Краткие сообщения

Short communications

УДК 534.11

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО НЕЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

***В. П. САВЧУК*[1], *П. А. САВЕНКОВ*[1]**

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Получено решение дифференциального уравнения, описывающего колебания упругой натянутой направляющей, состоящей из пакета струн, который заключен в упругий цилиндрический корпус. При этом движущаяся по направляющей сосредоточенная нагрузка моделируется материальной точкой. Колебательная система рассматривается с учетом того, что направляющая свободно лежит на опорах. Также учитываются действующие внешние и внутренние силы сопротивления движению направляющей. Начальные условия нулевые. В статье В. П. Савчука и О. В. Титюры «Прогиб струны под движущейся нагрузкой», опубликованной в журнале «Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика» (2004, № 1), прогиб направляющей под нагрузкой определялся путем решения уравнения с отклоняющимся аргументом и последующего применения численных методов для построения части профиля струны. В данной статье разрабатывается алгоритм нахождения прогиба упругой натянутой направляющей в виде набора кубических сплайнов. Все полученные результаты вычислений представлены в безразмерном виде.

Ключевые слова: уравнение колебаний; кубический сплайн; движущаяся нагрузка.

Образец цитирования:
Савчук ВП, Савенков ПА. Колебания упругой направляющей при движении по ней сосредоточенной нагрузки. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:62–66.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-62-66

For citation:
Savchuk VP, Savenkov PA. Elastic guide rail oscillation due to moving concentrated load. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;2:62–66. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-62-66

Авторы:
Владимир Петрович Савчук – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета.
Павел Андреевич Савенков – магистрант кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета. Научный руководитель – В. П. Савчук.

Authors:
Vladimir P. Savchuk, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.
savchuk@bsu.by
Pavel A. Savenkov, master’s degree student at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.
savenkov.pa@mail.ru

ELASTIC GUIDE RAIL OSCILLATION DUE TO MOVING CONCENTRATED LOAD

V. P. SAVCHUK[a], *P. A. SAVENKOV*[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: P. A. Savenkov (savenkov.pa@mail.ru)

This article illustrates the solution of a differential equation describing oscillations of an elastic tensioned guide rail, which consist of string bundle enclosed in an elastic cylindrical shell, while concentrated load, simulated by a material point, moves along it. The oscillatory system is considered in such way that the guide rail supports freely. The existing external and internal forces of resistance to movement of the guide rail are also taken into account. Initial and boundary conditions are zero. In article «A string bend under a moving load», published in the journal «Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika» (2004, No. 1), the deflection of a flexible guide rail under load was obtained by solving an equation with deviating argument. In this article, an algorithm is constructed for finding deflection of an elastic tensioned guide rail in the form of a cubic splines. All the results of calculations are presented in a dimensionless form.

Keywords: wave equation; cubic spline; moving load.

Будем считать, что упругая направляющая длиной l состоит из гибкого пролета, который заключен в упругий цилиндрический корпус, свободно лежащий на опорах. Пролет натянут с усилием T и представлен не одной струной, как в [1], а собран из отдельных гибких элементов, которые помещены в тонкостенную оболочку, объединяющую их в единый пакет. Элементы пакета считаем плотно прижатыми друг к другу и разделенными смазкой, а их оболочку – скрепленной с корпусом направляющей. Полагаем также, что пролет внутри корпуса имеет статический прогиб, позволяющий поддерживать корпус направляющей горизонтальным при отсутствии нагрузки.

Уравнение вертикальных колебаний направляющей при движении сосредоточенной нагрузки $p(t)$ запишем в виде [2–4]

$$EI\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mu_1 \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4}\right) + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right) + \mu_3 \frac{\partial u}{\partial t} = p(t)\delta(x - vt), \tag{1}$$

$$p(t) = -mg - my''(t),\ 0 \le t \le \frac{l}{v}.$$

Здесь $u(x, t)$ – прогиб; EI – жесткость (приближенно считается постоянной); ρ – линейная плотность направляющей; μ_1, μ_2, μ_3 – постоянные, характеризующие внутреннее и внешнее сопротивление движению направляющей; v, m – постоянная горизонтальная скорость и масса нагрузки соответственно; $y(t) = u(vt, t)$ – отклонение нагрузки от оси x; g – ускорение свободного падения. Штрих означает производную по t. Ось x горизонтальна и сориентирована по направляющей, ось u направлена вертикально вверх, опоры находятся в точках $x = 0$, $x = l$. Система Oxu принадлежит вертикальной плоскости и симметрична относительно направляющей.

Слагаемое, содержащее μ_2, в уравнении (1) моделирует плотность сил сопротивления изменению кривизны направляющей. Эти силы возникают вследствие относительного скольжения элементов пролета при его изгибе [4].

После перехода к безразмерным величинам по формулам

$$x = l\bar{x},\ u = l\bar{u},\ t = \frac{l}{v}\bar{t},\ \ p = \rho v^2 \bar{p},\ \delta(x - vt) = \frac{1}{l}\bar{\delta}(\bar{x} - \bar{t}),$$

$$\mu_1 = \frac{l}{v}\bar{\mu}_1,\ \mu_2 = \frac{l}{v}\bar{\mu}_2,\ \mu_3 = \frac{\rho v}{l}\bar{\mu}_3,\ y = l\bar{y}$$

получим задачу

$$G\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mu_1 \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right) + \mu_3 \frac{\partial u}{\partial t} = p(t)\delta(x - t), \tag{2}$$

$$0 \le t \le 1,\ a^2 = \frac{T}{\rho v^2},\ G = \frac{EI}{\rho l^2 v^2},\ p(t) = -\frac{m}{M}\left(g_0 + y''(t)\right),\ g_0 = \frac{gl}{v^2},\ M = \rho l,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0,\ \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} = 0, \tag{3}$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Для простоты записи черточки над безразмерными величинами опущены.

В целях удовлетворения граничных условий (3) решение уравнения (2) достаточно искать в виде [5]

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t)\sin(j\pi x).$$

После представления функции $\delta(x - t)$ рядом Фурье

$$\delta(x - t) = 2\sum_{j=1}^{\infty} \sin(j\pi t)\sin(j\pi x)$$

для функции $u_j(t)$ получим уравнение

$$u_j''(t) + \left(G\mu_1(j\pi)^4 + \mu_2(aj\pi)^2 + \mu_3\right)u_j'(t) + \left(G(j\pi)^4 + (aj\pi)^2\right)u_j(t) = 2p(t)\sin(j\pi t).$$

Решение этого уравнения при нулевых начальных условиях, которые получаются из условий (4), запишется следующим образом:

$$u_j(t) = \frac{2}{\beta_j}\int_0^t p(\tau)f_j(t, \tau)d\tau,\ 0 \le t \le 1,$$

$$f_j(t, \tau) = \sin(j\pi\tau)\operatorname{sh}\left(\beta_j(t - \tau)\right)e^{-\alpha_j(t - \tau)},$$

$$\alpha_j = \frac{1}{2}\left(G\mu_1(j\pi)^4 + \mu_2(aj\pi)^2 + \mu_3\right),\ \beta_j = \sqrt{\alpha_j^2 - G(j\pi)^4 - (aj\pi)^2}.$$

Теперь функция $u(x, t)$ примет вид

$$u(x, t) = 2\int_0^t p(\tau)F(x, t, \tau)d\tau,\ 0 \le t \le 1, \tag{5}$$

$$F(x, t, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j(t, \tau)}{\beta_j}\sin(j\pi x). \tag{6}$$

Заметим, что если хотя бы один из коэффициентов μ_1, μ_2 отличен от нуля, то при $a > 1$ ряд (6) содержит лишь конечное число затухающих гармоник по t.

Поскольку $x = t$ – это закон движения нагрузки вдоль горизонтальной оси в безразмерном виде, то при подстановке в формулы (5) и (6) t вместо x прогиб $y(t) = u(t, t)$ под нагрузкой найдется из интегро-дифференциального уравнения

$$y(t) + \frac{2m}{M}\int_0^t \left(g_0 + y''(\tau)\right)F(t, t, \tau)d\tau = 0,\ 0 \le t \le 1, \tag{7}$$

после решения которого прогиб направляющей в любой точке будет определяться формулой (5).

Приближенное решение уравнения (7) будем строить в виде кубического сплайна [6]. Для этого разобьем интервал $[0, 1]$ на отрезки длиной $h = \frac{1}{n}$ и на каждом из отрезков $[t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, функцию $y(t)$ приблизим полиномом [4]

$$y(t) = y(t_k) + (t - t_k)y'(t_k) + \frac{(t - t_k)^2}{2} y''(t_k) + (t - t_k)^3 C_k, \ \ t_k \le t \le t_{k+1}. \tag{8}$$

Во внутренних точках $t_k, k = \overline{1, n-2}$, используются условия непрерывного сопряжения значений соседних полиномов и их первых двух производных. Константы C_k, $k = \overline{0, n-1}$, находятся из условия выполнимости уравнения (7) в точке $t = t_{k+1}$, т. е. из уравнения

$$y(t_{k+1}) + \frac{2m}{M} \int\limits_0^{t_{k+1}} (g_0 + y''(\tau)) F(t_{k+1}, t_{k+1}, \tau) d\tau = 0. \tag{9}$$

В частности, поскольку $y(1) = 0$ по условию задачи, то

$$C_{n-1} = -\frac{1}{h^3} D_{n-1}, \ \ D_{n-1} = y(t_{n-1}) + hy'(t_{n-1}) + \frac{h^2}{2} y''(t_{n-1}).$$

Этот же результат следует и из уравнения (9), так как $F(1, 1, \tau) = 0$.

В начальный момент времени $t = 0$ значения $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ задаются как начальные условия. Значение $y''(0)$ получим из уравнения движения нагрузки, которое в безразмерном виде выглядит следующим образом:

$$y''(t) = -g_0 + \frac{R(t)l}{mv^2},$$

где $R(t)$ – реакция направляющей на нагрузку, зависящая от прогиба.

Это уравнение справедливо при любом $t \in [0, 1]$. Поэтому $R(0) = 0$, так как движение направляющей начинается из состояния покоя. Следовательно,

$$y''(0) = -g_0.$$

Получим теперь значения C_k, $k = \overline{0, n-2}$. Уравнение (9) запишем в виде

$$D_k + h^3 C_k + \frac{2m}{M} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (g_0 + y''(t_k) + 6(\tau - t_k)C_k) F(t_{k+1}, t_{k+1}, \tau) d\tau +$$

$$+ \frac{2m}{M} \int\limits_0^{t_k} (g_0 + y''(\tau)) F(t_{k+1}, t_{k+1}, \tau) d\tau = 0 \tag{10}$$

и введем функции

$$J(x, t, \tau) = \int F(x, t, \tau) d\tau, \ \ J_1(x, t, \tau) = \int J(x, t, \tau) d\tau.$$

$$\int \tau F(x, t, \tau) d\tau = \tau J(x, t, \tau) - J_1(x, t, \tau).$$

Тогда из уравнения (10), опуская промежуточные выкладки, имеем

$$C_k = \frac{W_{1k}}{W_{2k}},$$

$$W_{1k} = -\left(\frac{M}{2m} D_k + (g_0 + y''(t_k)) \left(J(t_{k+1}, t_{k+1}, t_{k+1}) - J(t_{k+1}, t_{k+1}, t_k) \right) + I_k \right),$$

$$W_{2k} = h^3 \frac{M}{2m} + 6hJ(t_{k+1}, t_{k+1}, t_{k+1}) - J_1(t_{k+1}, t_{k+1}, t_{k+1}) + J_1(t_{k+1}, t_{k+1}, t_k),$$

$$I_k = \int\limits_0^{t_k} (g_0 + y''(\tau)) F(t_{k+1}, t_{k+1}, \tau) d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(g_0 + y''\left(t_{i-1}\right) + 6\left(\tau - t_{i-1}\right)C_{i-1}\right)F\left(t_{k+1}, t_{k+1}, \tau\right)d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\Big[\left(g_0 + y''\left(t_{i-1}\right) + 6hC_{i-1}\right)J\left(t_{k+1}, t_{k+1}, t_i\right) - \left(g_0 + y''\left(t_{i-1}\right)\right)J\left(t_{k+1}, t_{k+1}, t_{i-1}\right) -$$

$$- 6C_{i-1}\left(J_1\left(t_{k+1}, t_{k+1}, t_i\right) - J_1\left(t_{k+1}, t_{k+1}, t_{i-1}\right)\right)\Big],\ k = \overline{0, n-2},\ I_0 = 0.$$

Таким образом, рекуррентными формулами

$$C_k = \frac{W_{1k}}{W_{2k}},$$

$$y\left(t_{k+1}\right) = y\left(t_k\right) + hy'\left(t_k\right) + \frac{h^2}{2}y''\left(t_k\right) + h^3C_k,$$

$$y'\left(t_{k+1}\right) = y'\left(t_k\right) + hy''\left(t_k\right) + 3h^2C_k,$$

$$y''\left(t_{k+1}\right) = y''\left(t_k\right) + 6hC_k,$$

$$k = \overline{0, n-1},\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = -g_0,$$

полностью определяются коэффициенты сплайна (8), что в итоге дает решение задачи. Заметим, что фигурирующие в решении интегралы $J(x, t, \tau)$, $J_1(x, t, \tau)$ легко вычисляются аналитически, однако их выражения здесь не приводятся ввиду громоздкости.

Библиографические ссылки

1. Савчук ВП, Титюра ОВ. Прогиб струны под движущейся нагрузкой. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2004;1:75–78.
2. Весницкий АИ. *Волны в системах с движущимися границами и нагрузками.* Москва: Физматлит; 2001. 320 с.
3. Филиппов АП. *Колебания деформируемых систем. 2-е издание.* Москва: Машиностроение; 1970. 734 с.
4. Савчук ВП. *Математическое моделирование задач динамики упругих систем.* Минск: БГУ; 2018. 111 с.
5. Alevy I. Solutions to the heat and wave equations and the connection to the Fourier series [Internet]. 2010 [cited 2019 January 21]. Available from: http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Alevy.pdf.
6. Kaya E. Spline interpolation techniques. *Journal of Technical Science and Technologies.* 2013;2(1):47–52.

References

1. Savchuk VP, Titioura OV. A string bend under a moving load. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2004; 1:75–78. Russian.
2. Vesnitskii AI. *Volny v sistemakh s dvizhushchimisya granitsami i nagruzkami* [Waves in systems with moving boundaries and loads]. Moscow: Fizmatlit; 2001. 320 p. Russian.
3. Filippov AP. *Kolebaniya deformiruemykh sistem. 2-e izdanie* [Vibrations of elastic systems. 2nd editions]. Moscow: Mashinostroenie; 1970. 734 p. Russian.
4. Savchuk VP. *Matematicheskoe modelirovanie zadach dinamiki uprugikh sistem* [Mathematical modeling of dynamics problems for elastic systems]. Minsk: Belarusian State University; 2018. 111 p. Russian.
5. Alevy I. Solutions to the heat and wave equations and the connection to the Fourier series [Internet]. 2010 [cited 2019 January 21]. Available from: http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Alevy.pdf.
6. Kaya E. Spline interpolation techniques. *Journal of Technical Science and Technologies.* 2013;2(1):47–52.

Статья поступила в редколлегию 22.02.2019.
Received by editorial board 22.02.2019.