БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям
_______________ О.И.Чуприс
«12» июля 2019 г.
Регистрационный № УД-7010/уч.

Уравнения математической физики

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям)

направление специальности: **1-31 03 03-01 Прикладная математика (научно-производственная деятельность)**

2019 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 03-2013 и учебных планов № G31-173/уч. от 30.05.2013 г. и G31и-190/уч. от 30.05.2013 и типовой учебной программы № ТД – G.583/тип.от 03.05.2016 г.

СОСТАВИТЕЛИ:
И. С. Козловская, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
Чичурин А. В. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Брестского государственного университета;
В. И. Корзюк - академик НАН Беларуси, заведующий лабораторией математической физики института математики НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОЙ:
Кафедрой компьютерных технологий и систем Белорусского государственного университета
(протокол № 13 от 21мая 2019 г.)

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 5 от 28.06.2019)

Заведующий кафедрой КТС А. М. Недзьведь

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Круг вопросов, относящихся к математической физике, чрезвычайно широк. Возникающие при этом математические задачи содержат много общих элементов и составляют предмет математической физики. Метод исследования, характеризующий эту отрасль науки, является математическим по своему существу, и хотя постановка задач математической физики, будучи тесно связанной с изучением физических проблем, имеет специфические черты, следует отметить, что предмет «Уравнения математической физики» является важной составляющей общего математического образования. Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. Наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения 2-го порядка. Программа курса ограничена изложением аналитических методов решения задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка напримере классических уравнений теплопроводности, колебаний струны, Лапласа и других уравнений.

Цели и задачи учебной дисциплины:

Цель учебной дисциплины Уравнения математической физики – получение студентами навыков математического моделирования физических процессов с использованием уравнений с частными производными.

Образовательная цель: формирование составной части банка знаний, получаемых будущими специалистами в процессе учебы и необходимых им в дальнейшем для успешной работы.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, изучение алгоритмов исследования разрешимости прикладных задач.

Задачи учебной дисциплины:

1. Освоение методов решения и исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными;
2. Математическое моделирование естественнонаучных процессов.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Уравнения математической физики относится к дисциплинам государственного компонента цикла специальных дисциплин.

Содержание учебного материала учебной программы тесно связано с содержанием ряда общепрофессиональных и специальных дисциплин, которые изучались на младших курсах, в том числе «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ и интегральные уравнения».

Лекции раскрывают основные методы и подходы по каждой теме курса. Лабораторные занятия проводятся по темам курса, которые требуют закрепления теоретических знаний, полученных на лекциях и решения конкретных задач.

Связис другими учебными дисциплинами: Курс «Уравнения математической физики» тесно связан с курсами математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа и численных методов.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Уравнения математической физики» должно обеспечить формирование следующих академических, социально-личностных и профессиональных компетенций:

академические компетенции:

АК-1 Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2 Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3 Владеть исследовательскими навыками.

АК-4 Уметь работать самостоятельно.

АК-5 Быть свободным вырабатывать новые идеи(обладать креативностью).

АК-6 Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

социально-личностные компетенции:

СЛК-1 Обладать качествами гражданственности.

СЛК-2 Быть способным к социальному взаимодействию.

СЛК-3 Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

профессиональные компетенции:

ПК-1 Работать с научно-технической, нормативно-справочной и специальной литературой.

ПК-5 Владеть современными методами математического моделирования систем и процессов, участвовать в исследованиях новых методов и технологий

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- классификацию и методы приведения к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя и многими независимыми переменными;
- методы решения и обоснования корректности задачи Коши для уравнения колебания струны и уравнения теплопроводности;
- постановку и методы решения смешанных задач для уравнений гиперболического и параболического типа;
- постановку и методы решения краевых задач для уравнений эллиптического типа;

уметь:

- приводить к каноническому виду уравнения второго порядка;
- решать задачу Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности;

- решать смешанные задачи для уравнений колебания струны и теплопроводности;
- решать краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона.

владеть:

- методами математического моделирования;
- основными методами исследования Задачи Коши для дифференциальных уравнений с частными производными;
- основными методами исследования граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными;
- навыками самообразования и способами использования аппарата дифференциальных уравнений с частными производными для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 и 6 семестрах. Учебная программа по дисциплине «Уравнения математической физики» предусматривает для изучения дисциплины 252 учебных часа, в том числе 136 аудиторных часов: лекции – 68 часов, лабораторные занятия – 68 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6,5зачетные единицы.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – зачет(5 и 6 семестр),экзамен (6 семестр).

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1.Введение. Предварительные сведения.

Тема 1.1 Введение в курс. Основные разделы физики и соответствующие уравнения математической физики. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения с частными производными.

Тема 2.1 Понятие об уравнениях с частными производными. Линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения с частными производными.

Тема 2.2 Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка. Формула общего решения дифференциального уравнения с частными производными первого порядка. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка в случае двух независимых переменных. Теорема о сохранении типа уравнений при невырожденной замене независимых переменных для уравнений второго порядка в случае двух переменных. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка в случае многих независимых переменных. Характеристики для дифференциальных уравнений второго порядка.

Тема 2.3 Приведение к каноническому виду гиперболических уравнений второго порядка в случае двух независимых переменных. Приведение к каноническому виду параболических уравнений второго порядка в случае двух независимых переменных. Приведение к каноническому виду эллиптических уравнений второго порядка в случае двух независимых переменных. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка в случае многих независимых переменных. Характеристики дифференциальных уравнений. Связь характеристических направлений с характеристиками. Классификация дифференциальных уравнений с помощью характеристического многочлена. Связь классификации дифференциальных уравнений через дискриминант и характеристический полином.

Раздел 3. Основные уравнения математической физики

Тема 3.1 О постановке задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Корректная постановка задач. Примеры некорректно поставленных задач. Пример Адамара некорректной постановки задачи.

Тема 3.2 Уравнение поперечных колебаний струны. Уравнение теплопроводности. Задачи для уравнения поперечных колебаний струны. Задачи для уравнения теплопроводности.

Тема 3.3 Вывод уравнения поперечных колебаний мембраны. Задачи для волнового уравнения в многомерном случае. Уравнение Пуассона и задачи для него. Задачи для уравнения теплопроводности в многомерном случае.

Тема 3.4 Задачи сопряжения. Уравнение неразрывности. Уравнения движения. Уравнение энергии. Уравнения газовой динамики и гидродинамики и задачи для них.

Тема 3.5 Уравнения Максвелла. Уравнение Гельмгольца. Другие уравнения математической физики.

Раздел 4. Задачи Коши и Гурса

Тема 4.1 Постановка задачи Коши. Простейшая и обобщенная задача Коши.

Тема 4.2 Аналитические функции. Теорема Ковалевской.

Тема 4.3 Формула Даламбера. Смешанная задача в четверти плоскости для волнового уравнения.

Тема 4.4 Формула Пуассона для волнового уравнения. Вывод формулы Даламбера из формулы Пуассона. Формула Кирхгофа.

Тема 4.5 Метод Дюамеля и формулы решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения.

Тема 4.6 Принцип Гюйгенса. Принцип минимума и максимума для уравнения теплопроводности.

Тема 4.7 Преобразование Фурье. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Обоснование формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Тема 4.8 Метод Римана. Метод Римана для задачи Коши.

Тема 4.9 Постановка задачи Гурса для гиперболического уравнения. Метод последовательных приближений.

Раздел 5. Смешанные задачи для уравнений гиперболического и параболического типов.

Тема 5.1 Смешанные задачи для волнового уравнения.

Тема 5.2 Смешанные задачи для уравнения теплопроводности.

Тема 5.3 Задача Штурма-Лиувилля.

Тема 5.4 Общая схема метода разделения переменных.

Тема 5.5 Метод Фурье для смешанных задач для гиперболических уравнений.

Тема 5.6 Метод Фурье для смешанных задач параболических уравнений.

Тема 5.7 Обоснование метода Фурье для классического решения смешанных задач уравнения теплопроводности.

Раздел 6. Классические методы в теории эллиптических задач

Тема 6.1 Метод Фурье.

Тема 6.2 Задача Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

Тема 6.3 Задача Неймана для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

Тема 6.4 Задача со смешанными условиями для уравнения. Граничные задачи для уравнения Пуассона с условиями третьего рода.

Тема 6.5 Задача Дирихле для уравнения Пуассона в параллелепипеде.

Тема 6.6 Уравнение теории специальных функций. Цилиндрические функции. Полиномы Лежандра. Присоединенные функции Лежандра. Полиномы Якоби, Чебышева, Лагерра, Эрмита.

Тема 6.7 Метод Фурье для канонических областей. Граничные задачи для уравнения Пуассона в круговом цилиндре. Сферические функции. Шаровые функции. Задача Штурма-Лиувилля в шаре для оператора Лапласа.

Тема 6.8 Метод Грина. Формулы Грина. Гармонические функции. Единственность решений задач Дирихле для уравнения Пуассона. Метод Грина для задачи Дирихле. Метод Грина для задачи Неймана. Построение функции Грина для задачи Дирихле. Интеграл Пуассона для круга и шара. О единственности решений внутренней задачи Неймана. О единственности решений внешней задачи Неймана.

Тема 6.9 Метод потенциалов. Потенциалы простого и двойного слоя. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям. О разрешимости задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа (метод потенциалов). Метод потенциалов для задач уравнения Гельмгольца.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Введение. Предварительные сведения**	**2**			**2**			
1.1	Введение в курс. Основные разделы физики и соответствующие уравнения математической физики. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.	2			2			опрос и проверка отчета
2	**Дифференциальные уравнения с частными производными.**	**6**			**6**			
2.1	Понятие об уравнениях с частными производными. Линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения с частными производными. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка. Формула общего решения дифференциального уравнения с частными производными первого порядка.	2			2			опрос и проверка отчета
2.2	Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка в случае двух независимых переменных. Теорема о сохранении типа уравнений при невырожденной замене независимых переменных для уравнений второго порядка в случае двух переменных. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка в случае многих независимых переменных. Характеристики для дифференциальных уравнений второго порядка.	2			2			опрос и проверка отчета
2.3	Приведение к каноническому виду гиперболических уравнений второго порядка в случае двух независимых переменных. Приведение к каноническому виду параболических уравнений второго порядка в случае двух независимых	2			2			опрос и проверка отчета

	переменных. Приведение к каноническому виду эллиптических уравнений второго порядка в случае двух независимых переменных. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка в случае многих независимых переменных. Характеристики дифференциальных уравнений. Связь характеристических направлений с характеристиками. Классификация дифференциальных уравнений с помощью характеристического многочлена. Связь классификации дифференциальных уравнений через дискриминант и характеристический полином							
3	**Основные уравнения математической физики**	**10**			**10**			
3.1	О постановке задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Корректная постановка задач. Примеры некорректно поставленных задач. Пример Адамара некорректной постановки задачи.	2			2			коллоквиум
3.2	Уравнение поперечных колебаний струны. Уравнение теплопроводности. Задачи для уравнения поперечных колебаний струны. Задачи для уравнения теплопроводности.	2			2			опрос и проверка отчета
3.3	Вывод уравнения поперечных колебаний мембраны. Задачи для волнового уравнения в многомерном случае. Уравнение Пуассона и задачи для него. Задачи для уравнения теплопроводности в многомерном случае.	2			2			опрос и проверка отчета
3.4	Тема 3.4 Задачи сопряжения. Уравнение неразрывности. Уравнения движения. Уравнение энергии. Уравнения газовой динамики и гидродинамики и задачи для них.	2			2			опрос и проверка отчета
3.5	Уравнения Максвелла. Уравнение Гельмгольца. Другие уравнения математической физики.	2			2			опрос и проверка отчета
4	**Задачи Коши и Гурса**	**18**			**18**			
4.1	Постановка задачи Коши. Простейшая и обобщенная задача Коши.	2			2			опрос и проверка отчета
4.2	Аналитические функции. Теорема Ковалевской.	2			2			коллоквиум
4.3	Формула Даламбера. Смешанная задача в четверти плоскости для волнового уравнения.	2			2			опрос и проверка отчета
4.4	Формула Пуассона для волнового уравнения. Вывод формулы Даламбера из	2			2			опрос и про-

	формулы Пуассона. Формула Кирхгофа.							верка отчета
4.5	Метод Дюамеля и формулы решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения.	2			2			опрос и проверка отчета
4.6	Принцип Гюйгенса. Принцип минимума и максимума для уравнения теплопроводности.	2			2			опрос и проверка отчета
4.7	Преобразование Фурье. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Обоснование формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.	2			2			опрос и проверка отчета
4.8	Метод Римана. Метод Римана для задачи Коши.	2			2			Контрольная работа
4.9	Постановка задачи Гурса для гиперболического уравнения. Метод последовательных приближений.	2			2			опрос и проверка отчета
5	**Смешанные задачи для уравнений гиперболического и параболического типов.**	**14**			**14**			
5.1	Смешанные задачи для волнового уравнения.	2			2			опрос и проверка отчета
5.2	Смешанные задачи для уравнения теплопроводности.	2			2			опрос и проверка отчета
5.3	Задача Штурма-Лиувилля.	2			2			опрос и проверка отчета
5.4	Общая схема метода разделения переменных.	2			2			коллоквиум
5.5	Метод Фурье для смешанных задач для гиперболических уравнений.	2			2			опрос и проверка отчета
5.6	Метод Фурье для смешанных задач параболических уравнений.	2			2			опрос и проверка отчета
5.7	Обоснование метода Фурье для классического решения смешанных задач уравнения теплопроводности	2			2			опрос и проверка отчета
6	**Классические методы в теории эллиптических задач**	**18**			**18**			
6.1	Метод Фурье	2			2			
6.2	Задача Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике.	2			2			опрос и проверка отчета

6.3	Задача Неймана для уравнения Пуассона в прямоугольнике.	2			2			коллоквиум
6.4	Задача со смешанными условиями для уравнения. Граничные задачи для уравнения Пуассона с условиями третьего рода.	2			2			опрос и проверка отчета
6.5	Задача Дирихле для уравнения Пуассона в параллелепипеде.	2			2			опрос и проверка отчета
6.6	Уравнение теории специальных функций. Цилиндрические функции. Полиномы Лежандра. Присоединенные функции Лежандра. Полиномы Якоби, Чебышева, Лагерра, Эрмита.	2			2			опрос и проверка отчета
6.7	Метод Фурье для канонических областей. Граничные задачи для уравнения Пуассона в круговом цилиндре. Сферические функции. Шаровые функции. Задача Штурма-Лиувилля в шаре для оператора Лапласа.	2			2			опрос и проверка отчета
6.8	Метод Грина. Формулы Грина. Гармонические функции. Единственность решений задач Дирихле для уравнения Пуассона. Метод Грина для задачи Дирихле. Метод Грина для задачи Неймана. Построение функции Грина для задачи Дирихле. Интеграл Пуассона для круга и шара. О единственности решений внутренней задачи Неймана. О единственности решений внешней задачи Неймана.	2			2			опрос и проверка отчета
6.9	Метод потенциалов. Потенциалы простого и двойного слоя. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям. О разрешимости задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа (метод потенциалов). Метод потенциалов для задач уравнения Гельмгольца.	2			2			Контрольная работа
	Итого	68			68			

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Корзюк В.И. Уравнения математической физики. Минск. «Издательский центр БГУ». 2011. 460 с.

2. Ерофеенко В.Т., Козловская И.С. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: Курс лекций. Изд. стереотипное. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2018. — 248 с.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2017. – 736 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Мінюк С.А., Глушцоў А.І., Наркун З.М., Немец У.С. Урауненні і метадыматэматычнайфізікі . – Гродна: Грод. дзярж. ун-т, 2002. – 435 с.

2. Русак В.Н. Математическая физика. – Минск: Изд-во Дизайн ПРО, 2008. – 208 с.

3. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики/ В.С. Владимиров. – 2-е изд., стер. – М.: МАИК "Наука", 2000.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Текущий контроль осуществляется путем оценки знаний и активности студентов на лабораторных занятиях, рубежных контрольных мероприятий в форме выполнений индивидуальных заданий, контрольных работ и коллоквиумов.

Выполнение заданий является обязательным для всех студентов.

Основным средством диагностики усвоения знаний и овладения необходимыми компетенциями по учебной дисциплине «Уравнения математической физики» является проверка индивидуальных заданий, выполняемых в рамках часов, отводимых на лабораторные занятия, контрольные работы, коллоквиумы.

Для диагностики могут использоваться собеседование по теме занятия, оценка выполнения индивидуального лабораторного задания, оценка результатов коллоквиума.

Оценка за лабораторное занятие включает:

- ответ (полнота ответа) – 30 %
- выполнение индивидуального лабораторного задания – 70 %

Коллоквиумы используются для обобщения исистематизации учебного материала. В коллоквиум включаются теоретический вопрос и решение практической задачи. При оценивании коллоквиума внимание обращается на:

содержание и последовательность изложения теоретического вопроса - 30%

соответствие и полноту раскрытия вопроса - 30 %

грамотный научный подход к решению практической задачи - 40%

Формой текущего контроля по дисциплине «Уравнения математической физики» учебным планом предусмотрен зачет и экзамен.

Используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения.Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Для зачета необходимо выполнение 80% процентов заданий для лабораторных работ.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

- ответы на лабораторных занятиях– 50%
- результаты коллоквиума – 50 %

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Оценка по текущей успеваемости составляет 30%, экзаменационная оценка – 70 %.

Пропуск 25 % и более занятий по курсу (в том числе и по уважительной причине) ведет к тому, что положительная оценка по курсу не может быть выставлена.

Примерная тематика заданий для лабораторных занятий

Задание 1. Привести к каноническому виду уравнение $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + cu = f$,

если $n=3,\ f=0,\ a_{ij}=a_{ji}$ и коэффициенты определены в таблице:

№	a_{11}	a_{22}	a_{33}	a_{12}	a_{13}	a_{23}	b_1	b_2	b_3	c
1	1	2	2	1	-1	0	0	0	0	0
2	1	0	-1	1	-2	-3	0	0	0	0
3	2	2	-6	3	5	2	0	0	0	0
4	1	2	0	1	0	-1	0	0	3	-1
5	3	4	5	1	0	2	0	0	0	0
6	1	2	5	1	0	2	0	0	0	0
7	1	4	1	-2	1	0	3	0	0	0
8	0	0	0	3/2	-1	-1/2	0	0	0	-1
9	1	3	3	-1	-1	-1	0	0	0	-8
10	1	1	1	3	1	1	2	2	2	4
11	2	5	2	-3	-2	3	0	0	0	-3
12	0	3	0	-1	0	-1	0	0	0	4
13	1	4	1	2	1	2	0	0	0	2
14	1	2	9	2	3	6	-2	-4	-6	0

15	0	0	0	1	-1/2	1	0	0	0	-1
16	0	0	0	1/2	-1/2	-1/2	0	0	0	0
17	0	0	0	1/2	-1	1/2	1	1/2	0	0
18	0	0	1	1/2	0	0	1	-1	0	0

Задание 2. Привести уравнение $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + + b_2u_y + cu = f$ к каноническому виду и упростить, если коэффициенты постоянны и определены следующим образом

№	a_{11}	$2a_{12}$	a_{22}	b_1	b_2	c	f
1	1	4	5	1	1	1	0
2	1	-6	9	-1	2	0	0
3	0	2	-4	1	-2	1	x
4	0	1	2	-1	4	1	0
5	2	2	1	4	4	1	0
6	1	2	1	3	-5	4	y
7	1	0	1	1	1	-4	0
8	1	1	0	0	-1	-10	$-4x$
9	3	1	0	3	1	-1	$-y$
10	1	2	5	-2	-2	1	0
11	5	16	16	24	32	64	0
12	1	-2	1	-3	12	27	0
13	2	3	1	7	4	-2	0
14	1	1	-2	-3	-15	27	0
15	9	-6	1	10	-15	50	$2y - x$
16	1	4	10	-24	42	0	$-2(x+y)$
17	1	4	13	3	24	-9	$-9(x+y)$
18	a	$4a$	a	b	c	1	0

Задание 3. Привести уравнение $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + + b_2u_y + cu = f$ к каноническому виду, если коэффициенты переменные и определены следующим образом

№	a_{11}	$2a_{12}$	a_{22}
1	1	0	x
2	1	0	y
3	x	0	y
4	1	0	xy
5	$\operatorname{sign} y$	2	1
6	1	2	$1 - \operatorname{sign} y$

7	$\operatorname{sign} y$	2	$\operatorname{sign} x$
8	x	0	1
9	y	0	1
10	1	0	$-x$
11	1	0	$-y$
12	y	0	x
13	x	0	$-y$
14	y	0	$-x$
15	1	0	$-xy$
16	xy	0	1
17	xy	0	-1
18	1	2	$\operatorname{sign} y$

Задание 4. Привести уравнение $a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + + a_{22}(x,y)u_{yy} = 0$ к каноническому виду в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения. Коэффициенты уравнения заданы в таблице

№	a_{11}	$2a_{12}$	a_{22}	b_1	b_2	c	f
1	y^2	0	$-x^2$	0	0	0	0
2	x^2	0	$-y^2$	0	0	0	0
3	x^2	0	y^2	0	0	0	0
4	y^2	0	x^2	0	0	0	0
5	y^2	$2xy$	x^2	0	0	0	0
6	$4y^2$	$-e^{2x}$	$-4y^2$	0	0	0	0
7	x^2	$2xy$	y^2	0	0	0	0
8	x^2	$2xy$	$-3y^2$	$-2x$	$4y$	$16x^4$	0
9	$1+x^2$	0	$1+y^2$	x	y	0	0
10	$\sin^2 x$	$-2y\sin x$	y^2	0	0	0	0
11	1	0	$(1+y^2)^2$	0	$-2y(1+y^2)$	0	0
12	xy^2	$-2x^2y$	x^2	$-y^2$	0	0	0
13	1	$-2\sin x$	$-\cos^2 x$	0	$-\cos x$	0	0
14	e^{2x}	$2e^{x+y}$	e^{2y}	0	0	$-x$	0
15	1	$-2\sin x$	$2-\cos^2 x$	0	0	0	0
16	y^2	$2y$	1	0	0	0	0
17	x^2	$-2x$	1	0	0	0	0
18	1	$2(1+2x)$	$4x(1+x)$	0	2	0	0

Задание 5. Найти общее решение уравнения

№	Вид уравнения
1	$u_{xy} = f(x,y)$
2	$u_{yy} = f(x,y)$
3	$u_{xy} + au_x = 0$, $a = \text{const}$
4	$u_{xy} + a(x)u_x = 0$
5	$u_{xy} + b(y)u_x = 0$
6	$u_{xx} + b(y)u_x = 0$
7	$u_{xy} + a(x,y)u_x = 0$
8	$u_{xx} + a(x,y)u_x = 0$
9	$u_{xy} - xu_x + u = 0$
10	$u_{xy} + u_x + yu_y + (1-y)u = 0$
11	$u_{xy} + xu_x + 2yu_y + 2xyu = 0$
12	$u_{xy} + xu_x - u + \cos y = 0$
13	$u_{xy} + yu_y - u = 0$
14	$\operatorname{ch} x u_{xy} + (\operatorname{sh} x + y \operatorname{ch} x)u_y - \operatorname{ch} x u = 0$
15	$u_{xy} + u_y + 2x^2 y(u_x + u) = 0$
16	$u_{xy} + u_y + x(u_x + u) + x^2 y = 0$
17	$u_{xy} + yu_y - u = 0$
18	$u_{xy} - \dfrac{1}{x-y}u_x + \dfrac{1}{x-y}u_y = 0$

Задание 6. Найти общее решение уравнения

№	Вид уравнения
1	$yu_{xx} - (y-x)u_{xy} - xu_{yy} = 0$
2	$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$
3	$3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + u_x + u_y + \dfrac{1}{16}u - 16xe^{-\frac{x+y}{16}} = 0$
4	$u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y - 4e^x = 0$
5	$u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2)u_y = 0$
6	$e^{-2x}u_{xx} - e^{-2y}u_{yy} - e^{-2x}u_x + e^{-2y}u_y + 8e^y = 0$

7	$4y^2u_{xx}+2\left(1-y^2\right)u_{xy}-u_{yy}-\frac{2y}{1+y^2}\left(2u_x-u_y\right)=0$
8	$u_{xx}+2\cos x u_{xy}-\sin^2 x u_{yy}-\sin x u_y=0$
9	$u_{xx}-2\sin x u_{xy}-\left(3+\cos^2 x\right)u_{yy}-\cos x u_y=0$
10	$u_{xx}+2\sin x u_{xy}-\cos^2 x u_{yy}+u_x+\left(\sin x+\cos x+1\right)u_y=0$
11	$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}-3y^2u_{yy}-2xu_x=0$
12	$u_{xx}+2(1+2x)u_{xy}+4x(1+x)u_{yy}+2u_y=0$
13	$yu_{xx}+x(2y-1)u_{xy}-2x^2u_{yy}-\frac{y}{x}u_x+\frac{2x}{1+2y}\left(u_x+2xu_y\right)=0$
14	$yu_{xx}-(x+y)u_{xy}+xu_{yy}-\frac{x+y}{x-y}\left(u_x-u_y\right)=0$
15	$3u_{xx}-10u_{xy}+3u_{yy}-2u_x+4u_y+\frac{5}{16}u=0$
16	$e^y u_{xy}-u_{yy}+u_y-xe^{2y}=0$
17	$u_{xx}+2\cos x u_{xy}-\sin^2 x u_{yy}+u_x+\left(1+\cos x-\sin x\right)u_y=0$
18	$x^2u_{xx}-2xyu_{xy}-3y^2u_{yy}=0$

Задание 7. Найти решение задачи Коши

№	Задача Коши
1	$xu_{xy}-yu_{yy}-u_y=2x^3,\quad x>0$ $u\big\|_{y=\frac{1}{x}}=\sin x,\qquad u_x\big\|_{y=\frac{1}{x}}=\cos x$
2	$xu_{xx}+(x+y)u_{xy}+yu_{yy}=0,\quad x>0$ $u\big\|_{y=\frac{1}{x}}=x^3,\qquad u_x\big\|_{y=\frac{1}{x}}=2x^2$
3	$u_{xx}+2(1+2x)u_{xy}+4x(1+x)u_{yy}+2u_y=0,\quad \|y\|<\infty$ $u\big\|_{x=0}=y,\qquad u_x\big\|_{x=0}=2$
4	$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-2yu_y=0,\quad y<0$ $u\big\|_{x=1}=y,\qquad u_x\big\|_{x=1}=y$
5	$u_{xx}-4x^2u_{yy}-2yu_y=0,\quad \|y\|<\infty$ $u\big\|_{x=1}=y^2+1,\qquad u_x\big\|_{x=1}=4$
6	$x^2u_{xx}-2xyu_{xy}-3y^2u_{yy}=0,\qquad x>0$ $u\big\|_{y=1}=0,\qquad u_y\big\|_{y=1}=\sqrt[4]{x^7}$

7	$yu_{xx}+x(2y-1)u_{xy}-2x^2u_{yy}-\frac{y}{x}u_x+\frac{2x}{1+2y}(u_x+2xu_y)=0,$ $u\big\vert_{y=0}=x^2, \qquad u_y\big\vert_{y=0}=1$
8	$yu_{xx}-(x+y)u_{xy}+xu_{yy}-\frac{x+y}{x-y}(u_x-u_y)=0, \quad x>0$ $u\big\vert_{y=0}=x^2, \qquad u_y\big\vert_{y=0}=x$
9	$4y^2u_{xx}+2(1-y^2)u_{xy}-u_{yy}-\frac{2y}{1+y^2}(2u_x-u_y)=0, \quad \vert y\vert<\infty$ $u\big\vert_{y=0}=1, \qquad u_y\big\vert_{y=0}=x$
10	$u_{xx}+2\cos x\,u_{xy}-\sin^2 x u_{yy}-\sin x u_y=0, \qquad \vert y\vert<\infty$ $u\big\vert_{y=\sin x}=x+\cos x, \qquad u_y\big\vert_{y=\sin x}=\sin x$
11	$u_{xx}-2\sin x\,u_{xy}-(3+\cos^2 x)u_{yy}-\cos x u_y=0, \qquad \vert y\vert<\infty$ $u\big\vert_{y=\cos x}=\sin x, \qquad u_y\big\vert_{y=\cos x}=1/2e^x$
12	$e^y u_{xy}-u_{yy}+u_y=0, \qquad \vert y\vert<\infty$ $u\big\vert_{y=0}=-\frac{x^2}{2}, \qquad u_y\big\vert_{y=0}=-\sin x$
13	$u_{xx}-2\sin x\,u_{xy}-(3+\cos^2 x)u_{yy}+u_x+(2-\sin x-\cos x)u_y=0, \qquad \vert y\vert<\infty$ $u\big\vert_{y=\cos x}=0, \qquad u_y\big\vert_{y=\cos x}=e^{-\frac{x}{2}}\cos x$
14	$u_{xx}+2\sin x\,u_{xy}-\cos^2 x u_{yy}+u_x+(\sin x+\cos x+1)u_y=0, \qquad \vert y\vert<\infty$ $u\big\vert_{y=-\cos x}=1+2\sin x, \qquad u_y\big\vert_{y=-\cos x}=\sin x$
15	$u_{xx}+2\cos x\,u_{xy}-\sin^2 x u_{yy}+u_x+(1+\cos x-\sin x)u_y=0, \qquad \vert y\vert<\infty$ $u\big\vert_{y=\sin x}=\cos x, \qquad u_y\big\vert_{y=\sin x}=\sin x$
16	$e^y u_{xy}-u_{yy}+u_y=xe^{2y}, \qquad \vert y\vert<\infty$ $u\big\vert_{y=0}=\sin x, \qquad u_y\big\vert_{y=0}=\frac{1}{1+x^2}$
17	$u_{xx}-u_{yy}+5u_x+3u_y+4u=0, \qquad \vert y\vert<\infty$ $u\big\vert_{y=0}=x^2, \qquad u_y\big\vert_{y=0}=1$
18	$yu_{xx}+x(2y-1)u_{xy}-2x^2u_{yy}-\frac{y}{x}u_x+\frac{2x}{1+2y}(u_x+2xu_y)=0,$

	$u\big\vert_{y=0} = x^2, \qquad u_y\big\vert_{y=0} = 1$

Задание 8. Найти решение задачи Гурса

№	Задача Гурса
1	$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0, \quad -\frac{1}{4}x^2 < y < 0, x > 0$ $u\big\vert_{y=0} = 0, \qquad u\big\vert_{y=-\frac{1}{4}x^2} = x^2$
2	$u_{xy} - e^x u_{yy} = 0, \quad y > -e^x, \quad x > 0$ $u\big\vert_{x=0} = y^2, \qquad u\big\vert_{y=-e^x} = 1 + x^2$
3	$yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad 0 < y < x, \quad x > 0$ $u\big\vert_{y=0} = 0, \qquad u\big\vert_{y=x} = 4x^4$
4	$xu_{xx} + (x-y)u_{xy} - yu_{yy} = 0, \quad 0 < y < x, \quad x > 0$ $u\big\vert_{y=0} = 0, \qquad u\big\vert_{y=x} = x$
5	$y^2u_{xx} + u_{xy} = 0, \quad y^3 - 8 < 3x < y^3, \quad 0 < y < 2$ $u\big\vert_{y=2} = 3x + 8, \qquad u\big\vert_{3x=y^3} = 2y^3$
6	$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0, \qquad y > x, \quad x > 1$ $u\big\vert_{x=1} = 1, \qquad u\big\vert_{y=x} = x$
7	$x^2u_{xx} - y^2 u_{yy} + xu_x - yu_y = 0, \quad \frac{1}{x} < y < x, \quad x > 1$ $u\big\vert_{y=x} = x, \qquad u\big\vert_{y=\frac{1}{x}} = 1 + \ln x$
8	$3x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0, \quad x < y < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad 0 < x < 1$ $u\big\vert_{y=x} = x, \qquad u\big\vert_{xy^3=1} = y^2$
9	$3x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0, \quad 1 < y < x, \quad x > 1$ $u\big\vert_{y=x} = 0, \qquad u\big\vert_{y=1} = \cos\frac{\pi x}{2}$
10	$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0, \qquad \lvert y - \cos x \rvert < x, \quad x > 0$ $u\big\vert_{y=x+\cos x} = \cos x, \qquad u\big\vert_{y=x+\cos x} = \cos x$
11	$u_{xy} - \frac{1}{x-y}\left(u_x - u_y\right) = 1, \qquad y < -x, \quad x > 2$

	$u\|_{y=-x}=0, \quad u\|_{x=2}=2+2y+1/2\,y^2$
12	$u_{xx}-u_{yy}+\frac{2}{x}u_x=0, \quad y>1+\|x\|$ $u\|_{y=x+1}=1-x, \quad u\|_{y=1-x}=1+x$
13	$u_{xx}-u_{yy}+\frac{4}{x}u_x+\frac{2}{x^2}u=0, \quad y>x, \quad x>1$ $u\|_{y=x}=1, \quad u\|_{x=1}=y$
14	$2u_{xx}-2u_{yy}+u_x+u_y=0, \quad y>\|x\|$ $u\|_{y=x}=1, \quad u\|_{y=-x}=(x+1)e^x$
15	$2u_{xx}+u_{xy}-u_{yy}+u_x+u_y=0, \quad -\frac{1}{2}x<y<x, \quad x>0$ $u\|_{y=x}=1+3x, \quad u\|_{y=-\frac{1}{2}x}=1$
16	$u_{xy}=1, \quad \alpha x<y<\beta x, \quad x>0, \quad 0<\alpha<\beta$ $u\|_{y=\alpha x}=0, \quad u\|_{y=\beta x}=0$
17	$u_{xy}+u_x=x, \quad x>0, \quad y>0$ $u\|_{x=0}=y^2, \quad u\|_{y=0}=x^2$
18	$u_{xy}+x^2yu_x=0, \quad y>0, \quad x>0$ $u\|_{x=0}=0, \quad u\|_{y=0}=x$

Задание 9. Решить смешанные задачи для уравнения $u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad 0<x<l, \quad t>0$, если граничные и начальные условия заданы следующим образом:

№	$x=0$	$x=l$	$u\|_{t=0}$	$u_t\|_{t=0}$
1	$u=0$	$u=0$	x	0
2	$u_x=0$	$u=0$	1	x
3	$u_x=0$	$u_x=0$	$1+x$	0
4	$u=0$	$u_x=0$	x	0
5	$u_x-u=0$	$u=0$	1	0
6	$u_x-u=0$	$u_x=0$	0	1
7	$u=0$	$u_x+u=0$	1	1
8	$u_x=0$	$u_x+u=0$	1	1
9	$u=0$	$u=0$	$\sin(\pi x/l)$	1
10	$u_x=0$	$u=0$	$\cos(\pi x/l)$	0
11	$u_x=0$	$u_x=0$	0	$\cos(\pi x/l)$

Задание 10. Решить смешанные задачи для уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0$, если правая часть уравнения, граничные и начальные условия заданы следующим образом:

№	$f(x,t)$	$x=0$	$x=l$	$u\|_{t=0}$	$u_t\|_{t=0}$
1	xt^2	$u=0$	$u=0$	0	$\sin^2(\pi x/l)$
2	$t\sin(5\pi x/l)$	$u=0$	$u_x=0$	$\sin(3\pi x2/l)$	0
3	t^2	$u_x=0$	$u=0$	0	$\cos(5\pi x/2l)$
4	xe^{-t}	$u_x=0$	$u_x=0$	1	$\cos(\pi x/l)$
5	$\cos t$	$u=0$	$u_x=0$	$\sin(\pi x/2l)$	0
6	t	$u=0$	$u_x=0$	$\cos(\pi x/2l)$	$\cos(3\pi x/2l)$
7	$\sin t$	$u=0$	$u=0$	x	0
8	e^{-t}	$u_x=0$	$u_x=0$	$\cos(\pi x/l)$	0
9	t^3	$u=0$	$u_x=0$	1	$\sin(\pi x/2l)$
10	$\cos t$	$u_x=0$	$u=0$	x	$\cos(\pi x/2l)$
11	$x\cos t$	$u_x=0$	$u_x=0$	x^2	0

Задание 11. Решить смешанные задачи для уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0$, если $f(x,t) \equiv 0$, а граничные и начальные условия заданы следующим образом:

№	$x=0$	$x=l$	$u\|_{t=0}$	$u_t\|_{t=0}$
1	$u=t^2$	$u=t^3$	$\sin(\pi x/l)$	0
2	$u=e^{-t}$	$u=t$	$\sin(\pi x/l)$	1
3	$u=t$	$u_x=1$	$\sin(\pi x/2l)$	1
4	$u_x=0$	$u_x=e^{-t}$	$\operatorname{ch} x$	0
5	$u=t+1$	$u=t^3+2$	$x+1$	0
6	$u=t^2$	$u=0$	x/l	$x+1$
7	$u=e^{-t}$	$u_x=0$	x^2/l^2	0
8	$u_x=0$	$u=t^3$	x^2/l^2	0
9	$u_x=2t$	$u=ty$	0	0
10	$u=t$	$u=t^2$	0	x
11	$u_x=0$	$u_x=e^{-t}$	1	0

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

Приорганизации образовательного процесса используется***практико-ориентированный подход,*** который предполагает***:***

- освоение содержание образования через решения практических задач;

- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Уравнения математической физики» следует использовать современные информационные технологии, разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, презентации лекций, методические указания к практическим занятиям, электронные версии домашних заданий, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в том числе вопросы для подготовки к экзамену, задания, вопросы для самоконтроля, список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерный перечень вопросов к экзамену.

1. Общие понятия о дифференциальных уравнениях с частными производными
2. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными
3. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка
4. Квазилинейные неоднородные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка
5. Системы дифференциальных уравнений с частными производными
6. Замена независимых переменных в дифференциальных уравнениях с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными
7. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными

8. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с n независимыми переменными
9. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с n независимыми переменными
10. Исключение младших производных в дифференциальных уравнениях с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами
11. Корректная постановка задачи Коши
12. Общее решение дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными
13. Метод характеристик решения задачи Коши для волнового уравнения
14. Корректность задачи Коши для волнового уравнения
15. Пример некорректно поставленной задачи по Адамару
16. Метод Дюамеля
17. Решение задачи Коши для волнового уравнения
18. Физическая и геометрическая интерпретации формулы Даламбера
19. Решение задачи Коши на полуограниченной прямой. Метод продолжений
20. Метод Римана
21. Уравнение колебания в пространстве
22. Метод усреднения
23. Метод спуска
24. Метод последовательных приближений для решения задачи Гурса
25. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности
26. Метод интегральных преобразований для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности
27. Принцип максимума и минимума для уравнения теплопроводности
28. Корректность задачи Коши для уравнения теплопроводности
29. Смешанные задачи для уравнений гиперболического типа
30. Постановка смешанных задач для уравнений параболического типа
31. Задача Штурма-Лиувилля
32. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля
33. Общая схема метода разделения переменных
34. Решение методом разделения переменных первой смешанной задачи для волнового уравнения
35. Сведение смешанной задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями
36. Решение смешанных задач методом разделения переменных для неоднородного уравнения
37. Решение методом разделения переменных первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности
38. Корректность смешанной задачи для уравнения теплопроводности (существование)

39. Корректность смешанной задачи для уравнения теплопроводности (единственность, непрерывная зависимость от начальных данных)
40. Решение первой смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности в пластине
41. Задача о распространении тепла в однородном шаре
42. Решение смешанной задачи для волнового уравнения в четверти плоскости
43. Формула Грина
44. Интегральная формула Грина
45. Свойства гармонических функций
46. Принцип максимума и минимума для гармонических функций
47. Постановка краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона (внутренняя и внешняя задачи Дирихле)
48. Постановка краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона (внутренняя и внешняя задачи Неймана)
49. Решение методом разделения переменных задачи Дирихле для круга
50. Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона с помощью функции Грина
51. Построение функции Грина для полупространств
52. Построение функции Грина для шаровой области
53. Метод потенциалов
54. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям
55. Вывод уравнения колебания струны
56. Вывод уравнения теплопроводности
57. Вывод уравнения колебания мембраны
58. Уравнения гидродинамики
59. Уравнения электродинамики

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОЛЛОКВИУМОВ

Вариант 1.

1. Общие решения дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

2. Решить задачу Гурса

$$u_{xy} - e^{x}u_{yy} = 0, \quad y > e^{-x}, x > 0$$
$$u\big|_{x=0} = y^2, \quad u\big|_{y=e^{-x}} = 1 + x^2.$$

Вариант 2.

1. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.

2. Решить задачу Коши

$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$$
$$u\big|_{y=0} = x, \quad u_y\big|_{y=0} = 0 \quad .$$

Вариант 3.

1. Системы дифференциальных уравнений с частными производными.

2. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - \left(3 + \sin^2 x\right) u_{yy} + u_x + \left(\sin x - \cos x - 2\right) u_y = 0\,.$$

Вариант 4.

1. Метод Римана для решения обобщенной задачи Коши для гиперболического уравнения.

2. Решить задачу Коши

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$$
$$u\big|_{t=0} = xy, \quad u_t\big|_{t=0} = x + y.$$

Вариант 5.

1. Замена независимых переменных в дифференциальных уравнениях второго порядка с двумя независимыми переменными
2. Решить задачу Коши

$$xu_{xx} + \left(x + y\right) u_{xy} + yu_{yy} = 0,$$
$$u\big|_{y=1/x} = x^3, \quad u_y\big|_{y=1/x} = 2x^2.$$

Вариант 6.

1. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

2. Решить задачу Коши

$$u_{xx} + 2\left(1 + 2x\right) u_{xy} + 4x\left(1 + x\right) u_{yy} + 2u_y = 0,$$
$$u\big|_{x=0} = y, \quad u_x\big|_{x=0} = 2.$$

Вариант 7.

1. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка с n независимыми переменными.

2. Решить задачу Гурса

$$yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad 0 < y < x,\ x > 0$$
$$u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=x} = 4x^4.$$

Вариант 8.

1. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с n независимыми переменными.

2. Решить задачу Коши

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2,$$
$$u\big|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=0} = x + \cos x.$$

Вариант 9.

1. Исключение младших производных в уравнениях второго порядка с постоянными коэффициентами.

2. Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$$

Вариант 10.

1. Корректная постановка задачи Коши.

2. Решить задачу Коши

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2,$$
$$u\big|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=0} = x + \cos x.$$

Вариант 11.

1. Пример некорректно поставленной задачи Коши по Адамару.

2. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx}-2\cos x u_{xy}-\left(3+\sin^2 x\right)u_{yy}+u_x+\left(\sin x-\cos x-2\right)u_y=0.$$

Вариант 12.
1. Общие решения дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

2. Решить задачу Коши

$$xu_{xx}+\left(x+y\right)u_{xy}+yu_{yy}=0,$$
$$u\big|_{y=1/x}=x^3,\quad u_y\big|_{y=1/x}=2x^2.$$

Вариант 13.
1. Метод характеристик решения задачи Коши для волнового уравнения.

2. Решить методом Римана

$$u_{xy}=1$$
$$u\big|_{y=-x}=x,\quad u_y\big|_{y=-x}=1$$

Вариант 14.
1. Корректность задачи Коши для волнового уравнения.

2. Привести к каноническому виду

$$u_{xx}-2\sin x u_{xy}-\cos^2 x u_{yy}-\cos x u_y=0.$$

Вариант 15.
1. Метод Дюамеля решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения

2. Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения

$$u_{xx}-5u_{xy}+6u_{yy}-2u_x+3u_y-4u=0.$$

Вариант 16.
1. Задача Коши для волнового уравнения на полуограниченной прямой. Метод продолжений

2. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx}-2\cos x u_{xy}-\left(3+\sin^2 x\right)u_{yy}+u_x+\left(\sin x-\cos x-2\right)u_y=0.$$

Вариант 17.

1. Общие решения дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
2. Решить методом Римана

$u_{xy} = 0$

$u\big|_{y=-\ln x} = 1, \quad u_y\big|_{y=-\ln x} = x$

Вариант 18.

1. Задача Коши для волнового уравнения в пространстве
2. Решить методом Римана

$u_{xy} = 1$

$u\big|_{y=-x} = x, \quad u_y\big|_{y=-x} = 1$

Вариант 19.

1. Метод усреднений

2. Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения

$u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} - 2u_x + 3u_y - 4u = 0.$

Вариант 20.

1. Метод последовательных приближений для решения задачи Гурса.

2. Решить задачу Коши

$xu_{xx} + (x + y)u_{xy} + yu_{yy} = 0,$

$u\big|_{y=1/x} = x^3, \quad u_y\big|_{y=1/x} = 2x^2.$

Вариант 21.

1. Метод спуска.
2. Привести к каноническому виду

$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

ЗАДАЧА 1

Найти решение следующей смешанной задачи

$u_{tt} = u_{xx}$

$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0,$

$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0$

ЗАДАЧА 2
Найти решение задачи Гурса
$$2u_{xx}+u_{xy}-u_{yy}+u_x+u_y=0$$
$$u\big|_{y=x}=1+3x,\quad u\big|_{y=-\frac{1}{2}x}=1,$$

ЗАДАЧА 3
Найти решение задачи Коши
$$u_{xy}+u_x=0$$
$$u\big|_{y=x}=\sin x,\quad u_x\big|_{y=x}=1,$$

ЗАДАЧА 4
Привести к каноническому виду

$$u_{xx}-(1+y^2)^2u_{yy}-2y(1+y^2)u_y=0$$

ЗАДАЧА 5
Найти решение следующей смешанной задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx}$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=\cos\frac{\pi}{2l}x,\quad u_t(x,0)=\cos\frac{3\pi}{2l}x+\cos\frac{5\pi}{2l}x$$

ЗАДАЧА 6
Найти решение задачи Гурса:

$$u_{xy}-e^xu_{yy}=0,$$
$$u\big|_{x=0}=y^2,\quad u\big|_{y=-e^x}=1+x^2.$$

ЗАДАЧА 7
Привести к каноническому виду
$$y^2u_{xx}+x^2u_{yy}+xu_y=0.$$

ЗАДАЧА 8

Найти решение следующей смешанной задачи:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \sin 2x, \quad u_t(x,0) = 0.$$

ЗАДАЧА 9

Найти решение задачи Коши методом Римана:

$$u_{xy} = 0,$$
$$u\big|_{y=-\ln x} = 1, \quad u_y\big|_{y=-\ln x} = x.$$

ЗАДАЧА 10

Привести к каноническому виду

$$4u_{x_1x_1} + 2u_{x_1x_2} - 2u_{x_1x_3} + 2u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0.$$

ЗАДАЧА 11

Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + (2 - \cos^2 x)u_{yy} + \cos x u_x = 0.$$

ЗАДАЧА 12

Найти решение задачи Коши:

$$u_{tt} = u_{xx},$$
$$u\big|_{t=0} = x, \quad u_t\big|_{t=0} = 1.$$

ЗАДАЧА 13

Найти решение следующей смешанной задачи:

$$u_t = u_{xx},$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 1.$$

ЗАДАЧА 14

Найти решение задачи Коши:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$
$$u\big|_{t=0} = y^2, \quad u_t\big|_{t=0} = z^2.$$

ЗАДАЧА 15

Найти решение следующей смешанной задачи:

$$u_{tt} = u_{xx},$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \sin 2\pi x.$$

ЗАДАЧА 16

Привести к каноническому виду

$$e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} + u_x - u_y = 0.$$

ЗАДАЧА 17

Найти решение следующей смешанной задачи:

$$u_{tt} = u_{xx},$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \cos\frac{2\pi}{l}x, \quad u_t(x,0) = 0.$$

ЗАДАЧА 18

Привести к каноническому виду

$$4u_{x_1x_1} - 4u_{x_1x_2} - 2u_{x_2x_3} + u_{x_2} + u_{x_3} = 0.$$

ЗАДАЧА 19

Найти решение задачи Коши:

$$u_t = u_{xx},$$
$$u\big|_{t=0} = \cos x.$$

ЗАДАЧА 20

Привести к каноническому виду

$$u_{x_1x_2} - u_{x_1x_3} + u_{x_2} - u_{x_3} = 0.$$

ЗАДАЧА 21

Найти решение задачи Коши:

$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0,$$
$$u\big|_{y=0} = x, \quad u_y\big|_{y=0} = 0.$$

ЗАДАЧА 22

Найти решение задачи Коши:

$$xu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0, \quad x > 0$$
$$u\big|_{y=0} = x, \quad u_y\big|_{y=0} = 0.$$

ЗАДАЧА 23

Найти решение задачи Гурса:

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad x > 0$$
$$u\big|_{y=4x} = 5x + e^x, \quad u\big|_{y=-x} = 1.$$

ЗАДАЧА 24

Привести к каноническому виду:

$$u_{xx} - \left(1 + y^2\right)^2 u_{yy} - 2y\left(1 + y^2\right)u_y = 0.$$

ЗАДАЧА 25

Найти решение задачи Гурса:

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad x > 0$$
$$u\big|_{y=4x} = 5x + e^x, \quad u\big|_{y=-x} = 1.$$

ЗАДАЧА 26

Найти решение следующей смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx}$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0,$$
$$u(x,0 = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0$$

ЗАДАЧА 27

Найти решение задачи Гурса

$$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$$

$$u\big|_{y=x} = 1 + 3x, \quad u\big|_{y=-\frac{1}{2}x} = 1,$$

ЗАДАЧА 28

Найти решение задачи Коши

$$u_{xy} + u_x = 0$$

$$u\big|_{y=x} = \sin x, \quad u_x\big|_{y=x} = 1,$$

ЗАДАЧА 29

Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0$$

ЗАДАЧА 30

Найти решение следующей смешанной задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \cos\frac{\pi}{2l}x, \quad u_t(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2l}x + \cos\frac{5\pi}{2l}x$$

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1.			
2.			

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_______________________________ (протокол № 13 от 21 мая 2019 г.)

Заведующий кафедрой
______________________ ________________ Недзьведь А. М.

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
______________________ ________________ ____________________