УДК 004.942

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОБЪЕКТНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

Р. Е. ШАРЫКИН[1]***, А. Н. КУРБАЦКИЙ***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Представлена математическая модель для распределенных объектно ориентированных стохастических гибридных систем (РООСГС) и доказано, что данная модель обладает марковским свойством. РООСГС являются композиционными объектами, которые общаются с другими объектами посредством обмена сообщениями через асинхронную среду, такую как сеть. Важной составляющей модели выступает вероятностная природа РООСГС, в которой состояние системы описывается стохастическими дифференциальными уравнениями с мгновенными вероятностными изменениями его при выполнении определенных условий. Вероятностная природа и у среды обмена сообщениями, в модели которой время доставки сообщения является случайной величиной. Такие задачи часто встречаются на практике в различных сферах, поэтому вопросы формального моделирования и верификации их свойств представляются весьма важными.

Ключевые слова: математическое моделирование; гибридные системы; стохастические системы; марковское свойство; спецификация моделей.

Образец цитирования:
Шарыкин РЕ, Курбацкий АН. Модель распределенных объектно ориентированных стохастических гибридных систем. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;2:52–61.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-52-61

For citation:
Sharykin RE, Kourbatski AN. A model of distributed object-based stochastic hybrid systems. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;2:52–61. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-52-61

Авторы:
Роман Евгеньевич Шарыкин – соискатель кафедры технологий программирования факультета прикладной математики и информатики.
Александр Николаевич Курбацкий – доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой технологий программирования факультета прикладной математики и информатики.

Authors:
Raman E. Sharykin, competitor at the department of software engineering, faculty of applied mathematics and computer science.
sharykin@bsu.edu
Alexander N. Kourbatski, doctor of science (engineering), full professor; head of the department of software engineering, faculty of applied mathematics and computer science.
kurb@unibel.by

A MODEL OF DISTRIBUTED OBJECT-BASED STOCHASTIC HYBRID SYSTEMS

***R. E. SHARYKIN*[a], *A. N. KOURBATSKI*[a]**

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: R. E. Sharykin (sharykin@bsu.edu)

This article offers a mathematical model for distributed object-oriented stochastic hybrid systems (DOBSHS). DOBSHS are composite objects communicating with other objects through the exchange of messages through an asynchronous medium such as a network. An important component of the model is the probabilistic nature of the DOBSHS, in which the state of the system is described by stochastic differential equations with instantaneous probabilistic state changes when certain conditions are met. Also probabilistic is the nature of the messaging environment, in which the model of message delivery time is a random variable. Such problems are often encountered in practice in various areas and issues of formal modeling and verification of their properties are very important. The article presents a mathematical model of DOBSHS and proved that it has a Markov property.

Keywords: mathematical modeling; hybrid systems; stochastic systems; Markov property; model specification.

Введение

Стохастические гибридные системы [1] обобщают обычные гибридные системы [2–5], допуская непрерывную эволюцию, управляемую стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ), и (или) мгновенные вероятностные изменения состояния системы. Это хорошо согласуется с внутренней неопределенностью сред, в которых должны функционировать многие гибридные системы, а также удобно в случаях, когда некоторые алгоритмы системы являются вероятностными. Существует широкий спектр сфер, включая коммуникационные сети [6], авиационный трафик [7; 8], экономику [9], отказоустойчивое управление [10], подходящих для применения стохастических гибридных систем. Биоинформатика, в которой используются символические, гибридные и вероятностные модели клеток [11–13], также является полем приложения для подобных систем.

В то время как существует надежное обоснование математических свойств стохастических гибридных моделей (таких как марковское свойство процесса), вопрос, как *специфицировать* такие модели композиционным путем, чтобы более крупные системы могли пониматься в терминах меньших подсистем, остается открытым. Так же как и вопрос о том, как *формально анализировать* эти модели способами, которые существенно расширяют аналитические возможности современных симуляционных методов. Поскольку некоторые области приложения (к примеру, контроль авиационного трафика) требуют очень высокой степени надежности, спецификация и верификация выступают важными задачами, требующими рассмотрения.

Основная цель статьи – представление конкретной математической модели, позволяющей формально специфицировать стохастические гибридные системы, которые являются *распределенными*, состоят из различного вида стохастических гибридных *объектов* и взаимодействуют друг с другом посредством асинхронной передачи сообщений. Стиль распределенного объектно ориентированного описания представляется естественным для спецификации многих гибридных систем: например, сетевых встроенных или систем воздушных судов и других (возможно, автоматических) транспортных средств. Однако на текущий момент мы не имеем информации о формальных моделях, поддерживающих такой стиль спецификации для стохастических гибридных систем. Наш вклад в этом отношении – математическая модель распределенных объектно ориентированных стохастических гибридных систем (РООСГС), которая обладает строгим марковским свойством и может быть отображена в модель generalized stochastic hybrid systems (GSHS), представленную в [14].

Вероятностное переписывание и распределенные объекты

Рассмотрим базовые концепции переписывания термов, вероятностного переписывания и распределенных объектов. Более детальное и строгое изложение переписывания термов может быть найдено в [15], а вероятностного переписывания – в [16].

Положим, сигнатура Σ является функцией символов (скажем, $f, g, h, a, b, \ldots \in \Sigma$) и имеет функцию арности $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$, определяющую количество аргументов каждого функционального символа. Далее обозначим через $T_\Sigma(X)$ алгебру Σ-термов на множестве X переменных. Например, $f(x, g(b, y)) \in T_\Sigma(X)$

является Σ-термом с $ar(f) = ar(g) = 2,\ ar(b) = 0$ и $x \in X$. Проиллюстрируем этим примером понятия *подтерма*, *позиции подтерма* и *замены подтерма*. Так, x, $g(b, y)$ и b – подтермы $f(x, g(b, y))$. Если представим терм как помеченное дерево, то его подтермы являются его поддеревьями. Мы можем обозначить позиции подтермов конечными столбцами натуральных чисел, обозначающими пути от корня дерева. К примеру, вышеприведенные три подтерма находятся в позициях 1, 2 и 2, 1 соответственно. Для данной позиции p в терме t, t/p – подтерм в позиции p. Для термов t, u и позиции p в t обозначим через $t[u]_p$ новый терм, полученный заменой подтерма t/p на u в позиции p. Для терма t в нашем примере и $u = h(a)$ имеем $t[u]_2 = f(x, h(a))$. Заметим, что каждый терм t имеет множество $vars(t)$ своих переменных, фигурирующих в нем. *Подстановка* θ является функцией $\Theta : Y \to T_\Sigma(X)$, где Y – множество переменных. Она расширяется многими путями на Σ-гомоморфизм $\Theta : T_\Sigma(Y) \to T_\Sigma(X)$. В нашем примере, для терма t, если $\theta(x) = h(z)$ и $\theta(y) = c$, то $\theta(t) = f(h(z), g(b, c))$. *Правилом перезаписи* служит секвенция $l \to r$, где $l, r \in T_\Sigma(X)$. Мы называем l *левой стороной* правила, а r – его *правой стороной*. Пусть R – множество правил перезаписи. Мы говорим, что терм t *перезаписан за один шаг* с помощью R в t', обозначая $t \to_R t'$, если существуют позиция p в t и подстановка θ такие, что $t/p = \theta(l)$ и $t' = t[\theta(r)]_p$. Обозначим через $\to_R^*$ рефлексивное и транзитивное замыкание R. Интуитивно мы будем представлять термы как *состояния* системы. Далее множество R правил перезаписи может пониматься как множество параметрических *переходов* между состояниями, а $\to_R^*$ – как отношение достижимости системы. Назовем правило перезаписи $l \to r$ *недетерминистическим*, если $vars(r) \not\subseteq vars(l)$.

Мы можем обобщить вышесказанное посредством переписывания не просто термов, а классов эквивалентности термов *по модулю* эквациональной теории E. Это достигается с помощью *переписывающей теории* (Σ, E, R) [17], где Σ – сигнатура, E – множество Σ-уравнений, а R – множество правил перезаписи. Идея состоит в том, чтобы рассматривать состояния нашей системы как элементы *алгебраического типа данных* $T_\Sigma(X)$, определенных уравнениями E, его так называемой начальной алгеброй. Элементы $T_\Sigma(X)$ являются E-эквивалентными классами $[t]$ Σ-термов t без переменных по модулю уравнений E. Теперь R переписывает такие классы эквивалентности вместо просто переписывания термов. Это особенно полезно для моделирования систем распределенных объектов, которые общаются друг с другом посредством передачи сообщений. Мы можем рассматривать объект некоторого класса объектов C как терм в виде записи $\langle o : C | a_1 : v_1, \ldots, a_n : v_n \rangle$, где o – имя, или идентификатор, объекта, C – имя его класса, a_i – переменные состояния (каждая определенного типа) с соответствующими значениями v_i. Подобным образом мы можем рассматривать сообщение, адресованное o, как другой терм формы $\langle o \leftarrow c \rangle$, в котором c является содержанием сообщения, а o – его адресатом. Далее мы можем моделировать распределенное состояние системы объектов как мультимножество, или «суп», объектов и сообщений. Обозначим объединение мультимножеств параллельным композиционным оператором $\_ \parallel \_$, где два подчеркивания – это позиции аргументов. К примеру, распределенное состояние

$$\langle o : C | a_1 : v_1, \ldots, a_n : v_n \rangle \parallel \langle o \leftarrow c \rangle \parallel \langle o' : C' | b_1 : v_1', \ldots, b_k : v_k' \rangle \parallel \langle o' \leftarrow c' \rangle$$

содержит два объекта – o и o' – классов C и C', каждый с сообщением, ему адресованным и еще не полученным. Так как объединение мультимножеств *ассоциативно* и *коммутативно*, порядок объектов и сообщений значения не имеет. В случае объектов РООСГС отметим единственный дополнительный факт: некоторые переменные a_i объекта $\langle o : C | a_1 : v_1, \ldots, a_n : v_n \rangle$ являются *непрерывными*, т. е. принимают вещественные значения, в то время как другие переменные могут быть *дискретными*. Так как в РООСГС непрерывность времени играет важную роль, помимо обычных сообщений, готовых к немедленному получению, также имеются *запланированные* сообщения в форме $[d, \langle o \leftarrow c \rangle]$, в которых d – время, называемое *дедлайном*, которое равномерно уменьшается. Это позволяет моделировать тот факт, что *асинхронная коммуникация в распределенной системе занимает время*, т. е. посланное сообщение не сразу становится доступным для получения. В РООСГС в любой момент времени имеется *не более одного* сообщения, доступного для получения и называемого *активным*: все остальные сообщения являются запланированными.

Дискретные переходы распределенной системы объектов обычно происходят в ответ на сообщения: при их получении объект может изменить свое состояние, послать другие сообщения, исчезнуть и (или) породить новые объекты. Такие дискретные параллельные переходы могут быть естественным образом специфицированы правилами перезаписи, что мы вскоре проиллюстрируем. Главное, однако, что в таких системах перезапись должна быть *перезаписью мультимножеств*, в которой порядок объектов и сообщений в «супе» не имеет значения. Это может быть достигнуто с помощью переписывающей теории $(\Sigma, AC \cup E, R)$, где Σ включает все операторы, используемые для построения объектов и сообщений, и оператор параллельной композиции $\_ \parallel \_$, AC является всеми уравнениями, определяющими ассоциативность и коммутативность $\_ \parallel \_$, а E содержит остальные уравнения, выражающие дополнительные функции.

В РООСГС переписывающие правила R, определяющие мгновенные переходы объектов, обычно являются *вероятностными*. *Вероятностное переписывающее правило* [16; 18] имеет вид

$$l(x) \rightarrow r(x, y) \ with \ probability \ y := p(x).$$

В первую очередь необходимо отметить, что такое правило *недетерминистическое*, так как терм r содержит новые переменные y, отличные от переменных x, содержащихся в l. Таким образом, подстановка θ для переменных x в l, которая совпадает с подтермом терма t в позиции p, не определяет единственным образом следующее состояние после перезаписи: для него может иметься много вариантов в зависимости от того, как будут инициализированы дополнительные переменные y в r. Мы можем обозначить различные следующие состояния выражениями $t\left[r(\theta), \rho(y)\right]_p$, где θ фиксировано как данная совпадающая подстановка, а ρ варьируется по всем возможным подстановкам для новых переменных y. Вероятностная природа правила выражается обозначением *with probability* $y := p(x)$, где $p(x)$ является вероятностной мерой на множестве подстановок ρ (по модулю уравнений E в данной переписывающей теории). Однако вероятностная мера $p(x)$ *может зависеть от совпадающей подстановки* θ. Мы выбираем значение y, т. е. подстановку ρ, вероятностно в соответствии с вероятностной мерой $\rho(\theta(x))$.

Простой пример может проиллюстрировать многие из уже изложенных идей. Возможным объектом в РООСГС может быть *участник аукциона*. Это объект в форме $\langle o : Bidder | motivation : M \rangle$ с *мотивацией*, являющейся непрерывной переменной, определяющей степень заинтересованности участника в аукционе. Участник аукциона посылает ставки на аукцион в случайные моменты времени, но участник с более высокой мотивацией будет посылать ставки чаще. Это может быть смоделировано посредством вероятностного переписывающего правила

$$\begin{aligned}
&\langle X : Bidder | motivation : M \rangle \parallel \langle X \leftarrow schedule.bid \rangle \rightarrow \\
&\rightarrow \langle X : Bidder | motivation : M \rangle \parallel \left[T, \langle X \leftarrow place.bid \rangle\right] \\
&with \ probability \ T := Exp\left(0.1^{*} duration / (0.1 + M)\right),
\end{aligned}$$

где при получении сообщения $\langle X \leftarrow schedule.bid \rangle$ участник X планирует следующую ставку в соответствии с экспоненциальным распределением, чей темп включает как его собственную мотивацию, так и продолжительность аукциона. Вероятностная мера в решающей степени зависит от мотивации участника, которая определяется в каждом экземпляре правила посредством подстановки θ, конкретизирующей левостороннюю переменную M.

Объектно ориентированные стохастические гибридные системы

Теперь представим нашу модель РООСГС и покажем, как она соотносится с моделью GSHS. Для упрощения математических деталей мы используем обозначения состояний объектов в виде записей $\langle o, q, v \rangle$, где o – имя объекта, q – дискретный элемент, объединяющий имя класса и дискретные переменные, v – вектор значений непрерывных переменных. Для топологического пространства $(X, \mathcal{O})$ связанное с ним измеримое пространство обозначается $(X, \mathfrak{B}(X))$.

Определение 1. Для измеримых пространств $(X, \mathfrak{F}_X)$, $(Y, \mathfrak{F}_Y)$ мы называем функцию $K : X \times \mathfrak{F}_Y \rightarrow$ $\rightarrow [0, 1]$ марковским ядром (из $(X, \mathfrak{F}_X)$ в $(Y, \mathfrak{F}_Y)$) тогда и только тогда, когда K удовлетворяет условиям:

(I) $\forall x \in X$, $K(x, \cdot)$ является вероятностной мерой и (II) $B \in \mathfrak{F}_Y$, $K(\cdot, B)$ измерима. Интуитивно мы рассматриваем K как «вероятностное отношение перехода» из X в Y.

Определение 2. Классом стохастического гибридного объекта (классом РООСГС) является запись $C = (Q_C, O_{id}, \mu, \sigma, Jump_C)$, где отображены:

• *дискретные состояния.* Q_C – счетное множество дискретных состояний;

• *идентификаторы объектов.* O_{id} – счетное множество имен объектов;

• *инварианты.* Для фиксированного измерения l инвариант является функцией $Inv_C : Q_C \to \mathcal{O}(\mathbb{R}^l)$, где $\mathcal{O}(\mathbb{R}^l)$ – множество всех открытых множеств евклидова пространства $\mathbb{R}^l$;

• *состояния объектов.* Состояние объекта $o \in O_{id}$ выражается записью $s = (o, q, v)$, $q \in Q_C$ и $v \in Inv_C(q)$. Множество всех таких состояний для всех объектов в классе C имеет вид

$$S_C = \bigcup_{o \in O_{id},\, q \in Q_C} \{o\} \times \{q\} \times Inv_C(q),$$

обозначим его замыкание $\bar{S}_C$ как множество

$$\bar{S}_C = \bigcup_{o \in O_{id},\, q \in Q_C} \{o\} \times \{q\} \times \overline{Inv_C(q)},$$

где $\overline{Inv_C(q)}$ – топологическое замыкание открытого множества $Inv_C(q)$ и его границы $\partial S_C = \bar{S}_C \setminus S_C$. Отметим, что S_C является дизъюнктивным объединением метрических пространств и, таким образом, имеет соответствующее измеримое пространство $(S_C, \mathfrak{B}(S_C))$;

• *динамика СДУ.* Определяется парой функций $\mu : D_C \to \mathbb{R}^l$ и $\sigma : D_C \to \mathbb{R}^{l \times m}$, $D_C = \bigcup_{q \in Q} \{q\} \times Inv_C(q)$, $\mu(q, x)$ и $\sigma(q, x)$ ограниченные и липшицевые по x;

• *ядро прыжков.* Марковское ядро $Jump_C : \partial S_C \times \mathfrak{B}(S_C) \to [0, 1]$.

Сообщение содержит объект o некоторого класса C как адресат, а также может содержать дискретные и непрерывные параметры.

Определение 3. Сообщением типа M для объектов данного класса C РООСГС является запись $M = (O_{id_C}, Q', d)$, где O_{id_C} – множество имен объектов класса C; Q' – исчислимое множество дискретных параметров и $d \in \mathbb{N}$ – размерность множества непрерывных параметров $\mathbb{R}^d$. Множество S_M сообщений типа M, таким образом, имеет вид $S_M = O_{id_C} \times Q' \times \mathbb{R}^d$. Аналогично множеством S_{SM} запланированных сообщений типа M выступает запись $S_{SM} = S_M \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Определение 4. РООСГС A характеризуется:

1) множеством $C_1, \ldots, C_n$ классов;

2) множеством $M_1, \ldots, M_m$ типов сообщений, каждый из которых включает некоторые C_i из $C_1, \ldots, C_n$;

3) марковским ядром $Msg : \hat{S}_A \times \mathfrak{B}(S_A) \to [0, 1]$, которое называют ядром немедленного получения сообщений с $\hat{S}_A \subset S_A$, измеримым подмножеством состояний, содержащих точно одно активное сообщение;

4) начальной вероятностной мерой $Init : \mathfrak{B}(S_A) \to [0, 1]$.

Состояниями РООСГС являются мультимножества, содержащие объекты в $C_1, \ldots, C_n$, запланированные сообщения в $M_1, \ldots, M_m$ и не более одного активного сообщения в одном из M_j:

$$s = \{(o_1, q_1, v_1), \ldots, (o_k, q_k, v_k),\ [(o', q', v')],\ ((o'_1, q'_1, v'_1), t_1), \ldots, ((o'_s, q'_s, v'_s), t_s)\},$$

где все идентификаторы объектов $o_1, \ldots, o_k$ различны; имеется множество вложений $\{o', o'_1, \ldots, o'_s\} \subseteq \{o_1, \ldots, o_k\}$ и $[(o', q', v')]$ означает, что наличие единственного активного сообщения (o', q', v') необязательно. Дискретная компонента вышеприведенного состояния является мультимножеством

$$q = disc(s) = \{(o_1, q_1), \ldots, (o_k, q_k), \langle (o', q') \rangle, (o'_1, q'_1), \ldots, (o'_s, q'_s)\},$$

где оператор $\langle (o', q') \rangle$, обозначенный угловыми скобками, действует как маркер, выделяющий дискретную часть уникального активного сообщения (o', q', v'), если таковое присутствует. Множество Q_A всех дискретных компонент $disc(s)$ состояний s РООСГС A – по построению счетное множество. Непрерывная компонента состояния s является разрозненной по различным объектам и сообщениям, но мы можем ее легко консолидировать в единую компоненту следующим образом. Без потери общности положим, что множества $O_{id_{C_1}}, \ldots, O_{id_{C_n}}$ и $Q'_{M_1}, \ldots, Q'_{M_m}$ непересекающиеся и что дискретные части сообщений $q', q'_1, \ldots, q'_s$ различны. Тогда, упорядочив $C_1, \ldots, C_n, M_1, \ldots, M_m$ линейно и используя линейный порядок $O_{id_{C_i}}$ и Q'_{M_j}, можно лексикографически отсортировать элементы произвольного дискретного состояния $disc(s)$ единственным образом. Положим, что отсортированная форма вышеприведенного состояния s – форма, в которой элементы записаны. Тогда непрерывная компонента s является вектором

$$v = cont(s) = (v_1, \ldots, v_k, v', v'_1, t_1, \ldots, v'_s, t_s).$$

Это означает, что мы можем представить множество всех состояний РООСГС A как дизъюнктивное объединение

$$S_A = \bigcup_{q \in Q_A} \{q\} \times Inv(q),$$

если $(o_1, q_1), \ldots, (o_k, q_k)$ (классов $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$) являются дискретными частями объектов состояния q, то

$$Inv(q) = Inv_{C_{i_1}}(q_1) \times \ldots \times Inv_{C_{i_k}}(q_k) \times \mathbb{R}^{md(q)},$$

где $md(q)$, размерность сообщений q, получается суммированием всех размерностей непрерывных компонент в необязательно присутствующем активном сообщении и в запланированных сообщениях.

Предположение 1. (I) Msg, рассматриваемая как «вероятностное отношение перехода», оставляет нетронутыми все запланированные сообщения, и для всех новых запланированных сообщений, создаваемых переходом, дедлайн принадлежит $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

(II) В состоянии из $\hat{S}_A$ состояние из $S_A \setminus \hat{S}_A$ (без активных сообщений) достижимо за конечное число Msg переходов с вероятностью 1. Таким образом, все последовательности Msg переходов заканчиваются почти наверняка.

Так как S_A – дизъюнктивное объединение метрических пространств, оно является измеримым пространством со структурой $(S_A, \mathfrak{B}(S_A))$. Ядра $Jump_{C_i}$, найденные для каждого класса $C_1, \ldots, C_n$ РООСГС A, могут быть «склеены вместе», определяя ядро прыжка $Jump_A : \partial S_A \times \mathfrak{B}(S_A) \to [0, 1]$, где по определению $\overline{S}_A = \bigcup_{q \in Q_A} \{q\} \times \overline{Inv_C(q)}$ и $\partial S_A = \overline{S}_A \setminus S_A$.

Предложение 1. *Для РООСГС A с классами $C_1, \ldots, C_n$ ядра прыжков $Jump_{C_1}, \ldots, Jump_{C_n}$ могут быть расширены до ядра прыжков $Jump_A : \partial S_A \times \mathfrak{B}(S_A) \to [0, 1]$ таким образом, что для всех состояний из S_A, содержащих единственный объект (o, q, v) класса S_i, $Jump_{C_i}((o, q, v), \cdot)$ и $Jump_A(\{o, q, v\}, \cdot)$ согласуются, когда ∂S_{C_i} гомеоморфически вложено как подпространство ∂S_A.*

В первую очередь отметим, что, поскольку S_A является дизъюнктивным объединением пространств и дизъюнктивные объединения топологических пространств отображаются борелевской конструкцией в дизъюнктивные объединения измеримых пространств (см. теорему 2.1.5 в [19]), борелевское множество U в $\mathfrak{B}(S_A)$ имеет вид

$$U = \bigcup_{q \in Q_A} \{q\} \times U_q,$$

где $U_q \in \mathfrak{B}(Inv(q))$. Таким образом, так как U является дизъюнктивным объединением, для каждого $(q_0, v) \in \partial S_A$ имеем

$$Jump_A((q_0, v), U) = Jump_A\left((q_0, v), \bigcup_{q \in Q} \{q\} \times U_q\right) =$$

$$= \sum_{q \in Q} Jump_A((q_0, v), \{q\} \times U_q).$$

Этого достаточно, чтобы определить $Jump_A\left(\left(q_0, v\right), \{q\} \times U_q\right)$. Но, так как

$$Inv(q) = Inv_{C_{i_1}}\left(q_1\right) \times \ldots \times Inv_{C_{i_k}}\left(q_k\right) \times \mathbb{R}^{md(q)}$$

и каждая $Inv_{C_i}\left(q_i\right)$ имеет счетный базис для открытых множеств, по теореме 2.1.3 в [20] борелевская конструкция сохраняет произведения в этом случае, и мы имеем

$$\mathfrak{B}\left(Inv(q)\right) = \bigotimes_{i=1}^{k} \mathfrak{B}\left(Inv\left(q_i\right)\right) \times \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^{md(q)}\right).$$

Таким образом, $\mathfrak{B}\left(Inv(q)\right)$ обобщается борелевскими множествами формы $U_1 \times \ldots \times U_k \times W$, $U_i \in \mathfrak{B}\left(Inv\left(q_i\right)\right)$, $W \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^{md(q)}\right)$. Для того чтобы закончить определение $Jump_A$, нам необходимы некоторые вспомогательные функции на дискретных состояниях и на состояниях, а именно:

- $\pi_{O_{id}}(q) = \left\{o_1, \ldots, o_k\right\}$ – множество идентификаторов объектов;
- $\pi_{m+sm}(q) = \left\{\left\langle\left(o', q'\right)\right\rangle, \left(o_1', q_1'\right), \ldots, \left(o_s', q_s'\right)\right\}$ – дискретная часть активного и запланированных сообщений;
- для каждого подмножества $J = \left\{j_1, \ldots, j_l\right\} \subseteq \left\{1, \ldots, j_k\right\}$:

(I) $\pi_J^o(q) = \left\{\left(o_{j_1}, q_{j_1}\right), \ldots, \left(o_{j_l}, q_{j_l}\right)\right\}$ – функция, извлекающая дискретную часть объекта в отсортированном состоянии q;

(II) $cont_J(s) = \left\{\left(v_{j_1}, \ldots, v_{j_l}\right)\right\}$ – функция, извлекающая непрерывную часть объекта в отсортированном состоянии s;

- $cont_{m+sm}(s) \in \mathbb{R}^{md(s)}$ – функция, извлекающая непрерывную часть активного и запланированных сообщений в отсортированном состоянии s.

Теперь рассмотрим состояние $s = \left(q_0, v\right) \in \partial S_A$, включающее, скажем, k объектов. Положим, $I_\partial = \left\{i_1, \ldots, i_r\right\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$ является непустым множеством целых чисел таких, что объекты $\left(o_{i_1}, q_{i_1}, v_{i_1}\right), \ldots, \left(o_{i_r}, q_{i_r}, v_{i_r}\right)$ – именно те, у которых $v_{i_j} \notin Inv\left(q_{i_j}\right)$, и положим $\overline{I_\partial} = \{1, \ldots, k\} \setminus \left\{i_1, \ldots, i_r\right\} = \left\{j_1, \ldots, j_{k-r}\right\}$.

Определение $Jump_A\left(\left(q_0, v\right), \{q\} \times U_1 \times \ldots \times U_k \times W\right)$ теперь будет следующим:

1) если

$$\pi_{O_{id}}\left(q_0\right) = \pi_{O_{id}}(q) \wedge \pi_{m+sm}\left(q_0\right) =$$
$$= \pi_{s+sm}(q) \wedge cont_{m+sm}\left(q_0, v\right) \in W \wedge cont_{\overline{I_\partial}}\left(q_0, v\right) \in U_{j_1} \times \ldots \times U_{j_{k-r}} \times \pi_{\overline{I_\partial}}^{o}(q),$$

то

$$Jump_A\left(\left(q_0, v\right), \{q\} \times U_1 \times \ldots \times U_k \times W\right) = \prod_{l=1}^{r} Jump_{C_{i_l}}\left(U_{i_l}\right);$$

2) в противном случае 0.

Это означает, что объекты, у которых непрерывное состояние находится на границе, прыгают независимо друг от друга в соответствии со своими ядрами прыжков и что в таких прыжках все остальные объекты и все сообщения остаются неизменными. Таким образом, легко проверить, что $Jump_A$ на самом деле является марковским ядром и что по построению, когда состояние $s = \left\{\left(q_0, v\right)\right\}$ содержит только один объект класса C_i без сообщений, $Jump_{C_i}\left(\left(q_0, v\right)\right)$ и $Jump_A\left(\left\{q_0, v\right\}\right)$ согласуются при подходящем гомеоморфическом вложении S_C в S_A.

Выполнением РООСГС является траектория стохастического процесса P. Пространством состояний P выступает S_A. Начальное состояние выбирается в соответствии с начальным распределением $Init$. Система развивается двумя путями: *непрерывное развитие* и *дискретное развитие*.

Система следует *непрерывному развитию*, если в ее состоянии все объекты имеют свои непрерывные состояния внутри их границ, есть одно активное сообщение и нет запланированных сообщений со временем истечения, равным нулю. Обозначим множество всех таких состояний как S_A^{CE}. Непрерывное развитие системы происходит таким образом, что развитие каждого объекта определяется СДУ его класса. Время истечения каждого запланированного сообщения равномерно уменьшается.

Когда некоторый объект достигает границы или время истечения некоторых запланированных сообщений достигает нуля, система начинает *дискретное развитие*. Обозначим $S_A!$ множество состояний в S_A, в которых как минимум одно запланированное сообщение достигло своего времени истечения. Таким образом, дискретное развитие начинается, когда процесс достигает $\partial S_A \cup S_A!$. Дискретное развитие системы происходит следующим образом.

(I) Если имеются объекты, у которых состояние находится на границе их инвариантов, используется ядро $Jump_A$ для выполнения перехода в новое состояние.

(II) Если объектов на границе нет, но в состоянии имеется активное сообщение, то применяется ядро Msg для выполнения перехода в новое состояние.

(III) Если объекты на границе отсутствуют и нет активного сообщения, но некоторые запланированные сообщения имеют время истечения, равное нулю, то запланированное сообщение, выбранное равномерно среди запланированных сообщений со временем истечения, равным нулю, становится активным сообщением.

Так как $Jump_A$ выводит состояния из ∂S_A вкупе с предположением 1 и тем, что переход типа (III) уменьшает количество сообщений с нулевым временем истечения, мы знаем, что после конечного количества переходов (I)–(III) состояние в S_A^{CE} (которое является поглощающим состоянием для переходов (I)–(III)) достигается с вероятностью 1. Таким образом, все эти последовательности переходов завершаются почти наверняка.

После достижения состояния в S_A^{CE} через конечное число мгновенных переходов (I)–(III) система продолжает развиваться во времени в соответствии с ее непрерывной динамикой, пока не достигнет нового момента времени T_{i+1}, в котором P достигнет $\partial S_A \cup S_A!$. Таким образом, мгновенные переходы происходят в дискретные моменты времени $T_1 < T_2 < T_3 < \dots$.

Предположение 2 (ненулевая динамика). Математическое ожидание N_t количества моментов времени мгновенных переходов на $[0, 1)$ конечно для всех t.

Мы готовы соотнести модель РООСГС с общей моделью, предложенной М. Л. Бужориану и Ж. Лижеро, а именно GSHS [14]. Интуитивно ключевым наблюдением является то, что последовательность мгновенных переходов (I)–(III) после того, как процесс достигает состояния в $\partial S_A \cup S_A!$, может быть «упакована» в единое марковское ядро.

Предложение 2. *При выполнении предположений 1 и 2 РООСГС A может рассматриваться как GSHS.*

Заметим, что $\overline{S}_A$ раскладывается как дизъюнктивное объединение:

$$\overline{S}_A = \partial S_A \cup \hat{S}_A \cup \left(S_A! - \hat{S}_A\right) \cup S_A^{CE}.$$

Также отметим, что переходы типа (III), которые равномерно выбирают сообщение среди сообщений со временем истечения 0, определяются марковским ядром

$$MsgSel : \left(S_A! - \hat{S}_A\right) \times \mathfrak{B}\left(S_A\right) \to [0, 1].$$

Это позволяет нам объединить марковские ядра для $\partial S_A\left(Jump_A\right)$, $\hat{S}_A(Msg)$, $\left(S_A! - \hat{S}_A\right)\left(MsgSel\right)$ и «тождественное марковское ядро» на S_A^{CE} в единое марковское ядро $Inst : \hat{S}_A \times \mathfrak{B}\left(\hat{S}_A\right) \to [0, 1]$ следующим образом:

$$Inst(s, B) = \begin{cases} Jump_A\left(s, B^o\right), \text{ если } s \in \partial S_A, \\ Msg\left(s, B^o\right), \text{ если } s \in \hat{S}_A, \\ MsgSel\left(s, B^o\right), \text{ если } s \in \left(S_A! \setminus \hat{S}_A\right), \\ \delta\left(s, B^o\right), \text{ если } s \in S_A^{CE}, \end{cases}$$

где по определению $B^o = B \setminus \partial S_A \to [0, 1]$ и $\delta(s, B) = 1$, если $s \in B$, в противном случае $\delta(s, B) = 0$. Отметим, что согласно предположению 1 и определению $Jump_A$, Msg, $MsgSel$ множеством поглощающих состояний $Inst$ в точности является S_A^{CE} и что все последовательности переходов $Inst$ почти наверняка заканчиваются достижением S_A^{CE}.

Ключевым наблюдением сейчас является то, что, как показано в [20; 21], марковские ядра выступают морфизмами в категории $SRel$ стохастических отношений, имеющих измеримые пространства как объекты. Если $K : X \times \mathfrak{F}_Y \to [0, 1]$ и $R : Y \times \mathfrak{F}_Z \to [0, 1]$ – марковские ядра, то объединенной стрелкой $K; R : (X, \mathfrak{F}_X) \to (Z, \mathfrak{F}_Z)$ в *SRel* является ядро, получаемое по формуле

$$(K; R)(x, U) = \int_Y R(y, U) K(x, dy).$$

Таким образом, мы можем рассматривать *Inst* как стохастическое отношение $Inst : (\bar{S}_A, \mathfrak{B}(\bar{S}_A)) \to: (\bar{S}_A, \mathfrak{B}(\bar{S}_A))$ и, объединяя морфизмы в *SRel*, можем получить для каждого $n \in \mathbb{N}$ итерации $Inst^n : (\bar{S}_A, \mathfrak{B}(\bar{S}_A)) \to: (\bar{S}_A, \mathfrak{B}(\bar{S}_A))$, также являющиеся марковскими ядрами. Более того, немного расширяя *SRel* для того, чтобы позволить подвероятностные меры, имеем бесконечную итерацию $Inst^\omega : (\bar{S}_A, \mathfrak{B}(\bar{S}_A)) \to: (\bar{S}_A, \mathfrak{B}(\bar{S}_A))$, которая, как показано в [21], также марковское ядро. Так как S_A^{CE} – множество поглощающих состояний, которые, как мы знаем, достигаются $Inst^\omega$ с вероятностью 1, мы можем ограничить $Inst^\omega$ на марковское ядро

$$Inst^\omega : \hat{S}_A \times \mathfrak{B}(S_A^{CE}) \to [0, 1].$$

Теперь легко получить связь модели РООСГС с моделью GSHS. РООСГС – специальный случай слегка обобщенной версии GSHS. При этом необходимо отметить:

- состояния $Q = Q_A$;
- размерности $d : Q \to \mathbb{N}$ являются размерностями $Inv(q)$;
- $\chi(q) = Inv(q)$;
- для каждого состояния *s*, содержащего объекты $(o_1, q_1, v_1), \ldots, (o_k, q_k, v_k)$:

– μ получается объединением μ_C, компонент динамики СДУ классов $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$, которым объекты принадлежат, как динамики компонент $Inv_{C_{i_1}}(q_1) \times \ldots \times Inv_{C_{i_k}}(q_k)$. К тому же для компоненты $\mathbb{R}^{md(q)}$ каждая координата *x*, соответствующая времени истечения, удовлетворяет дифференциальному уравнению времени истечения $dx = -1 \cdot dt$ и каждая другая координата, соответствующая непрерывному значению, удовлетворяет дифференциальному уравнению $dy = 0 \cdot dt$;

– σ получается как произведение Кронекера матриц σ_{C_i} динамик СДУ классов $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$, которым принадлежат присутствующие объекты, дополненное нулевыми значениями для непрерывных размерностей возможного активного сообщения и запланированных сообщений. Заметим, что $\sigma(q, v) \in \mathbb{R}^{d(q) \times m(q)}$, если в теореме 1 в [14] *m* положено фиксированным для всех состояний. Однако позволять винеровским измерениям зависеть от состояния вполне допустимо, так как построение общей марковской строки в теореме 5 в [14] также остается справедливым для этого, немного обобщенного, случая;

- компонента λ опущена;
- R – марковское ядро $R : \mathfrak{B}(\hat{S}_A) \to [0, 1]$, определяемое

$$R(s, B) = Inst^\omega (s, (B \cap S_A^{CE})) \to [0, 1].$$

Как следствие, из вышеизложенного предложения, используя результаты, доказанные для GSHS в [14], получаем следующую теорему.

Теорема. *При выполнении предположений 1 и 2 РООСГС A является правым борелевским процессом.*

Выводы и дальнейшие направления исследования

Мы можем подытожить представленную работу как предложение формальной модели для распределенных объектно ориентированных стохастических систем, которые взаимодействуют посредством асинхронной передачи сообщений. Мы рассматриваем непосредственное моделирование асинхронной коммуникации как необходимость для многих классов приложений, где объекты физически распределены на дистанциях, которыми нельзя пренебречь. Более того, передача сообщений по сети делает задержки неизбежными. Композициональность поддерживается в РООСГС на двух уровнях: на уровне объектов оператором параллельной композиции $\_ \parallel \_$ и на уровне классов посредством множественного наследования.

Данная работа является первым шагом. Следующим будет использование метода Монте-Карло и статистического анализа для исследования моделей конкретных систем на ранних этапах их разработки. Предложенная модель позволяет как использование аналитических методов для доказательства свойств систем, так и прямую симуляцию в PMaude [16], что делает возможным применение статистического анализа. Использование численных методов на ранних этапах проектирования системы позволяет уже на этих этапах находить и исправлять недочеты рассматриваемых моделей. Аналитический метод, в свою очередь, может быть подключен на более поздних этапах исследования модели, когда статистический анализ показал, что система ведет себя удовлетворительно в рассматриваемых ситуациях.

Библиографические ссылки / References

1. Pola G, Bujorianu ML, Lygeros J, Di Benedetto MD. Stochastic hybrid models: an overview. In: *Proceedings of the IFAC conference on analysis and design of hybrid systems; 2003 June 16–18; St. Malo, France.* Oxford: Elsevier; 2003. p. 45–50.

2. Maler O, Manna Z, Pnueli A. From timed to hybrid systems. In: de Bakker JW, Huizing C, de Roever WP, Rozenberg G, editors. *Real-Time: Theory in practice. Proceedings of the REX workshop; 1991 June 3–7; Mook, Netherlands.* Berlin: Springer-Verlag; 1992. p. 447–484.

3. Alur R, Courcoubetis C, Halbwachs N, Henzinger T, Ho P, Nicollin X, et. al. The Algorithmic Analysis of Hybrid Systems. *Theoretical Computer Science.* 1995;138(1):3–34.

4. Lynch NA, Segala R, Vaandrager FW. Hybrid I/O automata. *Information and Computation.* 2003;185(1):105–157. DOI: 10.1016/S0890-5401(03)00067-1.

5. Alur R, Dang T, Esposito JM, Hur Y, Ivančić F, Kumar V, et al. Hierarchical modeling and analysis of embedded systems. *Proceedings of the IEEE.* 2003;91(1):11–28.

6. Hespanha JP. Stochastic hybrid systems: application to communication networks. In: Alur R, Pappas GJ, editors. *Hybrid systems: Computation and control. 7th International workshop; 2004 March 25–27; Philadelphia, USA.* Berlin: Springer-Verlag; 2004. p. 387–401. DOI: 10.1007/978-3-540-24743-2_26.

7. Hwang I, Hwang J, Tomlin CJ. Flight-model-based aircraft conflict detection using a residual-mean interacting multiple model algorithm. In: *AIAA guidance, navigation, and control conference and exhibit; 2003 August 11–14; Austin, USA.* Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics; 2003. DOI: 10.2514/6.2003-5340.

8. Hwang I, Hwang J, Tomlin CJ. HYBRIDGE. Final project report [Internet]. 2005 [cited 2019 February 1]. Available from: https://hybridge.nlr.nl/documents.html.

9. Davis MHA, Vellekoop MH. Permanent health insurance: a case study in piecewise-deterministic Markov modeling. *Mitteilungen der Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker.* 1995;2:177–212.

10. Ghosh MK, Arapostathis A, Marcus SI. Optimal control of switching diffusions with application to flexible manufacturing systems. *SIAM Journal on Control Optimization.* 1993;31(5):1183–1204. DOI: 10.1137/0331056.

11. Eker S, Knapp M, Laderoute K, Lincoln P, Meseguer J, Sonmez K. Pathway logic: symbolic analysis of biological signaling. In: Altman RB, Dunker AK, Hunter L, Klein TE, editors. *Proceedings of the 7th pacific symposium on biocomputing; 2002 January 3–7; Lihue, USA.* [S. l.]: [s. n.]; 2002. p. 400–412. DOI: 10.1142/9789812799623_0038.

12. Lincoln P, Tiwari A. Symbolic systems biology: hybrid modeling and analysis of biological networks. In: Alur R, Pappas GJ, editors. *Hybrid systems: Computation and control. 7th International workshop; 2004 March 25–27; Philadelphia, USA.* [S. l.]: Springer; 2004. p. 660–672.

13. Goss PJE, Peccoud J. Quantitative modeling of stochastic systems in molecular biology by using stochastic Petri nets. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* 1998;95(12):6750–6755. DOI: 10.1073/pnas.95.12.6750.

14. Bujorianu ML, Lygeros J. Toward a general theory of stochastic hybrid systems. In: Blom HAP, Lygeros J, editors. *Stochastic Hybrid Systems. Lecture Notes in Control and Information Science. Volume 337.* Berlin: Springer; 2006. p. 3–30. DOI: 10.1007/11587392_1.

15. Dershowitz N, Jouannaud JP. Rewrite Systems. In: van Leeuwen J, editor. *Handbook of Theoretical Computer Science. Volume B: Formal Models and Semantics (B).* Cambridge: MIT Press; 1990. p. 243–320.

16. Agha GA, Meseguer J, Sen K. PMaude: Rewrite-based specification language for probabilistic object systems. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science.* 2006;153(2):213–239. DOI: 10.1016/j.entcs.2005.10.040.

17. Meseguer J. Conditional Rewriting Logic: Deduction, Models and Concurrency. In: Kaplan S, Okada M, editors. *Conditional and typed rewriting systems. 2nd International CTRS workshop; 1990 June 11–14; Montreal, Canada.* Berlin: Springer; 1990. p. 64–91. DOI: 10.1007/3-540-54317-1_81.

18. Kumar N, Sen K, Meseguer J, Agha G. A rewriting based model for probabilistic distributed object systems. In: Najm E, Nestmann U, Stevens P, editors. *Formal methods for open object-based distributed systems. 6th IFIP WG 6.1 International conference; 2003 November 19–21; Paris, France.* Berlin: Springer; 2003. p. 32–46. DOI: 10.1007/978-3-540-39958-2_3.

19. Berberian SK. *Borel Spaces.* Austin: University of Texas at Austin; 1998.

20. Giry M. A categorical approach to probability theory. In: Banaschewski B, editor. *Categorical Aspects of Topology and Analysis. Lecture Notes in Mathematics. Volume 915.* Berlin: Springer; 1982. p. 68–85. DOI: 10.1007/BFb0092872.

21. Panangaden P. The category of Markov kernels. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science.* 1999;22:171–187. DOI: 10.1016/S1571-0661(05)80602-4.

Статья поступила в редколлегию 12.02.2019.
Received by editorial board 12.02.2019.