

# ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ФЕРМИОНОВ НА КИНКЕ В ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

**В. В. Климашонок**

*Белорусский государственный университет, г. Минск;  
KIVI-1998@mail.ru; науч. рук. – Я. М. Шнир, д-р физ.-мат. наук, проф.*

Исследуются связанные состояния системы фермион+кинк в полиномиальной модели  $\phi^4$ . Показано, что имеется два типа фермионных мод, локализованных на кинке, при этом с ростом константы связи число мод увеличивается. Изучен эффект обратной реакции фермионов на кинк: найден профиль деформированного кинка и изучено его поведение в зависимости от значения константы связи. В случае сильной связи выяснено, что фермионное поле сильно деформирует кинк, в результате чего появляются области с отрицательной плотностью топологического заряда. С физической точки зрения появление областей пространства с отрицательной плотностью топологического заряда можно объяснить наличием сильно связанных кинк-антикинкковых пар.

**Ключевые слова:** солитоны; кинки; фермионы; доменные стенки.

## ВВЕДЕНИЕ

В результате взаимодействия фермионов с неоднородным фоновым бозонным полем фермионы могут быть локализованы на нём, тем самым образовав спектр локализованных связанных состояний. Данный факт был известен ещё в 70-х годах на примере таких топологических солитонов, как кинки и доменные стенки [1]. Более подробно связанные состояния фермионов на кинках и доменных стенках обсуждались в [2–4].

На данный момент не существует точного аналитического решения задачи о взаимодействии кинка с фермионом. Попытки численного решения данной задачи были предприняты в [2], однако некоторые гипотезы вызывают ряд вопросов и недоверия. В данной работе исследуются связанные состояния системы фермион+кинк в модели  $\phi^4$  в 1+1-мерном пространстве-времени. Задача о связанных состояниях фермионов на кинке решается численно без каких-либо предположений о виде функций, которые необходимо получить. Основными целями являются нахождение фермионных мод, искажений профиля кинка для каждой из найденных мод и фермионных волновых функций, а также изучение поведения данной картины при изменении константы связи.

## ИССЛЕДУЕМАЯ МОДЕЛЬ

В данной работе изучается система взаимодействующих скалярного ( $\phi$ ) и фермионного ( $\Psi$ ) полей в 1+1 мерном пространстве-времени. Лагранжиан системы имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2 + i\hat{\partial} - g\phi. \quad (1)$$

Отметим, что лагранжиан (1) безразмерен на массу скалярного поля, все поля и координаты безразмерны. Также введены обозначения  $\hat{\partial}\Psi = \gamma^\mu \partial_\mu \Psi$ ,  $\bar{\Psi} = \Psi\gamma^0$ , где  $\gamma^\mu$  – матрицы Дирака. В данной работе выбрано следующее представление матриц Дирака:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Уравнения движения системы нетрудно получить из принципа наименьшего действия:

$$\begin{cases} \partial_\mu \partial_\mu \phi - 2\phi + 2\phi^3 + g = 0; \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - g\phi = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Нетрудно показать, что в случае отсутствия взаимодействия полей ( $g = 0$ ) статичными решениями уравнения движения скалярного поля являются два вакуума  $\phi_\pm = \pm 1$ , которые по определению представляют собой состояния скалярного поля  $\phi$  с минимальной энергией. Ещё одним статическим решением с конечной энергией последнего уравнения является топологический солитон, который называют кинком [5]:

$$\phi_K(x) = \tanh x.$$

Рассмотрим фермионный сектор модели. В случае стационарных состояний спинор имеет вид  $\Psi = e^{-i\varepsilon t} \begin{pmatrix} u_\varepsilon(x) \\ v_\varepsilon(x) \end{pmatrix}$  с условием нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} dx [u_\varepsilon^2 + v_\varepsilon^2] = 1$ . Во введённых обозначениях (2) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi}{dx^2} = -2\phi + 2\phi^3 + 2gu_\varepsilon v_\varepsilon; \\ \frac{du_\varepsilon}{dx} = \varepsilon v_\varepsilon - g\phi u_\varepsilon; \\ \frac{dv_\varepsilon}{dx} = -\varepsilon u_\varepsilon + g\phi v_\varepsilon. \end{cases} \quad (3)$$

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Численное решение проводилось на компактном интервале  $a \in [0, 1]$ , который получается в результате отображения интервала  $x \in [0, +\infty)$

функцией  $a = \frac{x}{1+x}$ . Отметим, что симметрия уравнений (3) позволяет рассматривать половину интервала. Система (3) решается итерационным методом Ньютона-Рафсона, основанном на конечно-разностной схеме 6-го порядка. Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений находилось с использованием библиотеки PARDISO. Относительная ошибка численных расчётов не превысила  $10^{-8}$ . В силу симметрии системы (3) имеется два типа решений: с чётной функцией  $u_\varepsilon$  и нечётной  $v_\varepsilon$  (А-моды), и наоборот (В-моды). Обсудим теперь полученные результаты.

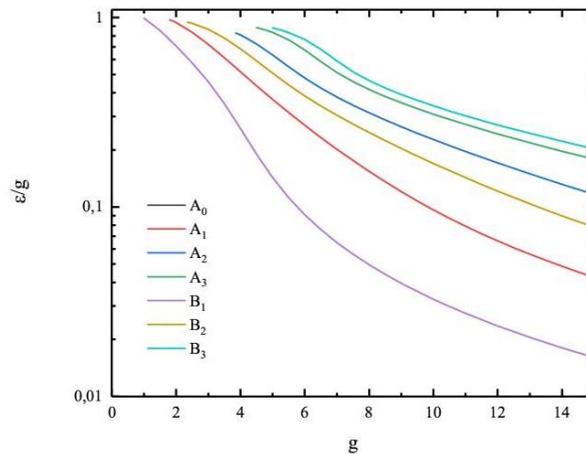


Рис. 1. Зависимость нормированной энергии фермионов ( $\varepsilon/g$ ) от константы связи

На рис. 1 представлен спектр энергии фермионов в зависимости от константы связи. Как видно, по мере увеличения константы связи число связанных фермионных мод растёт. При этом нулевая мода  $A_0$  не меняется.

Деформации кинка для в зависимости от моды и константы связи проследиваются на рис. 2. Нулевая мода не искажает кинк. Другие моды (возбуждённые состояния) с увеличением константы связи всё сильнее и сильнее искажают профиль кинка. При этом, переходя через некоторое значение, появляются области с отрицательной плотностью топологического заряда. Отметим также, что в зависимости от моды меняется число таких областей: чем более высокая мода, тем больше указанных областей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведено исследование связанных состояний системы кинк+ фермион, а также численное моделирование данной системы с учётом искажения фермионом профиля кинка. Выяснено, что в зависимости от выбора граничных условий имеется два типа мод, отличающихся чётностью компонент спинора. Показано, что уменьшение кон-

станты связи влечёт за собой делокализацию мод, при этом более низкие (с меньшей энергией) моды сильнее локализованы, нежели более высокие. При достаточно сильной связи найдено, что профиль кинка подвергается существенным деформациям, в результате чего образуются области с отрицательной плотностью топологического заряда. Данный факт физически можно объяснить появлением сильно связанных кинк-антикинковых пар.

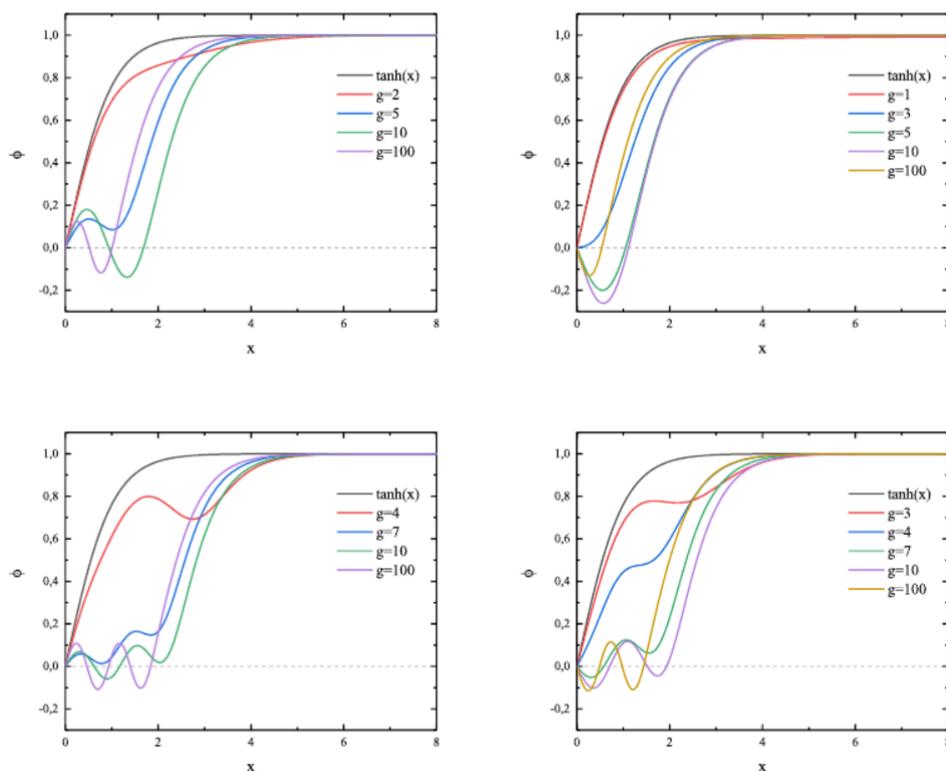


Рис. 2. Профили кинка в для различных значений константы связи  $g$  в случае мод  $A_1$  (сверху слева),  $A_2$  (снизу слева),  $B_1$  (сверху справа) и  $B_2$  (снизу справа)

### Библиографические ссылки

1. Jackiw R., Rebbi C. Solitons with fermion number  $\frac{1}{2}$  // Phys. Rev. D. 1976. Vol. 13, № 12. P. 3398–3409.
2. Gani V. A., Ksenzov V. G., Kudryavtsev A. E. Example of a self-consistent solution for a fermion on domain wall // Phys. At. Nucl. 2010. Vol. 73, № 11. P. 1889–1892.
3. Chu Y.-Z., Vachaspati T. Fermions on one or fewer Kinks // Phys. Rev. D. 2008. Vol. 77, № 2. P. 025006.
4. A. de Souza Dutra, Correa R. A. C. Fermions bounded by kinks of false vacuum models // Phys. Lett. B. 2010. Vol. 693, № 2. P. 188–197.
5. Рубаков В. А. Классические калибровочные поля. Бозонные теории. М., 2005.