

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

СТАБИЛИЗАЦИЯ ГРУПП ЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

А. С. Акулич

Белорусский государственный университет, г. Минск;

фрт.akoulichAS@bsu.by;

науч. рук. – Н. М. Дмитрук, канд. физ.-мат. наук, доц.

Настоящая работа посвящена решению задачи стабилизации группы взаимосвязанных динамических систем ограниченными обратными связями. В настоящее время эффективные подходы к управлению системами при наличии ограничений разрабатываются в теории управления по прогнозируемой модели (Model Predictive Control, MPC) [1]. Цель работы – развитие идей MPC на случай децентрализованной стабилизации, когда каждая подсистема группы управляется своим локальным регулятором. Децентрализация [2] позволяет распределить вычислительные затраты между подсистемами. Практическая значимость работы обусловлена значительным числом приложений в робототехнике, управлении энергетическими системами, транспортными системами и др.

Ключевые слова: группа динамических систем; стабилизация; децентрализация; управление по прогнозирующей модели; алгоритм.

Рассмотрим группу взаимосвязанных систем вида

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + \sum_{j \in I_i} A_{ij} x_j(k) + B_i u_i(k), x_i(0) = x_{i0}, k = 0, 1, \dots, i = I, \quad (1)$$

где $x_i \in R^{n_i}$ – состояние, $u_i \in R^{r_i}$ – управление i -ой системы; матрицы $A_i \in R^{n_i \times n_i}$, $B_i \in R^{n_i \times r_i}$ описывают собственную динамику системы и ее входное устройство; матрицы $A_{ij} \in R^{n_i \times n_j}$ описывают взаимосвязи между подсистемами; $I = \{1, \dots, q\}$, $I_i = I \setminus \{i\}$. Точкой равновесия в (1) является $x_i = 0$ при $u_i = 0, i \in I$. Управляющее воздействие ограничено: $\|u_i(k)\|_\infty \leq L, k = 0, 1, \dots, i \in I$, где $L > 0$ – задано, $\|z\|_\infty = \max_{i=1, n} |z_i|$.

Систему (1) можно исследовать как большую систему управления

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), x(0) = x_0, k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

где $A = (A_i)$, $B = \text{diag}(B_i)$, $x = (x_1^T, \dots, x_q^T)^T$, $x_0 = (x_{01}^T, \dots, x_{0q}^T)^T$, $u = (u_1^T, \dots, u_q^T)^T$.

Определение [3] Пусть G – окрестность точки $x=0$. Обратную связь $u(x)$, $x \in G$, назовем ограниченной стабилизирующей обратной связью для (2), если

$$1) \|u(x)\|_\infty \leq L, x \in G; u(0) = 0;$$

2) для любого $x \in G$, состояния $x(k)$, $k = 0, 1, \dots$, замкнутой системы $x(k+1) = Ax(k) + Bu(x(k))$ остаются в G ;

3) нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво в G .

Задача стабилизации с учетом ограничений на управления представляет сложную проблему. В настоящее время в теоретических исследованиях и приложениях популярен подход МРС [1]. Общая идея МРС состоит в решении в каждый момент времени $\tau \in 0, 1, \dots$ прогнозирующей задачи оптимального управления (ОУ), в которой горизонт управления T конечен, а начальное состояние совпадают с текущим состоянием процесса $x^*(\tau)$. Прогнозирующая задача ОУ, по решению которой строится стабилизирующая обратная связь для системы (2), имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} J^0(x^*(\tau)) &= \min J(u), \\ x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), k = \overline{0, T-1}, x(0) = x^*(\tau), \\ x(k) &\in G, k = \overline{1, T}, x(T) \in X_f, \\ \|u(k)\|_\infty &\leq L, k = \overline{0, T-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $J(u)$ – критерий качества; $X_f \subset G$ – терминальное множество.

Пусть $u^0(k | x^*(\tau)), k = \overline{0, T-1}$, – оптимальная программа задачи (3).

Алгоритм 1 (построения централизованной обратной связи) [1, 3]:

- 1) Положить $\tau = 0, x^*(\tau) = x_0$;
- 2) Найти оптимальную программу $u^0(k | x^*(\tau)), k = \overline{0, T-1}$, задачи (3);
- 3) Подать на вход (2) управляющее воздействие $u^*(\tau) = u^0(0 | x^*(\tau))$;
- 4) Положить $\tau := \tau + 1$ перейти к шагу 2).

Асимптотическая устойчивость системы, замкнутой управлением алгоритма 2, достигается за счет [1] выбора критерия качества $J(u)$ прогнозирующей задачи (4) и подходящего терминального условия в момент времени T . В настоящей работе примем [3] $J(u) = \max_{k=\overline{0, T-1}} \|u(k)\|_\infty$, $X_f = \{0\}$.

Объединим подход к построению централизованной стабилизирующей обратной связи и идею распределения управления [2] между управляющими устройствами подсистем (1). Будем считать, что каждая подсистема (1) имеет свой регулятор, который вырабатывает значение (децентрализованной) обратной связи только для своей подсистемы. Для этого каждый локальный регулятор в каждый момент времени решает свою локальную прогнозирующую задачу ОУ.

Основным результатом данной работы является подходящая формулировка такой локальной задачи. Она построена на основе принципов, изложенных в [2], и имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \min_{u_i} \sum_{k=0}^{T-1} \|u_i(k)\|_{\infty}, \\
& x_i(k+1) = A_i x_i(k) + \sum_{j \in I_i} A_{ij} x_j(k) + B_i u_i(k), \\
& x_i(k+1) = A_i x_i(k) + \sum_{j \in I_k} A_{kj} x_j(k), l \in I_i, k = 0, 1, \dots, T-1, \\
& x_i(0) = x_i^*(\tau), x_i(0) = 0, l \in I_i, x(T) = y_i^d(\tau), \\
& u_i(k) \in U_i, k = 0, 1, \dots, T-1.
\end{aligned} \tag{4}$$

В (4) минимум вычисляется по управляющему воздействию u_i , оптимальная программа задачи (4) обозначается $u_i^d(k|\tau)$, $k = 0, 1, \dots, T-1$. Начальным состоянием подсистемы i является ее текущее состояние $x_i^*(\tau)$. Информация об остальных подсистемах содержится в n -векторе

$$y_i^d(\tau) = F_i(T)x_i^d(1|\tau-1) + \sum_{s=1}^{T-1} F_i(T-s)B_i u_i^d(s|\tau-1)$$

где $F_i(k) \in R^{n \times n_i}$ – столбцы матрицы A^k , $x_i^d(1|\tau-1)$ – компоненты состояния $x^d(1|\tau-1) = Ax^*(\tau-1) + Bu^d(0|\tau-1)$, соответствующие системе i . Согласно приведенным формулам, для формирования задачи (4) достаточно получить от остальных систем $l \in I_i$ их состояния $x_l^*(\tau-1)$ и управления $u_l^d(0|\tau-1)$ в предыдущий момент времени.

Утверждение 1 Для любого $\tau \in T_{\tau} \setminus \{0\}$ агрегированная оптимальная программа $u^d(\cdot|\tau) = (u_l^d(\cdot|\tau), l \in I)$ переводит группу (1) в начало координат за время T : $x(\tau+T|\tau, x^*(\tau), u^d(\cdot|\tau)) = 0$.

Алгоритм 2 (построения децентрализованной обратной связи):

- 1) Положить $\tau = 0, x^*(\tau) = x_0$.
- 2) Найти решение $u^0(k|x_0), k = 0, 1, \dots, T-1$, централизованной вспомогательной задачи оптимального управления $P(x_0)$, положить $u_l^d(k|0) = u_l^0(k|x_0), k = 0, 1, \dots, T-1, l \in I$.

Для каждой подсистемы $i \in I$ (параллельно):

- 3) Подать на вход управляющее воздействие $u_i^*(\tau) = u_i^d(0|\tau)$.
- 4) Передать $x_i^*(\tau), u_i^*(\tau)$ всем подсистемам $l \in I_i$.
- 5) Положить $\tau := \tau + 1$, измерить текущее состояние $x_i^*(\tau)$.
- 6) Решить задачу (4), найти, $u_i^d(k|\tau), k = 0, 1, \dots, T-1$. Вернуться к 3).

Система (1) под действием децентрализованной обратной связи является асимптотически устойчивой. Как и в централизованном случае [1], асимптотическая устойчивость замкнутой системы следует из допустимости задачи (4) в момент τ , что гарантировано утверждением 1.

Описанные методы централизованной и децентрализованной стабилизации рассмотрим на примере группы, состоящей из трех систем

$$\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 + u_1, \ddot{x}_2 = -2kx_2 + kx_1 + kx_3 + u_2, \ddot{x}_3 = -2kx_3 + kx_2 + u_3. \quad (5)$$

Зададим параметры: $k=10$, $L=10$, $T=3$. Будем считать, что в начальный момент $\tau=0$ все три системы находились в состоянии покоя в разных положениях: $x_1(0)=-4, x_2(0)=3, x_3(0)=4$.

На рисунке представлены траектории и управляющие воздействия, полученные в результате применения алгоритмов 1 (штриховая линия) и 2 (сплошная линия). Как видно из рисунка, в обоих случаях система (5) стабилизируется примерно при $k=150$, но децентрализованное управление требует большей мощности управления. Следует отметить, что время решения в системе Matlab/CVX прогнозирующей задачи (3) составляло в среднем 1.5 сек, тогда как время параллельного решения задач (4) не превосходило 1 сек.

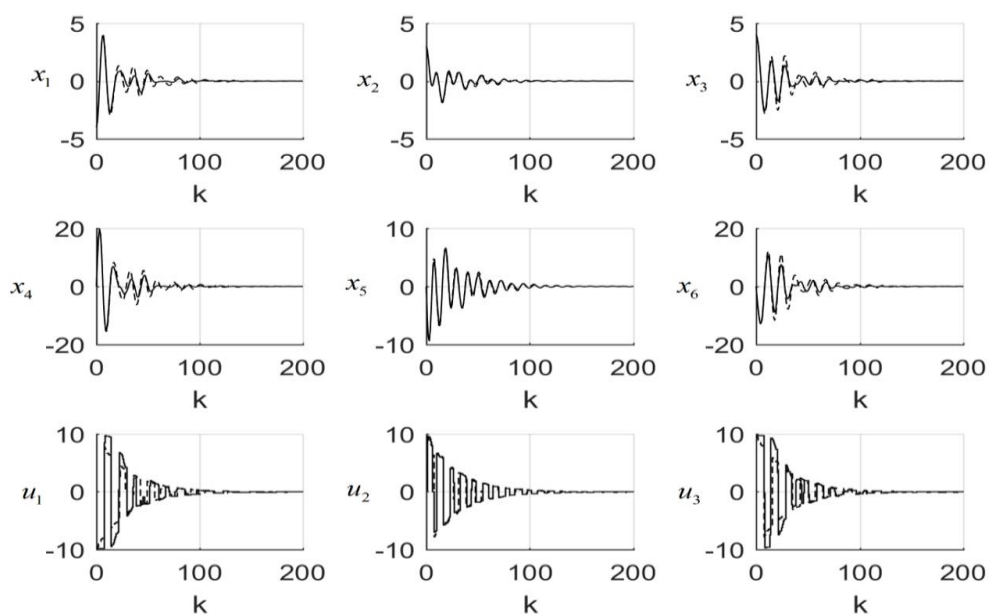


Рис. Результаты численных экспериментов

Библиографические ссылки

1. Rawlings J. B., Mayne D. Q. Model Predictive Control Theory and design. Madison, 2009.
2. Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М. Оптимальное децентрализованное управление динамическими системами в условиях неопределенности // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51, № 7. С. 1209–1227.
3. Балашевич Н. В. О стабилизации динамических систем ограниченными обратными связями // Труды Института математики НАН Беларуси. 1999. Т. 3. С. 38–45.