

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРУШЕНИЯ ДАМБЫ МЕТОДОМ ГИДРОДИНАМИКИ СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Е. В. Чилиевич, А. С. Самуйлов

*Белорусский государственный университет, г. Минск;
egor_chilievich_1999@mail.ru, lehas1298@gmail.com;
науч. рук. – О. Г. Романов, канд. физ.-мат. наук, доц;
Г. Г. Крылов, канд. физ.-мат. наук, доц.*

На примере двумерной задачи обрушения дамбы была создана эффективная модель, основанная на бессеточном лагранжевом методе гидродинамики сглаженных частиц. Было решено численно уравнение движения для вязкой сжимаемой жидкости с использованием уравнения состояния в форме Тэйта. Особенностью данной работы является акцентирование внимания на эффективности алгоритма поиска соседей частицы. Произведено сравнение различных реализаций данного алгоритма. Построено поле абсолютных значений скорости во время течения жидкости. Были сопоставлены полученные результаты с известными экспериментальными данными и исследовано влияние количества моделируемых частиц на точность вычислений.

Ключевые слова: моделирование обрушения дамбы; метод сглаженных частиц; бессеточный метод; вязкая сжимаемая жидкость; пространственное хеширование.

ВВЕДЕНИЕ

Для моделирования сложных течений часто используются численные методы. Существует ряд численных методов, основанных на использовании сеток, например метод маркеров и ячеек и метод жидких объемов. В обоих методах используется эйлерова сетка, что затрудняет их применение: на каждой итерации придется перестраивать сетку.

В последнее время разработаны бессеточные численные методы. Среди указанных методов наиболее эффективным является метод гидродинамики сглаженных частиц, в котором для описания движения жидкости адвекция (перенос) вещества вычисляется непосредственно при движении частиц без численной диффузии.

Для уравнений гидродинамики переход от непрерывного к дискретному представлению в виде сглаженных частиц осуществляется для любой функции F в точке непрерывной среды введением ее дискретизации в точке – положении сглаженной частицы с индексом i , определяемого в соответствии с соотношениями [1]:

$$\overline{F(r)} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_i} F(r_i) W(r - r_i, h), \quad (1)$$

где N – число соседних частиц, m_i – масса частицы, ρ_i – плотность частицы, r_i – радиус-вектор частицы, W – сглаживающее ядро, h – радиус сглаживания.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для моделирования процессов гидродинамики используются уравнение неразрывности и уравнение движения [2]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \eta \Delta \vec{u} + \vec{g}, \quad (3)$$

где ρ – плотность жидкости, t – время, $\vec{u}$ – вектор скорости, P – давление, η – динамическая вязкость жидкости, $\vec{g}$ – вектор ускорения свободного падения.

Для связи давления и плотности используется уравнение состояния Тэйта [3]:

$$P = \frac{\rho_0 c^2}{\gamma} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right], \quad (4)$$

где ρ_0 – начальная плотность жидкости, c – скорость звука в жидкости, γ – коэффициент Пуассона жидкости.

ПОИСК СОСЕДЕЙ ЧАСТИЦЫ

От данного этапа эффективность программы зависит наибольшим образом. Рассмотрим и сравним два алгоритма: полный перебор и пространственное хеширование.

Полный перебор достаточно прост. Перебираем все пары частиц и выбираем те, расстояние до которых от нашей частицы меньше, чем радиус ядра. Алгоритмическая сложность составляет $O(n^2)$.

Суть пространственного хеширования состоит в том, что вся рассматриваемая область разбивается на сетку с шагом равным радиусу ядра и для каждой ячейки запоминаются все частицы, расположенные в ней. Чтобы найти соседей частицы достаточно потом перебрать только те частицы, которые находятся в 9 соседних ячейках. Алгоритмическая сложность данного алгоритма составляет $O(n \log n)$.

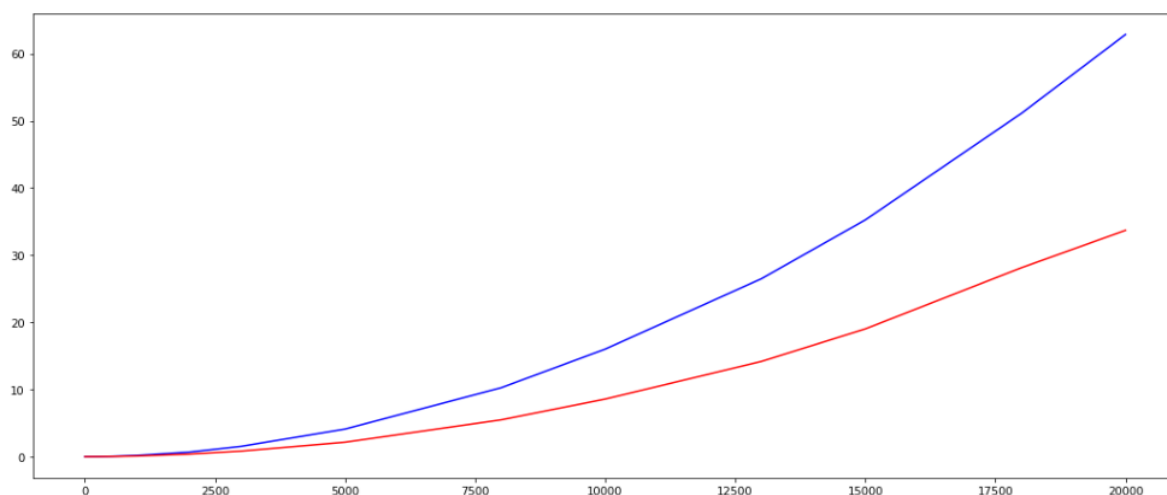


Рис. 1. График зависимости времени выполнения программы в секундах от количества частиц для двух алгоритмов:
синяя линия – полный перебор, красная – пространственное хеширование

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве примера возьмем неподвижный столб жидкости, закрытый перегородкой. Далее мгновенно уберем перегородку и рассмотрим течение жидкости. Высота столба 20 см, длина столба 10 см, высота сосуда 40 см, длина сосуда 50 см, начальная плотность 998.2 кг/м^3 , динамическая вязкость $0.5 \text{ Па}\cdot\text{с}$, коэффициент Пуассона 7. Таким начальным условиям соответствует состояние жидкости с числом Рейнольдса порядка 30, что говорит о большой вязкости жидкости и ее ламинарном течении [2]. Фотографии сделаны с интервалом 0.1 с.

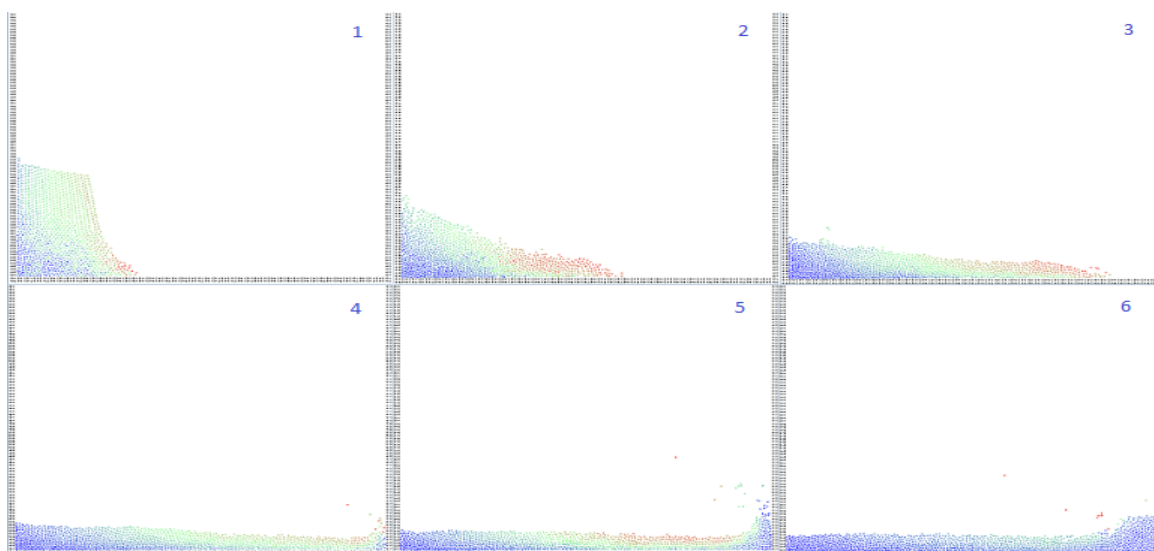


Рис. 2. Результаты моделирования для 1000 частиц:
цветом изображена абсолютная скорость частиц (большая скорость – красный цвет)

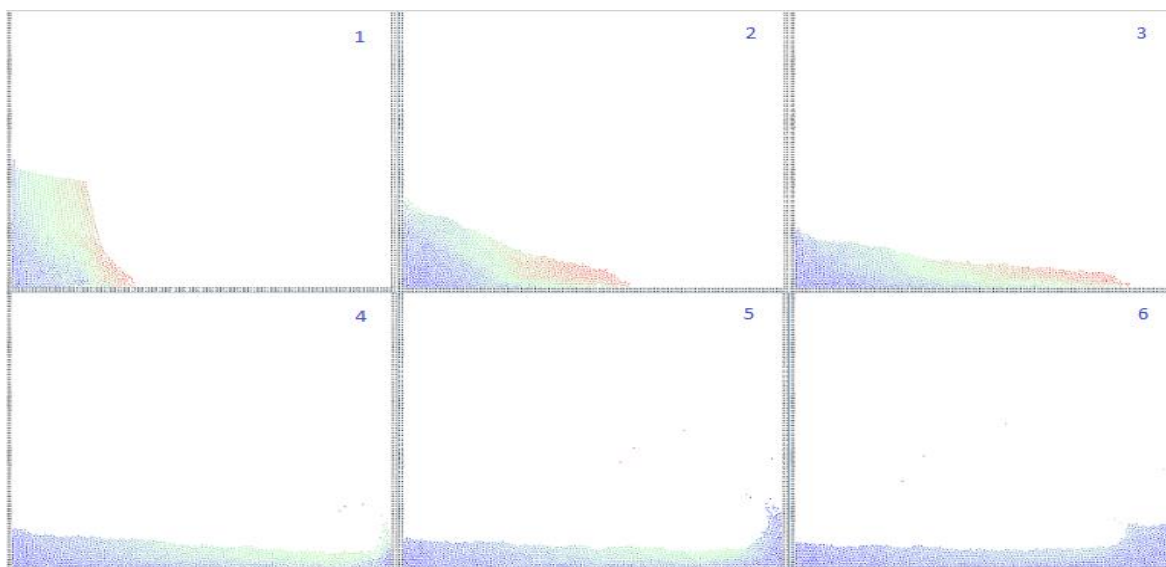


Рис. 3. Результаты моделирования для 1500 частиц

ВЫВОДЫ

С помощью C++ и графической библиотеки OpenGL была создана программа, моделирующая обрушение дамбы. Из приведенных выше рисунков видно, что течение жидкости совпадает с ожидаемым для числа Рейнольдса 30. Также видно, как количество частиц влияет на точность моделирования: чем больше частиц, тем более сглажена граница жидкости. Цвет частиц точно описывает поле скоростей, так как наибольшую скорость имеет передний фронт волны. Для 1000 частиц расчет занял около 60 с, для 1500 частиц – около 150 с. Это подтверждает линейно-логарифмическое время работы алгоритма. Дальнейшим улучшением данной программы может быть распараллеливание расчетов на видеокарту, что даст прирост в производительности в тысячи раз. Это позволит моделировать течение жидкости в реальном времени.

Библиографические ссылки

1. Monaghan J. J. Smoothed particle hydrodynamics // Rep. Prog. Phys. 2005. Vol. 68. P. 1703–1759.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика жидкости : учеб.-метод. пособие. М., 1988.
3. Batchelor G. K. Introduction to fluid dynamics. Cambridge, 1967.