
Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.9

РАЦИОНАЛЬНЫЕ МНЕМОФУНКЦИИ НА \mathbb{R}

Т. Г. ШАГОВА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрено подпространство распределений, у которых в аналитическом представлении $f = (f^+, f^-)$ функции f^\pm являются правильными рациональными функциями. Построено вложение этого пространства в подалгебру рациональных мнемифункций на прямой посредством отображения

$$R_\epsilon(f) = f_\epsilon(x) = f^+(x + i\epsilon) - f^-(x - i\epsilon).$$

Приведено полное описание данной подалгебры: выделены ее образующие, сформулировано в явном виде правило умножения распределений в ней. С позиции рациональных мнемифункций проанализированы известные случаи, когда произведение распределений является не мнемифункцией, как в общем случае, а распределением. Сформулированы условия, при которых произведение произвольных рациональных распределений ассоциировано с распределением.

Ключевые слова: мнемифункция; аналитическое представление распределения; алгебра рациональных мнемифункций.

Образец цитирования:

Шагова Т.Г. Рациональные мнемифункции на \mathbb{R} . *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;2:6–17.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-6-17>

For citation:

Shahava TR. Rational mnemofunctions on \mathbb{R} . *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019; 2:6–17. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-6-17>

Автор:

Татьяна Григорьевна Шагова – аспирантка кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А. Б. Антонец.

Author:

Tatsiana R. Shahava, postgraduate student at the department of functional analysis and analytical economics, faculty of mechanics and mathematics.
tanya.shagova@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-2634-4699>

RATIONAL MNEMOFUNCTIONS ON \mathbb{R}

T. R. SHAHAVA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

The subspace of rational distributions was considered in this paper. Distribution is called rational if it has analytical representation $f = (f^+, f^-)$ where functions f^\pm are proper rational functions. The embedding of the rational distributions subspace into the rational mnemofunctions algebra on \mathbb{R} was built by the mean of mapping

$$R_\epsilon(f) = f_\epsilon(x) = f^+(x + i\epsilon) - f^-(x - i\epsilon).$$

A complete description of this algebra was given. Its generators were singled out; the multiplication rule of distributions in this algebra was formulated explicitly. Known cases when product of distributions is a distribution were analyzed by the terms of rational mnemofunctions theory. The conditions under which the product of arbitrary rational distributions is associated with a distribution were formulated.

Keywords: mnemofunction; analytical representation of distribution; algebra of rational mnemofunctions.

Введение

Еще в 1954 г. Л. Шварцем было показано, что невозможно корректно определить операцию умножения в пространстве обобщенных функций. Это препятствовало применению классической теории обобщенных функций (распределений) к решению нелинейных задач и уравнений с обобщенными коэффициентами. Основной подход к преодолению указанного препятствия заключается во введении новых объектов, сохраняющих ряд свойств обобщенных функций и образующих алгебру. Такие объекты называют новыми обобщенными функциями, или мнемофункциями. При этом строятся вложения пространства распределений в алгебру новых обобщенных функций, что позволяет определить произведение распределений как элемент построенной алгебры. На основе анализа конструкций, предложенных Ж. Ф. Коломбо [1], Ю. В. Егоровым [2] и др., в работе [3] описан общий метод построения таких алгебр.

В данной статье рассмотрена подалгебра в алгебре мнемофункций на прямой, порожденная правильными рациональными функциями. Для таких мнемофункций получено явное описание правила умножения.

Алгебра мнемофункций на прямой

Пространство основных функций $D(\mathbb{R})$ состоит из бесконечно дифференцируемых на \mathbb{R} функций с компактным носителем. Пространство обобщенных функций (распределений) $D'(\mathbb{R})$ определяется как сопряженное к пространству $D(\mathbb{R})$, т. е. состоит из линейных непрерывных функционалов на $D(\mathbb{R})$ [4]. Значение функционала f на основной функции φ будем обозначать $\langle f, \varphi \rangle$.

Алгебра мнемофункций на прямой строится следующим образом. Сначала рассматривается множество $\tilde{G}(\mathbb{R})$, состоящее из всех семейств f_ϵ бесконечно дифференцируемых на \mathbb{R} функций, зависящих от малого положительного параметра ϵ , таких, что для каждого f_ϵ , любого отрезка $[-a, a]$ и всякого $k \in \mathbb{N}$ существуют такие $C > 0$ и $m \in \mathbb{R}$, что имеет место оценка

$$|f_\epsilon^{(k)}(x)| \leq C\epsilon^m, \quad x \in [-a, a].$$

Далее рассматривается подмножество в $\tilde{G}(\mathbb{R})$, состоящее из семейств, быстро стремящихся к нулю:

$$J(\mathbb{R}) = \left\{ g_\epsilon : \forall [-a, a], \forall k \in \mathbb{N} \text{ и } m \in \mathbb{R} \exists C : |g_\epsilon^{(k)}(x)| \leq C\epsilon^m, x \in [-a, a] \right\}.$$

$\tilde{G}(\mathbb{R})$ является дифференциальной алгеброй, а $J(\mathbb{R})$ есть идеал в ней, следовательно, определена фактор-алгебра $G(\mathbb{R}) = \tilde{G}(\mathbb{R})/J(\mathbb{R})$, которая называется *алгеброй мнемифункций на прямой*, а ее элементы – классы эквивалентности $[f_\varepsilon]$, содержащие семейства $f_\varepsilon \in \tilde{G}(\mathbb{R})$, – мнемифункциями.

В алгебре $G(\mathbb{R})$ содержится подалгебра мнемочисел \mathbb{C}^* , порожденная постоянными, т. е. семействами $w(\varepsilon)$, не зависящими от x .

Связь мнемифункций с распределениями устанавливается с помощью понятия ассоциированности. Говорят, что мнемифункция $[f_\varepsilon]$ *ассоциирована с распределением* $f \in D'(\mathbb{R})$, если семейство f_ε сходится в $D'(\mathbb{R})$ к f , т. е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

В общем случае информацию о мнемифункции дает анализ асимптотического поведения величин $\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle$, для которых в пространстве $D'(\mathbb{R})$ часто существует асимптотическое разложение вида

$$\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle \approx \sum_{k=k_0}^{\infty} \langle u_k, \varphi \rangle \varepsilon^k, \quad u_k \in D'(\mathbb{R}). \quad (1)$$

Равенство (1) означает асимптотическую сходимость, т. е. для любого N и каждого $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\sum_{k=k_0}^N \langle u_k, \varphi \rangle \varepsilon^k - \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = o(\varepsilon^N).$$

Методом аппроксимации называется линейное отображение $R : D'(\mathbb{R}) \rightarrow \tilde{G}(\mathbb{R})$, ставящее в соответствие распределению f семейство гладких функций f_ε , сходящееся к f в $D'(\mathbb{R})$. Метод аппроксимации порождает вложение пространства распределений в алгебру $G(\mathbb{R})$. Тогда произведением произвольных распределений называется мнемифункция

$$f \otimes_R g = R(f)R(g) \in G(\mathbb{R}). \quad (2)$$

Если произведение $R(f)R(g)$ ассоциировано с некоторым распределением h , то полагаем это распределение h произведением fg , порожденным заданным способом аппроксимации R . В общем случае информацию о поведении произведения $f_\varepsilon g_\varepsilon$ дает его асимптотическое разложение (1).

Аналитическое представление рациональных распределений

Рассмотрим часто используемый в анализе способ аппроксимации, основанный на известном аналитическом представлении распределений [5].

Аналитическим представлением распределения f будем называть пару функций (f^+, f^-) , где f^+ является аналитической в верхней полуплоскости, а f^- – в нижней полуплоскости, таких, что для любых $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} [f^+(x + i\varepsilon) - f^-(x - i\varepsilon)] \varphi(x) dx.$$

В силу утверждения п. 1.9 [5] аналитическое представление существует для любого распределения, однако в общем случае представление распределений через аналитические функции не единственно, оно определено с точностью до целой функции. Значит, и произведение аналитических представлений будет определяться неоднозначно. Отметим для сравнения, что при рассмотрении распределений на окружности $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, проведенном в [6], проблемы неединственности произведения аналитических представлений не возникает, так как из условия, что функция $f^-(z)$, аналитическая при $|z| > 1$, стремится к нулю на бесконечности, аналитическое представление определяется однозначно.

В данной работе будем рассматривать подпространство рациональных распределений, для которых аналитическое представление определяется однозначно, что позволит определить произведение рациональных распределений единственным образом.

Распределение f будем называть *рациональным*, если при его аналитическом представлении f^\pm являются правильными рациональными функциями. Нетрудно показать, что всякая пара правильных рациональных функций (f^+, f^-) , где f^+ аналитическая в верхней полуплоскости, а f^- – в нижней полуплоскости, есть аналитическое представление некоторого распределения.

Обозначим $D'_R(\mathbb{R})$ подпространство пространства распределений, состоящее из рациональных распределений. На пространстве $D'_R(\mathbb{R})$ определим два оператора:

$$(P^+f)(z) := f^+(z),$$

$$(P^-f)(z) := f^-(z).$$

Таким образом, аналитическое представление задает изоморфизм $f \rightarrow (P^+f, P^-f) = (f^+, f^-)$ пространства рациональных распределений и пространства кусочно-аналитических функций, т. е. пар правых рациональных функций (f^+, f^-) , аналитических в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Аналитическое представление рационального распределения f порождает его естественную аппроксимацию гладкими функциями

$$R_\varepsilon(f) := f_\varepsilon(x) = f^+(x + i\varepsilon) - f^-(x - i\varepsilon) = (P^+f)(x + i\varepsilon) - (P^-f)(x - i\varepsilon). \quad (3)$$

Формула (3) задает вложение пространства $D'_R(\mathbb{R})$ в алгебру мнемифункций, и произведение распределений определяется с помощью формулы (2), где, в свою очередь, $R_\varepsilon(f)R_\varepsilon(g)$ можно представить в виде разности рациональной функции, аналитической в верхней полуплоскости, и рациональной функции, аналитической в нижней полуплоскости, которые зависят от ε , т. е. $R_\varepsilon(f)R_\varepsilon(g)$ также имеет аналитическое представление, зависящее от ε . Опишем это произведение более детально.

Рассмотрим рациональные распределения $f = (f^+, f^-)$ и $g = (g^+, g^-)$, тогда согласно (2)

$$\begin{aligned} f \otimes_{R_\varepsilon} g &= R_\varepsilon(f)R_\varepsilon(g) = (f^+(x + i\varepsilon) - f^-(x - i\varepsilon))(g^+(x + i\varepsilon) - g^-(x - i\varepsilon)) = \\ &= f^+(x + i\varepsilon)g^+(x + i\varepsilon) + f^-(x - i\varepsilon)g^-(x - i\varepsilon) - [f^+(x + i\varepsilon)g^-(x - i\varepsilon) + f^-(x - i\varepsilon)g^+(x + i\varepsilon)]. \end{aligned}$$

Здесь

$$f^+(x + i\varepsilon)g^+(x + i\varepsilon) = R_\varepsilon(f^+g^+, 0),$$

$$f^-(x - i\varepsilon)g^-(x - i\varepsilon) = R_\varepsilon(0, -f^-g^-),$$

их сумма – аппроксимирующее семейство для рационального распределения с аналитическим представлением $(f^+g^+, -f^-g^-)$, а $\gamma_\varepsilon(x) := -f^+(x + i\varepsilon)g^-(x - i\varepsilon) - f^-(x - i\varepsilon)g^+(x + i\varepsilon)$ есть рациональная функция, аналитическая на прямой, имеющая аналитическое представление $(\gamma_\varepsilon^+(z), \gamma_\varepsilon^-(z))$, зависящее от ε , которое можно получить, применив операторы P^\pm к функции $\gamma_\varepsilon(x)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема, описывающая правило умножения рациональных распределений.

Теорема 1. *Результат умножения рациональных распределений $f = (f^+, f^-)$ и $g = (g^+, g^-)$ может быть представлен в виде*

$$R_\varepsilon(f)R_\varepsilon(g) = h_\varepsilon^+(x + i\varepsilon) - h_\varepsilon^-(x - i\varepsilon),$$

где

$$h_\varepsilon^\pm(z) = \pm f^\pm(z)g^\pm(z) \pm (P^\pm \gamma_\varepsilon)(z).$$

Следствие 1. *Если $f = (f^+, 0)$ и $g = (g^+, 0)$, то*

$$(f^+, 0)(g^+, 0) = (f^+g^+, 0). \quad (4)$$

Следствие 2. *Если $f = (0, f^-)$ и $g = (0, g^-)$, то*

$$(0, f^-)(0, g^-) = (0, -f^-g^-). \quad (5)$$

Основная сложность при описании свойств произведения рациональных распределений сводится к исследованию поведения семейств аналитических функций $\gamma_\varepsilon^+(z) = (P^+ \gamma_\varepsilon)(z)$ и $\gamma_\varepsilon^-(z) = (P^- \gamma_\varepsilon)(z)$, которое будет проведено ниже.

Алгебра рациональных мнемифункций

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены с комплексными коэффициентами, есть правильная рациональная функция. Если

$$Q(x) = \prod_{k=1}^n (x - z_k)^{p_k},$$

то рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} \frac{B_{kj}}{(x - z_k)^j}.$$

Тогда если аналитическое представление рационального распределения f есть пара (f^+, f^-) , то, исходя из условия рациональности, аналитическая при $\text{Im} z > 0$ функция f^+ имеет вид

$$f^+(z) = \sum_{k=1}^{n^+} \sum_{j=1}^{p_k^+} \frac{B_{kj}^+}{(z - z_k)^j}, \text{ где } \text{Im} z_k \leq 0.$$

Аналогично, поскольку функция f^- , аналитическая при $\text{Im} z < 0$, рациональна:

$$f^-(z) = \sum_{k=1}^{n^-} \sum_{j=1}^{p_k^-} \frac{B_{kj}^-}{(z - z_k)^j}, \text{ где } \text{Im} z_k \geq 0.$$

Алгеброй рациональных мнемифункций $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$ будем называть алгебру над \mathbb{C}^* , порожденную элементами $R_a(f)$, где $f \in D'_R(\mathbb{R})$. Опишем правило умножения в этой алгебре.

Для удобства введем следующие обозначения. Рациональное распределение, имеющее аналитическое представление $\left(\frac{1}{(z - \xi)^n}, 0 \right)$, $\text{Im} \xi \leq 0$, будем обозначать $\frac{1}{(z - \xi)^{n+}}$, а распределение с аналитическим представлением $\left(0, -\frac{1}{(z - \eta)^n} \right)$, $\text{Im} \eta \geq 0$, – через $\frac{1}{(z - \eta)^{n-}}$.

Так как для любого $f \in D'_R(\mathbb{R})$ функции f^\pm представляются в виде суммы элементарных дробей, то задача умножения рациональных распределений сводится к определению произведения распределений вида $\frac{1}{(z - \xi)^{n+}}$ и $\frac{1}{(z - \eta)^{n-}}$. Отметим, что в силу следствий из теоремы 1 произведение распределений с аналитическими представлениями $(f^+, 0)$ и $(g^+, 0)$, а также с представлениями $(0, f^-)$ и $(0, g^-)$ определено. Следовательно, задача состоит в анализе произведения распределений $f = (f^+, 0)$ и $g = (0, g^-)$.

Лемма 1. Пусть $\text{Im} \xi \leq 0$ и $\text{Im} \eta \geq 0$. Тогда произведение распределений $\frac{1}{(z - \xi)^+}$ и $\frac{1}{(z - \eta)^-}$ находится по формуле

$$R_a \left(\frac{1}{z - \xi}, 0 \right) R_a \left(0, -\frac{1}{z - \eta} \right) = c(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{z - \xi}, 0 \right) - c(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(0, -\frac{1}{z - \eta} \right), \quad (6)$$

где $c(\xi; \eta; \varepsilon) = \frac{1}{\xi - \eta - 2i\varepsilon}$.

Доказательство. Аппроксимирующее семейство, или мнемофункция, для распределения $\frac{1}{(z - \xi)^+}$ имеет вид

$$R_a \left(\frac{1}{(z - \xi)^+} \right) = \frac{1}{x + i\varepsilon - \xi},$$

в то время как аппроксимирующее семейство для $\frac{1}{(z - \eta)^-}$

$$R_a \left(\frac{1}{(z - \eta)^-} \right) = \frac{1}{x - i\varepsilon - \eta}.$$

Тогда произведение мнемофункций

$$\begin{aligned} R_a \left(\frac{1}{(z - \xi)^+} \right) R_a \left(\frac{1}{(z - \eta)^-} \right) &= \frac{1}{x + i\varepsilon - \xi} \frac{1}{x - i\varepsilon - \eta} = \frac{1}{\xi - \eta - 2i\varepsilon} \frac{1}{x + i\varepsilon - \xi} - \\ &- \frac{1}{\xi - \eta - 2i\varepsilon} \frac{1}{x - i\varepsilon - \eta} = \frac{c(\xi; \eta; \varepsilon)}{x + i\varepsilon - \xi} - \frac{c(\xi; \eta; \varepsilon)}{x - i\varepsilon - \eta}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$c(\xi; \eta; \varepsilon) = \frac{1}{\xi - \eta - 2i\varepsilon}.$$

Таким образом, выделив аппроксимирующие семейства распределений $\frac{1}{(z - \xi)^+}$ и $\frac{1}{(z - \eta)^-}$ в последней части равенства (7), получаем требуемое.

Замечание. Следует отметить, что на уровне аппроксимирующих семейств применение операторов P^\pm к произведению аналитических представлений рациональных распределений свелось к разложению произведения аппроксимирующих семейств на элементарные дроби, что позволило получить явное выражение для этого произведения.

Следующая теорема дает полное описание алгебры рациональных мнемофункций.

Теорема 2. Алгебра рациональных мнемофункций $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$ состоит из элементов вида

$$\sum_{k=1}^{n^+} \sum_{j=1}^{p_k^+} \frac{A_{kj}^+(\varepsilon)}{(x + i\varepsilon - \xi_k)^j} + \sum_{k=1}^{n^-} \sum_{j=1}^{p_k^-} \frac{B_{kj}^-(\varepsilon)}{(x - i\varepsilon - \eta_k)^j},$$

где $\text{Im} \xi_k \leq 0$; $\text{Im} \eta_k \geq 0$; $A_{kj}^+(\varepsilon) \in \mathbb{C}^*$, $B_{kj}^-(\varepsilon) \in \mathbb{C}^*$.

В этой алгебре элементы $\frac{1}{x + i\varepsilon - \xi}$ и $\frac{1}{x - i\varepsilon - \eta}$ являются образующими, и правило умножения

однозначно определяется формулами (4)–(6).

Доказательство. Пусть рациональное распределение f имеет аналитическое представление $f = (f^+, f^-)$, где

$$f^+(z) = \sum_{k=1}^{n^+} \sum_{j=1}^{p_k^+} \frac{A_{kj}^+}{(z - z_k)^j}, \quad \text{Im} z_k \leq 0, \quad \text{и} \quad f^-(z) = \sum_{k=1}^{n^-} \sum_{j=1}^{p_k^-} \frac{A_{kj}^-}{(z - z_k)^j}, \quad \text{Im} z_k \geq 0.$$

И рациональное распределение $g = (g^+, g^-)$, где

$$g^+(z) = \sum_{k=1}^{m^+} \sum_{j=1}^{q_k^+} \frac{B_{kj}^+}{(z - \xi_k)^j}, \quad \text{Im} \xi_k \leq 0, \quad \text{и} \quad g^-(z) = \sum_{k=1}^{m^-} \sum_{j=1}^{q_k^-} \frac{B_{kj}^-}{(z - \xi_k)^j}, \quad \text{Im} \xi_k \geq 0.$$

Из вида аналитических представлений функций f и g следует, что правило умножения рациональных распределений сводится к определению произведений вида $\frac{1}{(z - \xi)^{n^+}} \frac{1}{(z - \eta)^{m^+}}$, $\frac{1}{(z - \xi)^{n^-}} \frac{1}{(z - \eta)^{m^-}}$

и $\frac{1}{(z - \xi)^{n^+}} \frac{1}{(z - \eta)^{m^-}}$.

Согласно следствию 1 из теоремы 1 произведение распределений $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^{m+}}$, где $\text{Im}\xi \leq 0$, $\text{Im}\eta \leq 0$, определено для любых m, n и находится следующим образом:

$$\frac{1}{(z-\xi)^{n+}} \frac{1}{(z-\eta)^{m+}} = \left(\frac{1}{(z-\xi)^n (z-\eta)^m}, 0 \right).$$

Аналогично для распределений $\frac{1}{(z-\xi)^{n-}}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$, где $\text{Im}\xi \geq 0$, $\text{Im}\eta \geq 0$, произведение определено согласно следствию 2 из теоремы 1 и находится по правилу

$$\frac{1}{(z-\xi)^{n-}} \frac{1}{(z-\eta)^{m-}} = \left(0, -\frac{1}{(z-\xi)^n (z-\eta)^m} \right).$$

Покажем, что произведения рациональных распределений с аналитическими представлениями $\left(\frac{1}{(z-\xi)^n}, 0 \right)$ и $\left(0, -\frac{1}{(z-\eta)^m} \right)$ находятся с помощью равенства (6).

Пусть $m = 1, n = 2$:

$$\begin{aligned} R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}} \right) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^-} \right) &= R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^+} \right) \left(c(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^+} \right) - c(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^-} \right) \right) = \\ &= c(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}} \right) - c^2(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^+} \right) + c^2(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^-} \right). \end{aligned}$$

Пусть $m = 2, n = 1$:

$$\begin{aligned} R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^+} \right) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^{2-}} \right) &= R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^-} \right) \left(c(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^+} \right) - c(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^-} \right) \right) = \\ &= c^2(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^+} \right) - c^2(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^-} \right) - c(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^{2-}} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, произведение второй и первой степеней находится через произведение первых степеней. Таким же образом, т. е. через соотношение (6), находится произведение вторых степеней распределений.

Пусть $m = 2, n = 2$:

$$\begin{aligned} R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}} \right) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^{2-}} \right) &= \left(c(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}} \right) - c^2(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^+} \right) + \right. \\ &\quad \left. + c^2(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^-} \right) \right) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^-} \right) = c^2(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^{2+}} \right) - \\ &\quad - 2c^3(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^+} \right) + 2c^3(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^-} \right) + c^2(\xi; \eta; \varepsilon) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^{2-}} \right). \end{aligned}$$

Произведения других степеней получаются аналогично с помощью рекуррентных соотношений через произведение первых степеней. Следовательно, выражение (6) задает правило умножения распределений вида $\frac{1}{(z - \xi)^{n+}}$ и $\frac{1}{(z - \eta)^{m-}}$.

Исходя из вышесказанного, произведение распределений в алгебре $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$ определено, и элементы $\frac{1}{x + i\varepsilon - \xi}$ и $\frac{1}{x - i\varepsilon - \eta}$ являются в ней образующими.

Произведения рациональных распределений, ассоциированные с распределениями

Проведем детальный анализ произведения (6) из леммы 1.

Если $\xi \neq \eta$, то существует конечный предел коэффициента $c(\xi; \eta; \varepsilon)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\xi; \eta; \varepsilon) = \frac{1}{\xi - \eta}.$$

Это значит, что произведение распределений $\frac{1}{(z - \xi)^+}$ и $\frac{1}{(z - \eta)^-}$ будет ассоциировано с распределением, имеющим аналитическое представление

$$\left(\frac{1}{\xi - \eta} \frac{1}{z - \xi}, \frac{1}{\xi - \eta} \frac{1}{z - \eta} \right).$$

Наиболее интересен случай, когда $\xi = \eta$ и $\xi \in \mathbb{R}$, т. е. когда рассматриваемые распределения имеют особенности в одной точке. Тогда произведение (6) не ассоциировано с распределением, так как коэффициент $c(\xi; \eta; \varepsilon) = c(\varepsilon) = -\frac{1}{2i\varepsilon}$ является бесконечно большим при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако в алгебре мнемодифункций это произведение равно дельта-функции с бесконечно большим коэффициентом, а именно $\frac{\pi}{\varepsilon} R_a(\delta_\xi)$, что вытекает из равенства (7) и аналитического представления дельта-функции, сосредоточенной в точке $\xi \in \mathbb{R}$, которое получено из формул Сохоцкого [4]:

$$\delta_\xi = \left(-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \xi}, -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \xi} \right).$$

Тогда мнемодифункция, ассоциированная с δ_ξ , есть

$$R_a(\delta_\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x + i\varepsilon - \xi} - \frac{1}{x - i\varepsilon - \xi} \right),$$

и

$$R_a \left(\frac{1}{(z - \xi)^+} \right) R_a \left(\frac{1}{(z - \xi)^-} \right) = \frac{\pi}{\varepsilon} \left(-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x + i\varepsilon - \xi} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x - i\varepsilon - \xi} \right) = \frac{\pi}{\varepsilon} R_a(\delta_\xi).$$

В общем случае асимптотическое разложение сингулярных распределений содержит бесконечно большие коэффициенты, но рассмотренный пример показывает, что для таких распределений возможны случаи, когда их произведение ассоциировано с распределением.

В книге [7] приведены только три примера, когда произведением распределений с особенностью в одной точке является распределение. Это произведения $\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\delta, \left(\delta + \frac{1}{\pi i} \mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2, \left(\delta - \frac{1}{\pi} \mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\delta + \frac{1}{\pi} \mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, где

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) dx}{x}.$$

Рассмотрим эти примеры с позиции рациональных распределений.
Аналитическое представление дельта-функции имеет вид

$$\delta = \left(-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z}, -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \right),$$

оно порождает мнемофункцию

$$R_a(\delta) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x+i\epsilon} - \frac{1}{x-i\epsilon} \right).$$

Аналитическое представление $\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{z}, -\frac{1}{2} \frac{1}{z} \right),$$

тогда мнемофункция, соответствующая распределению $\mathbf{P}(x^{-1})$,

$$R_a\left(\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+i\epsilon} + \frac{1}{x-i\epsilon} \right).$$

Для производных справедливы следующие соотношения:

$$R_a(\delta^{(n)}) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{2\pi i} \left(\frac{1}{(x+i\epsilon)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i\epsilon)^{n+1}} \right), \quad (8)$$

$$R_a\left(\mathbf{P}\left(\frac{1}{x^n}\right)\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x+i\epsilon)^n} + \frac{1}{(x-i\epsilon)^n} \right). \quad (9)$$

Таким образом, исследование примеров Антосика – Микусинского – Сикорского сводится к определению условия, когда произведение мнемофункций

$$\left(\frac{A}{x+i\epsilon} + \frac{B}{x-i\epsilon} \right) \left(\frac{C}{x+i\epsilon} + \frac{D}{x-i\epsilon} \right) \quad (10)$$

ассоциировано с распределением.

Лемма 2. Произведение мнемофункций вида (10) ассоциировано с распределением тогда и только тогда, когда для коэффициентов выполнено условие

$$AD + BC = 0. \quad (11)$$

Доказательство. После преобразования выражение (10) равносильно следующему:

$$\frac{AC}{(x+i\epsilon)^2} + \frac{BD}{(x-i\epsilon)^2} + \frac{AD+BC}{(x+i\epsilon)(x-i\epsilon)}.$$

Из соотношений (8) и (9) следует, что сумма первых двух слагаемых ассоциирована с распределением

$$(AC + BD) \mathbf{P}\left(\frac{1}{x^2}\right) + (AC - BD) i\pi \delta'.$$

Последнее слагаемое согласно (7) расписывается в виде

$$(AD + BC) \left(-\frac{1}{2i\epsilon} \frac{1}{x+i\epsilon} + \frac{1}{2i\epsilon} \frac{1}{x-i\epsilon} \right),$$

следовательно, ему соответствует распределение с бесконечно большим коэффициентом. Таким образом, чтобы (10) было ассоциировано с распределением, необходимо и достаточно, чтобы это слагаемое обращалось в нуль, т. е. выполнялось условие (11). Что и требовалось доказать.

Из леммы следует, что, для того чтобы (10) было ассоциировано с распределением, коэффициенты должны быть связаны соотношением $(A, B) = (tC, -tD)$, т. е. по коэффициентам A, B коэффициенты C, D

определяются однозначно с точностью до сомножителя t . Таким образом, получили, что решением уравнения (11) является трехпараметрическое множество, и, значит, примеры конечных произведений Антосика – Микусинского – Сикорского есть только частные случаи данного утверждения. Покажем это.

Пример 1.

$$\left(\delta + \frac{1}{\pi i} \mathbf{P} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi i} \frac{1}{x - i\varepsilon} \right)^2 = -\frac{1}{\pi i} \delta' - \frac{1}{\pi^2} \mathbf{P} \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

Имеем коэффициенты $A = C = 0$, $B = D = \frac{1}{\pi i}$, и, следовательно, условие (11) выполнено.

Пример 2.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\frac{1}{x} \right) \delta &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x + i\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{1}{x - i\varepsilon} \right) \left(-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x + i\varepsilon} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x - i\varepsilon} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi i} \left(\frac{1}{(x - i\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x + i\varepsilon)^2} \right) = -\frac{1}{2} \delta'. \end{aligned}$$

В этом примере $A = B = \frac{1}{2}$, $C = -D = -\frac{1}{2\pi i}$, очевидно, что условие (11) выполнено.

Пример 3.

$$\left(\delta - \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \left(\delta + \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \left(\frac{1}{x} \right) \right) = -\frac{1}{\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{(x + i\varepsilon)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x - i\varepsilon)^2} \right) = -\frac{1}{\pi^2} \mathbf{P} \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

Для данного примера $D = -A = \frac{1+i}{2\pi i}$, $C = -B = \frac{i-1}{2\pi i}$.

Лемма 2 позволяет построить много других примеров конечных произведений с особенностью в одной точке. Опишем общий случай, когда произведение рациональных распределений является распределением.

Пусть рациональное распределение f имеет сингулярный носитель $S_f = \{\xi_k : \text{Im } \xi_k = 0\}$, а множество $S_g = \{\eta_k : \text{Im } \eta_k = 0\}$ есть сингулярный носитель рационального распределения g . Напомним, что сингулярным носителем распределения называется дополнение множества точек, в окрестности которых распределение совпадает с некоторой бесконечно дифференцируемой функцией.

Заметим, что если точка ξ принадлежит сингулярному носителю рационального распределения и имеет кратность n , то в аналитическом представлении этого распределения будет выражение

$\left(\sum_{k=1}^n \frac{A_k^+}{(z - \xi)^k}, \sum_{k=1}^n \frac{A_k^-}{(z - \xi)^k} \right)$. Так, например, рациональной функции $\frac{1}{x}$ соответствует семейство распре-

делений, имеющих аналитические представления $\left(\frac{c}{z}, \frac{c-1}{z} \right)$, где c – произвольная постоянная.

Обозначим $S = S_f \cap S_g = \{z_1, \dots, z_m\}$ пересечение сингулярных носителей распределений f и g . Не ограничивая общности, считаем, что кратность n_k точек z_k , $1 \leq k \leq m$, одинакова для распределений f и g . Тогда $f = (f^+, f^-)$, где

$$f^+ = \sum_{z_k \in S} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^+}{(z - z_k)^j} + \sum_{\xi_k \in S_f \setminus S} \sum_{j=1}^{q_k} \frac{C_{kj}^+}{(z - \xi_k)^j} + \sum_{k=1}^{n^+} \sum_{j=1}^{p_k^+} \frac{D_{kj}^+}{(z - \mathbf{v}_k)^j}, \quad \text{Im } \mathbf{v}_k < 0,$$

$$f^- = \sum_{z_k \in S} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^-}{(z - z_k)^j} + \sum_{\xi_k \in S_f \setminus S} \sum_{j=1}^{q_k} \frac{C_{kj}^-}{(z - \xi_k)^j} + \sum_{k=1}^{n^-} \sum_{j=1}^{p_k^-} \frac{D_{kj}^-}{(z - \tilde{\mathbf{v}}_k)^j}, \quad \text{Im } \tilde{\mathbf{v}}_k > 0.$$

И распределение $g = (g^+, g^-)$, где

$$g^+ = \sum_{z_k \in S} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^+}{(z - z_k)^j} + \sum_{\eta_k \in S_g \setminus S} \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\tilde{C}_{kj}^+}{(z - \eta_k)^j} + \sum_{k=1}^{s^+} \sum_{j=1}^{l_k^+} \frac{\tilde{D}_{kj}^+}{(z - \mu_k)^j}, \quad \text{Im } \mu_k < 0,$$

$$g^- = \sum_{z_k \in S} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^-}{(z - z_k)^j} + \sum_{\eta_k \in S_g \setminus S} \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\tilde{C}_{kj}^-}{(z - \eta_k)^j} + \sum_{k=1}^{s^-} \sum_{j=1}^{l_k^-} \frac{\tilde{D}_{kj}^-}{(z - \tilde{\mu}_k)^j}, \quad \text{Im} \tilde{\mu}_k > 0.$$

Для рациональных распределений f и g , описанных выше, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Произведение рациональных мнемифункций $R_a(f)R_a(g)$ ассоциировано с некоторым распределением тогда и только тогда, когда для каждого k , $1 \leq k \leq m$, существует число t_k такое, что для коэффициентов выполняются следующие соотношения:

$$B_{kj}^+ = t_k A_{kj}^+, \quad B_{kj}^- = -t_k A_{kj}^-. \quad (12)$$

Доказательство. Как было показано ранее, бесконечно большие мнемифункции возникают при произведениях вида $\frac{1}{(z - \xi)^{n^+}} \frac{1}{(z - \eta)^{m^-}}$, когда $\xi = \eta$. При $\xi \neq \eta$ результатом произведения является распределение. Поэтому бесконечно большие слагаемые в произведение вносят только выражения вида

$$\sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^+}{(x + i\varepsilon - z_k)^j} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^-}{(x - i\varepsilon - z_k)^j} + \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^-}{(x - i\varepsilon - z_k)^j} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^+}{(x + i\varepsilon - z_k)^j}, \quad z_k \in S. \quad (13)$$

Очевидно, что если выражение (13) тождественно равно нулю, то бесконечно больших слагаемых нет. Получим условия, когда выражение (13) обращается в нуль.

Рассмотрим многочлены $p_{n_k}^+(v) = \sum_{j=1}^{n_k} A_{kj}^+ v^j$, $p_{n_k}^-(y) = \sum_{j=1}^{n_k} A_{kj}^- y^j$, $q_{n_k}^+(v) = \sum_{j=1}^{n_k} B_{kj}^+ v^j$, $q_{n_k}^-(y) = \sum_{j=1}^{n_k} B_{kj}^- y^j$. Заметим, что умножение сумм, входящих в выражение (13), происходит по тому же правилу, что и умножение этих многочленов, причем

$$vy = w(v - y), \quad \text{где } w = c(\varepsilon) = -\frac{1}{2i\varepsilon}. \quad (14)$$

Поэтому обращение в нуль выражения (13) равносильно выполнению равенства

$$p_{n_k}^+(v)q_{n_k}^-(y) + p_{n_k}^-(y)q_{n_k}^+(v) = 0. \quad (15)$$

Разделив переменные в (15), получаем, что

$$\frac{q_{n_k}^+(v)}{p_{n_k}^+(v)} = -\frac{q_{n_k}^-(y)}{p_{n_k}^-(y)} = t_k.$$

Откуда следует, что

$$q_{n_k}^+(v) = t_k p_{n_k}^+(v), \quad q_{n_k}^-(y) = -t_k p_{n_k}^-(y).$$

И значит, коэффициенты многочленов $p_{n_k}^+(v)$ и $q_{n_k}^+(v)$, а также $p_{n_k}^-(y)$ и $q_{n_k}^-(y)$ пропорциональны, т. е. выполняются соотношения (12).

Проверим необходимость условия, т. е. покажем, что если хотя бы одно из условий (12) не выполнено, то асимптотическое разложение произведения мнемифункций $R_a(f)R_a(g)$ будет содержать бесконечно большие члены.

Применяя условие (14), преобразуем левую часть равенства (15):

$$p_{n_k}^+(v)q_{n_k}^-(y) + p_{n_k}^-(y)q_{n_k}^+(v) = \sum_{j,l=1}^{n_k} (A_{kj}^+ B_{kl}^- + A_{kl}^- B_{kj}^+) v^j y^l = P_{n_k}(w, v) + Q_{n_k}(w, y), \quad (16)$$

где $P_{n_k}(w, v)$, $Q_{n_k}(w, y)$ есть многочлены от двух переменных. В силу того что все бесконечно большие слагаемые должны уничтожиться, коэффициенты при степенях w в (16) равны нулю. Соберем коэффициенты при w :

$$\sum_{j=1}^{n_k} (A_{kj}^+ B_{k1}^- + A_{k1}^- B_{kj}^+) v^j - \sum_{j=1}^{n_k} (A_{k1}^+ B_{kj}^- + A_{kj}^- B_{k1}^+) v^j.$$

Из того, что коэффициент при w равен нулю, следует, что

$$\begin{cases} A_{kj}^+ B_{k1}^- + A_{k1}^- B_{kj}^+ = 0, j = \overline{1, n_k}, \\ A_{k1}^+ B_{kj}^- + A_{kj}^- B_{k1}^+ = 0, j = \overline{2, n_k}. \end{cases} \quad (17)$$

При выполнении условия (17) некоторые слагаемые, содержащие w^2 , уничтожаются, поэтому соберем оставшиеся коэффициенты при w^2 :

$$\sum_{j=2}^{n_k} (A_{kj}^+ B_{k2}^- + A_{k2}^- B_{kj}^+) v^j + \sum_{j=2}^{n_k} (A_{k2}^+ B_{kj}^- + A_{kj}^- B_{k2}^+) y^j.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A_{kj}^+ B_{k2}^- + A_{k2}^- B_{kj}^+ = 0, j = \overline{2, n_k}, \\ A_{k2}^+ B_{kj}^- + A_{kj}^- B_{k2}^+ = 0, j = \overline{3, n_k}. \end{cases}$$

Последовательно уничтожая члены, содержащие степени w , получим, что при w^n останется только коэффициент

$$(A_{kn_k}^+ B_{kn_k}^- + A_{kn_k}^- B_{kn_k}^+) (v^n + (-1)^n y^n),$$

и, значит,

$$A_{kn_k}^+ B_{kn_k}^- + A_{kn_k}^- B_{kn_k}^+ = 0.$$

Следовательно, для того чтобы мнемифункция $R_a(f)R_a(g)$ была ассоциирована с некоторым распределением, необходимо и достаточно, чтобы выражение (13) тождественно равнялось нулю, а это равносильно выполнению условий (12).

Библиографические ссылки

1. Colombeau JF. *New generalized functions and multiplication of distributions*. Amsterdam: North-Holland; 1984. 374 p.
2. Егоров ЮВ. К теории обобщенных функций. *Успехи математических наук*. 1990;45(5):3–40.
3. Антонец АБ, Радыно ЯВ. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций. *Доклады АН СССР*. 1991; 318(2):267–270.
4. Владимиров ВС. *Обобщенные функции в математической физике*. Москва: Наука; 1979. 320 с.
5. Бремерман Г. *Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье*. Москва: Мир; 1968. 276 с.
6. Антонец АБ, Шагова ТГ. Вложения распределений в алгебру мнемифункций на окружности. *Проблемы физики, математики и техники*. 2018;4(37):52–61.
7. Антосик П, Микусинский Я, Сикорский Р. *Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход*. Москва: Мир; 1976. 311 с.

References

1. Colombeau JF. *New generalized functions and multiplication of distributions*. Amsterdam: North-Holland; 1984. 374 p.
2. Egorov YuV. [A contribution to the theory of generalized functions]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 1990;45(5):3–40. Russian.
3. Antonevich AB, Radyno YaV. [A general method for constructing algebras of generalized functions]. *Doklady AN SSSR*. 1991; 318(2):267–270. Russian.
4. Vladimirov VS. *Obobshchennyye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow: Nauka; 1979. 320 p. Russian.
5. Bremermann H. *Distributions, complex variables, and Fourier transforms*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company; 1965. 186 p.
Russian edition: Bremerman G. *Raspredeleniya, kompleksnye peremennyye i preobrazovaniya Fur'e*. Moscow: Mir; 1968. 276 p.
6. Antonevich AB, Shahava TR. [The embeddings of distributions into the algebra of mnemofunctions on circle]. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki*. 2018;4(37):52–61. Russian.
7. Antosik P, Mikusinski Ja, Sikorski R. *Theory of distributions. The sequential approach*. Amsterdam: Elsevier; 1973.
Russian edition: Antosik P, Mikusinskii Ya, Sikorskii R. *Teoriya obobshchennykh funktsii. Sekventsial'nyi podkhod*. Moscow: Mir; 1976. 311 p.

Статья поступила в редколлегию 22.01.2019.
Received by editorial board 22.01.2019.