполнялось условие Коши:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\nu_\varepsilon,\ \forall n \ge \nu_\varepsilon,\ \forall p \ge 0 \Rightarrow \left|a_{n+p} - a_n\right| \le \varepsilon .$$

Пример 4.28. Используя критерий Коши, доказать сходимость последовательности (a_n), где $a_n = \dfrac{\cos 1}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos 2}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{\cos n}{n(n+1)}$.

Р е ш е н и е. Возьмем $\forall\varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| =$$

$$= \left|\frac{\cos 1}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n}{n(n+1)} + \frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)(n+p+1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos 1}{1\cdot 2} - \frac{\cos 2}{2\cdot 3} - \ldots - \frac{\cos n}{n(n+1)}\right| = \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)(n+p+1)}\right| \le$$

$$\le [|a + \mathrm{b}| \le |a| + |b|] \le \frac{|\cos(n+1)|}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{|\cos(n+p)|}{(n+p)(n+p+1)} \le \left[|\cos\alpha| \le 1\ \forall\alpha\right] \le$$

$$\le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \left[\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \le [\forall p \ge 0] \le \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} \le \varepsilon \Leftrightarrow n \ge \frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\nu_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon},\ \ \forall n \ge \nu_\varepsilon,\ \ \forall p \ge 0 \Rightarrow \left|a_{n+p} - a_n\right| \le \varepsilon$. А это означает, что для последовательности (a_n) выполняется условие Коши, т. е. последовательность является фундаментальной. Согласно достаточному условию критерия Коши, последовательность (a_n) сходится.

Пример 4.29. С помощью критерия Коши доказать расходимость последовательности (a_n), где $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

Р е ш е н и е. Покажем, что для последовательности (a_n) выполняется отрицание условия Коши. Так как условие Коши имеет вид $\forall\varepsilon>0\ \exists\nu\ \forall n\ge\nu\ \forall p\ge 0 \Rightarrow \left|a_{n+p}-a_n\right|\le\varepsilon$, то отрицание этого условия запишется следующим образом: $\exists\varepsilon_0>0\ \forall\nu_\varepsilon\ \exists n\ge\nu_\varepsilon\ \exists p\ge 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow\left|a_{n+p}-a_n\right|>\varepsilon_0$. Выполнение такого условия означает, что последовательность расходится. Рассмотрим

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|=\left|\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\ldots+\frac{1}{n+p}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}=\left[\text{положим } p=n\right]=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}>$$

$$>\left[\text{заменяя каждое из слагаемых на } \frac{1}{2n}\text{, получим строгое неравенство}\right]>$$

$$>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$ такое, что $\forall\nu$, $\exists n$, $\exists p=n$ $\Rightarrow$ $\left|a_{n+p}-a_n\right|>$ $\Rightarrow\left|a_{n+p}-a_n\right|>\varepsilon_0$. Это означает, что последовательность (a_n) расходится.

Упражнение 4.5. Используя критерий Коши, доказать сходимость последовательностей:

1. $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$;
2. $a_n=\dfrac{4n+1}{n}$;
3. $a_n=\dfrac{n+2}{2n+3}$;
4. $a_n=\dfrac{7+3n}{5+n}$;
5. $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{arctg}k}{k^2+1}$;
6. $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(kx)}{k(2k+1)}$;
7. $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+2)}$;
8. $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx+\cos 2kx}{2^{k-1}}$;
9. $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$;
10. $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{arctg}(2^k+k)}{2^k}$.

При нахождении пределов может быть использована и следующая

Теорема. *Любая монотонная ограниченная последовательность сходится. Если последовательность монотонна и неограничена, то она является бесконечно большой последовательностью определенного знака.*

Отметим, что если монотонная последовательность является возрастающей (строго возрастающей), то она ограничена снизу первым членом последовательности. Если монотонная последовательность является убывающей (строго убывающей), то она ограничена сверху первым членом последовательности. Следовательно, для доказательства ограниченности монотонной последовательности достаточно доказать ограниченность сверху возрастающей последовательности и ограниченность снизу убывающей последовательности.

Пример 4.30. Доказать существование предела последовательности (a_n) и найти его, если $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ знаков корней}}$.

Р е ш е н и е. Покажем, что последовательность (a_n) ограничена. Заметим, что $a_n > 0 \quad \forall n$ и докажем ограниченность сверху:

$$a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} < \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{4}}}} =$$

$$= [\text{последовательно извлечем корни}] = 2.$$

Таким образом, $0 < a_n < 2 \ \forall n$.

Докажем монотонность последовательности (a_n):

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} > [\text{учитывая, что } 0 < a_n < 2] > \sqrt{a_n + a_n} = \sqrt{2a_n} > \sqrt{a_n^2} = a_n.$$

Т.е. $a_{n+1} > a_n$. Итак, последовательность (a_n) возрастает и ограничена, поэтому она имеет конечный предел. Обозначим его через a, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. А тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Поскольку $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$, то переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$a^2 = 2 + a \ \Leftrightarrow \ a^2 - a - 2 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни $a_1 = -1$, $a_2 = 2$. Так как $a_n > 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$, следовательно, $a = 2$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Упражнение 4.6. Доказать существование предела последовательностей:

1. $a_n = b_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_n}{10^n}$, $b_k \in \{0;1;2;\ldots;9\}$, $k \in \mathrm{N}$.

2. $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

3. $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$.

4. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$. (Указание: $\lg(1+x) \le x$, $x > 0$.)

5. $a_n = \frac{n!}{(2n+1)!}$.

6. $a_n = \frac{n^3}{10^n}$.

7. $a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}$, $a_1 = 13$.

5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ, СОСТАВЛЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание I. Доказать, исходя из определения, что:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{3n^2+n+\sin\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{3}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(n+\sqrt{n}+1)}{2+\sqrt{n}+\sqrt[4]{n}}=0$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^n}{3^{n+1}-2^n}=\dfrac{1}{3}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n\sin^2\frac{1}{n^2}}{4-n^2}=-1$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+\cos\frac{1}{n}+(-1)^n}{n+5}=3$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+9}{\sin\frac{1}{n}+3n^2}=\dfrac{1}{3}$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{4^n+3^n}=0$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{\sqrt{n^3+n}}=0$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n+\cos n}{\sqrt{n}+n}=0$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n(2n-1)}{10^n+2n}=0$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(2n+3n^2)}{n+\sqrt{n}}=0$;

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{5}{n}}{\sqrt[3]{n^3+9}}=0$;

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 3^n}{n+3^n}=\infty$;

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{\sqrt{n}+3}=\infty$;

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot n^2}{2n-5}=\infty$;

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3++n+1}{3n^2+n+3}=\infty$;

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-4n}{2n+5}=-2$;

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sin n}{n^3+n+1}=0$;

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2n^2+n+1}=0$;

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\left(\sqrt{n}\,\dfrac{\pi}{2}\right)=0$;

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n-1}{4n^2+3n+2}=\dfrac{1}{4}$;

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+\sin^2 n^2}=0$;

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-2n}{4+3n}=-\dfrac{2}{3}$;

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2^n}{3^n}=0$;

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n-18}{n^2+n+1}=2$;

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{12}}{2+\lg n}=0$;

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{3n+2}=1$;

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+(-2)^n}{3^n}=0$;

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+18}{3n}=\dfrac{1}{3}$;

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2(-1)^n}{n+\sqrt{n}}=0$;

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+\operatorname{arctg} n}=2$;

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+4}{7n+8}=\dfrac{3}{7}$;

33. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+\sqrt{n^2+2}}=0$;

34. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{(n+1)2^n}=0$;

35. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-32n}{16n+15}=-2$;

36. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(n^2+n)}{1+\sqrt{n}}=0$;

37. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{n^2+2}=\infty$;

38. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n^2+3n+1}=0$;

39. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n+\sin^2\frac{2}{n}}=3$;

40. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+23}{5-6n}=-\dfrac{1}{2}$;

41. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+(-1)^n}{2\sqrt{n}+3n}=\dfrac{2}{3}$;

42. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+4n+3}{7n+5}=\infty$.

Задание II. Доказать расходимость последовательности:

1. $a_n=4-3\sin\dfrac{n\pi}{4}$;

2. $a_n=2\cdot(-1)^n+7$;

3. $a_n=\dfrac{(-1)^n n^2+1}{n^2+1}$;

4. $a_n=\cos\dfrac{2\pi n}{3}$;

5. $a_n=(-1)^{n+1}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$;

6. $a_n=1+\sin\dfrac{n\pi}{8}$;

7. $a_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\sin\dfrac{(n+1)\pi}{2}$;

8. $a_n=\dfrac{2+(-1)^n n}{3+2n}$;

9. $a_n=\dfrac{2+3(-1)^n}{5}+\dfrac{2n}{n+1}$;

10. $a_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}+\cos n\pi$.

Задание III. Найти предел последовательности:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{16}-1}{\sqrt[n]{4}-1}$ (*Ответ:* 2.)

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{9}+2\sqrt[n]{3}-3}{\sqrt[n]{3}-1}$ (*Ответ:* 4.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{8n^3}-1}{\sqrt[n]{2n}-1}$ (*Ответ:* 3.)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{5}-1}{2\sqrt[n]{25}+\sqrt[n]{5}-3}$ (*Ответ:* 5.)

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^2}+\sqrt[n]{n}-2}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}$ (*Ответ:* –3.)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{e}-1}{3\sqrt[n]{e^2}-2\sqrt[n]{e}-1}$ (*Ответ:* 1/4.)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1-\sqrt[n]{4}}-\dfrac{2\sqrt[n]{4}}{1-\sqrt[n]{16}}\right)$ (*Ответ:* 1/2.)

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{6}-\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}+1}{(\sqrt[n]{9}-1)(\sqrt[n]{4}-1)}$ (*Ответ:* 1/4.)

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\sqrt[n]{27}}{1-\sqrt[n]{81}}$ (*Ответ:* 3/4.)

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}{\sqrt[n]{n^2}+2\sqrt[n]{n}-3}$ (*Ответ:* –1/4.)

Задание IV. Найти предел последовательности:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3^n+\lg^4 n}{n+3^{n+1}+n!}$ (*Ответ:* 0.)

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_5 n+n+3}{\sqrt[6]{n}+\sqrt{n^5}+2}$ (*Ответ:* 0.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+3n^{10}+2^n}{2^{n+1}+\ln n^2+2}$ (*Ответ:* 1/2.)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^{12}+(2n+3)n!}{(n+1)!+2^n+\log_3 n}$ (*Ответ:* 2.)

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+n^5+3^n}{3^n+\log_7 n+5^{n+2}}$ (*Ответ:* 1/25.)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2^n+\log_2 n^3}{n^3+3^n+\log_3 n^2}$ (*Ответ:* 0.)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\ln n^3+n^2-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}+(2n+1)n+\log_3 n^2}$ (*Ответ:* 1/2.)

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+n^5+2^n}{10^n+5^n+n\cdot n!}$ (*Ответ:* 1.)

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2^n}+(n+2)!}{n(5^n+2(n+1)!)}$ (*Ответ:* 1/2.)

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{2n}+n^5+\log_5 n}{2^{4n}+n^8+3\log_5 n}$ (*Ответ:* 1.)

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\log_8(2n+1)}{2^n+n^5}$ (*Ответ:* 0.)

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n+1}+n^6+\ln n^2}{9^n+n^9+\log_9 n}$ (*Ответ:* 3.)

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n+1)(n^2-2)}{(n+1)^4-n(n-2)^3-10n^3}$ (*Ответ:* –5/6.)

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-2n(2n-1)^2}{(n-2)^3-n(n+3)^2}$ (*Ответ:* –5/3.)

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{3n+1}-\dfrac{2n^2+3}{6n-1}\right)$ (*Ответ:* –1/6.)

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-2-\dfrac{9(n+1)(n+3)}{3n-8}\right)$ (*Ответ:* –22.)

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2}$ (*Ответ:* 3.)

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3-1}{3n^2+1}-\dfrac{6n^3+3n^2}{9n^3+3n^2+1}\right)$ (*Ответ:* –1/9.)

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+n)^5-n^5-10n^4}{(5n+1)^2(3-2n)}$ (*Ответ:* –4/5.)

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+8}{2n^2+5}-\dfrac{n^2+4}{2n+7}\right)$ (*Ответ:* 7/4.)

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^4+3n^2+5}{n^3+9}-2n+3\right)$ (*Ответ:* 3.)

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-n)^4-n^4+8n^3}{(n-1)^3-(n+1)^3}$ (*Ответ:* –4.)

Задание V. Найти предел последовательности:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n}$ (*Ответ:* e^{-1}.)

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{2n+2}$ (*Ответ:* e^{-2}.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2n+1}{2n^2+1}\right)^{n-3}$ (*Ответ:* e.)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n^2}{2^n}\right)^{\frac{2^n+3n^2}{n^2}}$ (*Ответ:* e.)

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-2n}{5-2n}\right)^{12n+5}$ (*Ответ:* e^{24}.)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2-2n-3}{5n^2+3n+2}\right)^{\frac{2n^2+3}{3n+2}}$ (*Ответ:* $e^{-2/3}$.)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{4n^2+3n+1}$ (*Ответ:* e^{-4}.)

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10-3n}{100-3n}\right)^{\frac{n^2+3n+5}{10n+1}}$ (*Ответ:* e^{3}.)

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-2^{n+1}}{5-2^{n+1}}\right)^{7\cdot 2^n+5}$ (*Ответ:* e^{14}.)

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n\sqrt[3]{n}+4}{n\sqrt[3]{n}+5}\right)^{\frac{n^2}{2\sqrt[3]{n^2}+3}}$ (*Ответ:* $\sqrt{e}$.)

Задание VI. Найти предел последовательности:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{3}\right)$ (*Ответ:* 3.)

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+5}{1+2+\ldots+n}$ (*Ответ:* 6.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$ (*Ответ:* $\sqrt{2}/2$.)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$ (*Ответ:* 1/2.)

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}\right)$ (*Ответ:* 0.)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)}{n^3}$ (*Ответ:* 1/3.)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)$ (*Ответ:* 1/2.)

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2-7n-4}{4+7+10+\ldots+(3n+1)}$ (*Ответ:* 4.)

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2+1+4+\ldots+(3n-5)}{(n+5)^3-(n+3)^3}$ (*Ответ:* 1/4.)

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{4n^2-8n+3}\right)$ (*Ответ:* – 1/2.)

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n+2}+\sqrt{n^2+n+1}}{1-2+3-4+\ldots-2n}$ (*Ответ:* – 2.)

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2n+1}+\frac{(n+1)^2}{3-2n}\right)$ (*Ответ:* – 2.)

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+6+11+\ldots+(5n-4)}{\sqrt{100n^4-10n^2+1}}$ (*Ответ:* 1/4.)

Задание VII. При каких значениях параметра существует предел? Найти его для этих значений параметра.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2^2x^2}+\ldots+\frac{1}{2^nx^n}\right)$ (*Ответ:* $\frac{1}{2x-1}$, $|x|>\frac{1}{2}$.)

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}+\ldots+\frac{2^nx^n}{(1+x^2)^n}\right)$ (*Ответ:* $\frac{1+x^2}{1-2x+x^2}$, $x\neq\pm 1$.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}+\frac{x^2}{(2x+1)^2}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(2x+1)^{n+1}}\right)$

(*Ответ:* $\frac{x}{1+x}$, $x\in(-\infty;-1)\bigcup(-1/3;+\infty)$.)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos x+\dfrac{\cos^2 x}{2}+\ldots+\dfrac{\cos^n x}{2^{n-1}}\right)$ (*Ответ:* $\dfrac{2\cos x}{2-\cos x}$, $x\in\mathrm{P}$.)

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3}+\dfrac{(2x+1)^2}{3^2}+\ldots+\dfrac{(2x+1)^{2n}}{3^{2n}}\right)$ (*Ответ:* $\dfrac{2x+1}{2(1-x)}$, $-2<x<1$.)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+(2x+3)+(2x+3)^2+\ldots+(3x+3)^n\right)$

(*Ответ:* $-\dfrac{1}{2(x+1)}$, $-2<x<1$.)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin x+\sin^2 x+\ldots+\sin^n x\right)$ (*Ответ:* $\dfrac{\sin x}{1-\sin x}$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathrm{Z}$.)

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+x^2)+x+\dfrac{x^2}{1+x^2}+\ldots+\dfrac{x^{n+1}}{(1+x^2)^n}\right)$ (*Ответ:* $\dfrac{(1+x^2)^2}{x^2-x+1}$, $x\in\mathrm{P}$.)

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^2+\dfrac{x^3}{1-x}+\ldots+\dfrac{x^n}{1-x}\right)$ (*Ответ:* $\dfrac{x^4-x^3+x^2}{(1-x)^2}$, $|x|<1$.)

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{(1-x)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(1-x)^n}\right)$ (*Ответ:* $-\dfrac{1}{x}$, $x\in(-\infty;0)\bigcup(2;+\infty)$.)

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2^2}{(x+1)^2}+\ldots+\dfrac{2^{n-1}}{(x+1)^{n-1}}\right)$

(*Ответ:* $\dfrac{2}{x-1}$, $x\in(-\infty;-3)\bigcup(1;+\infty)$.)

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2x+7}{x}+\dfrac{(2x+7)^2}{x^2}+\ldots+\dfrac{(2x+7)^n}{x^n}\right)$

(*Ответ:* $-\dfrac{2x+7}{x+7}$, $x\in(-7;-7/3)$.)

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+(x^2+x-1)+(x^2+x-1)^2+\ldots+(x^2+x-1)^n\right)$

(*Ответ:* $\dfrac{1}{2-x-x^2}$, $x\in(-2;-1)\bigcup(0;1)$.)

14. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+3^x+3^{2x}+\ldots+3^{nx})$ (*Ответ:* $\dfrac{1}{1-3^x}$, $x\in(-\infty;0)$.)

Задание VIII. Найти предел последовательности:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n^2]{7}+\sqrt[7n]{n^2}}{\sqrt[n]{2n}+\sqrt[n]{5}}$ (*Ответ:* 1.)

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\lg n}{n^2+\ln^2 n}(\sin n+\cos n)$ (*Ответ:* 0.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+\log_4(n^4+4)}{\sqrt[12]{n}+8}$ (*Ответ:* 0.)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+4}{4^n+2}\arcsin\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+3}$ (*Ответ:* 0.)

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt[n]{25}-3\sqrt[n]{5}-1}{(\sqrt[n]{5}-1)(\sqrt[n]{10}+4)}$ (*Ответ:* 1.)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+21n^4}{\log_3 n+3^{n-1}}$ (*Ответ:* 3.)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+3^n}{5^n+\lg\sqrt[6]{n+1}}\operatorname{arc\,tg}(4+(-1)^n n^2)$ (*Ответ:* 0.)

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+\lg n}{n!+2^n}\cos^2(n+3)$ (*Ответ:* 0.)

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt[n]{1,5n}+\sqrt[n^2]{2,5n^2}}{\sqrt[n]{2n}+\sqrt[n]{3n}}$ (*Ответ:* 3/2.)

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt[n]{4}-5\sqrt[n]{2}+2}{(1-\sqrt[n]{2})(1+\sqrt[n]{4})}$ (*Ответ:* – 1/2.)

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7-n^3+4\log_5 n}{\sqrt[3]{n}+2^n+16n^2}$ (*Ответ:* 0.)

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+n^5}{(n+1)!+2^{n+1}}\sin(4+n!)$ (*Ответ:* 0.)

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^2}-5\sqrt[n]{n}+4}{\sqrt[n]{n^2}-1}$ (*Ответ:* – 3/2.)

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+n^3+2^{n+1}}{2n+2^n+\log_5 n}$ (*Ответ:* 2.)

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2n+1}+\sqrt[n^2]{42n}\right)$ (*Ответ:* 2.)

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt[n]{3}-1)(\sqrt[n]{4}-1)}{(\sqrt[n]{2}-1)(\sqrt[n]{9}-1)}$ (*Ответ:* 1.)

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n!+n^3}{n!+3^n}$ (*Ответ:* 3.)

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+4\ln n}{\sqrt{n}+2^n}\sin^{25}(\pi\sqrt[3]{n})$ (*Ответ:* 0.)

Задание IX. Найти предел последовательности:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-2n^2+2n^5}{(n^3+3)(n-1)(n+4)}$ (*Ответ:* 2.)

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)(7-n-n^2)}{(n+4)(n-2)(3-3n-n^2)}$ (*Ответ:* 0.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)(n^3+3n+1)}{(n^2+2n+3)(2-3n+2n^2)}$ (*Ответ:* 1/2.)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+2n^2+2n+3}{(1-3n^2)(4n^2+4n+1)}$ (*Ответ:* – 1/12.)

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n}}{(n+3)(\sqrt{n}+1)}$ (*Ответ:* 1.)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+5})(n+7)}{\sqrt{n+4}}$ (*Ответ:* – 3/2.)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2n^2+n-16}{(n+5)(1-3n-3n^2)}$ (*Ответ:* – 1.)

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+33n}-n)(n+33)}{33n+32}$ (*Ответ:* 1/2.)

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5-2n)^2(n+1)^3}{(3-4n-8n^2)(n^3+1)}$ (*Ответ:* – 1/2.)

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4(2n-3)^4}{(n+3)(n+5)^2(n+6)^3(4n-1)^2}$ (*Ответ:* 16.)

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2-1}-n-1)n}{2n+1}$ (*Ответ:* – 1.)

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{5n+1}-\dfrac{3n^2+1}{15n+1}\right)$ (*Ответ:* – 2/75.)

13. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+3n+1}-3n-2)$ (*Ответ:* – 3/2.)

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5+3n+n^2}-\sqrt{8+5n+4n^2}}{\sqrt{9n^2+4n+1}}$ (*Ответ:* – 1/3.)

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+5n}-2n}{\sqrt{9n^2+7n}-3n}$ (*Ответ:* 15/14.)

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^5+1)(n^2+2)(3n^2-1)}{(n^4+2n^3+13)(4n^3+3n+1)(n^2-n+1)}$ (*Ответ:* 3/4.)

Учебное издание

Альсевич Лариса Алексеевна
Красовский Сергей Геннадьевич
Наумович Адольф Федорович
Наумович Нил Федорович

**ПРЕДЕЛЫ.
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ**

**Пособие для студентов
факультета прикладной математики и информатики**

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *С. Г. Красовский*

Подписано в печать 13.04.2011. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 3,39. Уч.-изд. л. 2,18.
Тираж 50 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
220030, Минск, проспект Независимости, 4.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
220030, Минск, проспект Независимости, 4.