ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА И СТИЛТЬЕСА: ПОНЯТИЕ, СВОЙСТВА, ОСОБЕННОСТИ

У. В. Соловей

Белорусский государственный университет, г. Минск;
yliano4ka1008@gmail.com;
науч. рук. – Н. В. Бровка д-р пед. наук, проф.

В нашем мире люди либо все ленивы либо гениальны. Это вы выбираете сами. Но математику придумали люди и это одна из самых важных наук в мире. Наш мир подчиняется многим законом, которые математика помогает описать. Например: как определить, куда приземлится ракета? Как посчитать площадь Земли? Как найти путь велосипедиста, если его скорость не постоянна? Или, если переходить к математическим терминам: как найти площадь криволинейной трапеции? На эти вопросы может ответить математика! Она предлагает нам интеграл. Интеграл – это один из основных инструментов работы с функциями. И для их определения существуют разные подходы – различают интегралы Римана, Лебега, Стилтьеса и другие. В своей работе я рассмотрела и сравнила два интеграла – Римана и Стилтьеса, чтобы ответить на следующие вопросы:

1. В чём сходства и различия в разбиениях (определениях).
2. В чём сходства и различия в свойствах.
3. Как эти различия отражаются в способах вычисления интегралов.

Ключевые слова: понятие интеграла Римана; свойства интеграла Римана; особенности интеграла Римана; понятие интеграла Стилтьеса; свойства интеграла Стилтьеса; особенности интеграла Стилтьеса.

Рассмотрим для начала определения интегралов и узнаем в чём их различие и сходства в обозначениях. Очевидное отличие этих интегралов видно сразу в интегральной сумме. Интеграл Римана определяется интегральной суммой для функции f и разбиения τ_n с отмеченными точками ξ отрезка $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i_{\tau_n}} f(\xi_i^{(n)})\,\Delta x_i^{(n)}.$$

Интегральная сумма для интеграла Стилтьеса – это произведение значения функции f в точке ξ, выбранной из разбиения $[x_i, x_{i+1}]$, и на соответствующее промежутку $[x_i, x_{i+1}]$ приращение функции $g(x)$: $\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i)$.

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda\to 0} \sigma(f) = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta g(x_i)\,.$$

Самое существенное отличие определения интеграла Стилтьеса от определения интеграла Римана состоит в том, что ξ_i умножается не на приращение Δx_i независимой переменной, а на приращение $\Delta g(x_i)$ второй функции. Соотнесение свойств интегралов Римана и Стилтьеса представлено в таблице.

Таблица 1

Таблица свойств интегралов Римана и Стилтьеса

Интеграл Римана	Интеграл Стилтьеса
1. $\int\limits_a^b dx = a - b$.	Свойства интеграла Стилтьеса вытекают непосредственно из его определения: 1. $\int\limits_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$;
2. Линейность Если функции f_1 и f_2 интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их сумма $f_1(x) \pm f_2(x)$ также интегрируема на нём, и $\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int\limits_a^b f_1(x)\, dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\, dx \qquad (2.2)$	2.1. Линейность по $f(x)$ $\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dg(x) = \int\limits_a^b f_1(x)\, dg(x) \pm \int\limits_a^b f_2(x)\, dg(x)$; 2.2. Линейность по $g(x)$ $\int\limits_a^b f(x)\, d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int\limits_a^b f(x)\, dg_1(x) \pm \int\limits_a^b f(x)\, dg_2(x)$;
3. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и c – постоянная; тогда функция cf также интегрируема на этом отрезке и $\int_a^b cf(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx \qquad (2.5)$	3. $\int_a^b kf(x) d[cg(x)] = kc \int_a^b f(x)\, dg(x)$, $(k, c = const)$. При этом в случаях 2, 3, из существования интегралов в правой части вытекает существование интегралов в левой части.
4. Аддитивность интеграла. Пусть $a < c < b$. Если f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a, b]$: $\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx \qquad (2.1)$	4. $\int\limits_a^b f(x)\, dg(x) = \int\limits_a^c f(x)\, dg(x) + \int\limits_c^b f(x)\, dg(x)$. В предположении, что $a < c < b$ и существуют все три интеграла. Док-во. Достаточно чтобы включение точки c в число точек деления отрезка $[a,b]$ при составлении суммы Стилтьеса для интеграла $\int_a^b f\, dg$.

Существуют и другие свойства интеграла Римана, которым нет аналогов в интеграле Стилтьеса. Возникает вопрос, каким же образом эти свойства сказываются в методах вычисления указанных интегралов? И как различаются классы интегрируемых функций для каждого из них?

Для ответа на эти вопросы приведем следующие примеры вычисления интегралов.

Интеграл Римана вычисляется согласно формуле Ньютона-Лейбница, которая дана в следующей теореме: если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и Φ – любая её первообразная на этом отрезке, то имеет место равенство: $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)|_{x=a}^{x=b}$.

Для вычисления интегралов Стилтьеса будем использовать следующие теоремы:

1. Если функция $f(x)$ интегрируема в смысле Римана в промежутке $[a, b]$, а $g(x)$ представлена интегралом $g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt$,где функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема в $[a, b]$, то

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{6.1}$$

2. При прежних предположениях относительно функции $f(x)$ допустим, что функция $g(x)$ непрерывна во всём промежутке $[a, b]$ и имеет в нём, исключая разве лишь конечное число точек, производную $g'(x)$, которая в $[a, b]$ абсолютно интегрируема. Тогда

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \tag{6.2}$$

3. Пусть функция $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ непрерывна, а $g(x)$ имеет в этом промежутке, исключая разве лишь конечное число точек, производную $g'(x)$, которые абсолютно интегрируема в $[a, b]$. При этом пусть функция $g(x)$ в конечном числе точек $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_k < \cdots < c_m = b$ терпит разрыв первого рода. Тогда существует интеграл Стилтьеса и выражается формулой

$$\begin{aligned}(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) &= (R)\int_a^b f(x)g'(x)\,dx + f(a)[g(a+0) - g(a)] + \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)\,[g(c_k+0) - g(c_k-0)\,] + f(b)[g(b) - g(b-0)].\end{aligned} \tag{6.5}$$

Пример 1. Вычислить интеграл $(S)\int_0^2 x^2 d\ln(1+x)$. Используя формулу (6.1), получим:

$$(S)\int_0^2 x^2 d\ln(1+x) = (R)\int_0^2 \frac{x^2}{1+x}dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 - x|_0^2 + \ln(1+x)|_0^2 = \ln(3).$$

Пример 2. Вычислить интегралы, с использованием формулы (6.5):

(а) $$(S)\int_{-1}^{3} x\,dg(x),\quad \text{где } g(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x=-1,\\ 1 \text{ при } -1<x<2,\\ -1 \text{ при } 2\le x\le 3;\end{cases}$$

(б) $$(S)\int_{0}^{2} x^2\,dg(x),\quad \text{где } g(x)=\begin{cases} -1 \text{ при } 0\le x<\frac{1}{2},\\ 0 \text{ при } \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2},\\ 2 \text{ при } x=\frac{3}{2},\\ -2 \text{ при } \frac{3}{2}<x\le 2.\end{cases}$$

Рассмотрим пример (а). Функция $g(x)$ имеет скачок 1 при $x=-1$ и скачок -2 при $x=2$; в остальных точках $g'(x)=0$. Поэтому $(S)\int_{-1}^{3} x\,dg(x)=(-1)\times 1+2\times(-2)=-5$.

Теперь решим (б). Функция имеет скачок 1 при $x=\frac{1}{2}$ и -2 при $x=\frac{3}{2}$ (значение функции $g(x)$ при $x=\frac{3}{2}$ не влияет на результат); в прочих точках $g'(x)=0$. Имеем:$(S)\int_0^2 x^2 dg(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 1+\left(\frac{3}{2}\right)^2\times(-2)=-\frac{17}{4}$.

Различия интегралов Римана и Стилтьеса наблюдаются уже в самих интегральных суммах. Единственное существенное отличие определения интеграла Стилтьеса от обычного определения интеграла Римана состоит в том, что значение в точке из отрезка умножается не на приращение независимой переменной, а на приращение второй функции. Таким образом, интеграл Римана есть частный случай интеграла Стилтьеса, когда в качестве функции $g(x)$ взята сама независимая переменная x: $g(x)=x$. Из-за этого в простых случаях, когда функция, по которой определён интеграл Стилтьеса, непрерывна, то способ вычисления может быть сведён к способу вычисления интеграла Римана. Тогда свойства будут схожими с интегралом Римана. Но бывают случаи, когда функция, по которой определён интеграл Стилтьеса, может иметь точки скачков и разрывов, тогда вычисление интеграла сводится к тому, что бы посчитать его на разбиениях. Таким образом можно сделать вывод о том, что интеграл Стилтьеса определен для большего класса функций, чем интеграл Римана.

Библиографические ссылки

1. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. М., 1981. Т. 1.
2. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1969. Т. 3.
3. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. М., 1990. Т. 1–2.
4. *Зверович Э. И.* Вещественный и комплексный анализ. Мн., 2008. Т. 1–6.
5. *Кротов В. Г.* Математический анализ. Мн., 2017.