

ОБОБЩЕННАЯ ЭРМИТОВА ГЕОМЕТРИЯ НА 4-МЕРНОЙ ГРУППЕ ОСЦИЛЛЯТОРА

В. Н. Куница

Белорусский государственный университет, г. Минск;

vikakunica@gmail.com;

науч. рук. – В. В. Балащенко, канд. физ.-мат. наук, доц.

В данной работе построена левоинвариантная f -структура на четырехмерной группе осциллятора. Такая f -структура получена с использованием метода канонических аффинорных структур на однородных k -симметрических пространствах. Вычислена связность Леви-Чивита левоинвариантной римановой метрики на рассматриваемой группе Ли осциллятора. Эта информация позволила установить связь построенной f -структуры с классами обобщенной эрмитовой геометрии.

Ключевые слова: обобщенная эрмитова геометрия; инвариантная структура; f -структура; четырехмерная группа осциллятора; связность Леви-Чивита.

ВВЕДЕНИЕ

В современной дифференциальной геометрии важную роль играют инвариантные структуры на однородных многообразиях, в частности, на группах Ли. Наряду с почти комплексными структурами, в последнее десятилетие активно изучаются левоинвариантные f -структуры на группах Ли, а также их связь с обобщенной эрмитовой геометрией (см., например, [1], [2]). Интересным примером группы Ли является четырехмерная группа осциллятора, исследования которой связаны, в частности, с проблемами теории управления (см. [3],[4]). Объектом рассмотрения в этой работе является левоинвариантная f -структура на четырехмерной группе осциллятора.

РИМАНОВА МЕТРИКА И ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Линейная связность [5] на гладком многообразии M – это отображение

$$\nabla: F^\infty(M) \times F^\infty(M) \rightarrow F^\infty(M)$$

$$\nabla(X, Y) := \nabla_X Y \in F^\infty(M)$$

такое, что для всех $Z \in F^\infty(M)$ и $f \in C^\infty(M)$ выполняются соотношения:

1. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
2. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

$$3. \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$4. \nabla_X fY = f \nabla_X Y + (Xf)Y$$

Риманова метрика [5] на гладком многообразии M – гладкий симметричный положительно определенный тензор g типа $(0,2)$ на M

$$g: F^\infty(M) \times F^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

такой, что для всех гладких векторных полей X и Y на M выполняются соотношения:

$$1. g(X, Y) = g(Y, X).$$

$$2. g(X, X) \geq 0.$$

$$3. g(X, X)(x) > 0, \text{ если } X(x) \neq 0 \text{ и } x \in M.$$

f -СТРУКТУРЫ И ОБОБЩЕННАЯ ЭРМИТОВА ГЕОМЕТРИЯ

Пусть M – гладкое многообразие. Аффинорной структурой на M называется поле линейных эндоморфизмов, действующих в касательном расслоении к многообразию M . Если аффинорная структура f удовлетворяет соотношению $f^3 + f = 0$, то она называется f -структурой [6].

Основные классы f -структур [7], [8]:

1. NKf – приближенно келерова f -структура:

$$\nabla_{fX}(f)(fX) = 0.$$

2. $Killf$ – киллингова f -структура:

$$\nabla_X(f)X = 0.$$

3. $GNKf$ – обобщенная приближенно келерова f -структура:

$$f(\nabla_{fX}(f)(fX)) = 0.$$

4. Kf – келерова f -структура:

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \nabla_X(f)Y = 0.$$

5. G_1f – f -структура класса G_1 :

$$C(X, X) = 0.$$

6. Hf – эрмитова f -структура:

$$C(X, Y) = 0,$$

где $C(X, Y) = \frac{1}{4}f(\nabla_{fX}(f)(fY) - \nabla_{f^2X}(f)(f^2Y))$ – композиционный тензор.

АЛГЕБРА ЛИ ГРУППЫ ОСЦИЛЛЯТОРА И СВЯЗНОСТЬ ЛЕВИ-ЧИВИТА

Алгебра Ли группы осциллятора [4] представлена матрицами:

$$osc = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -y & z & -2x \\ 0 & 0 & \theta & z \\ 0 & -\theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(x, y, z, \theta), \quad x, y, z, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Она же может быть задана коммутаторными соотношениями:

$$[E_2, E_3] = E_1, [E_2, E_4] = E_3, [E_3, E_4] = E_2, \quad \text{где} \\ E_1 = M(1, 0, 0, 0), E_2 = M(0, 1, 0, 0), E_3 = M(0, 0, 1, 0), E_4 = M(0, 0, 0, 1).$$

Линейная связность ∇ называется связностью Леви-Чивита[5], если для всех гладких векторных полей X, Y, Z на M выполняются следующие соотношения:

1. $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_X Z)$.
2. Тензор кручения $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ связности ∇ равен нулю.

Связность Леви-Чивита на группе Ли определяется следующей формулой:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] + U(X, Y).$$

Здесь $U: m \times m \rightarrow m$ – симметрическое билинейное отображение, где $2\langle U(X, Y), Z \rangle = \langle X, [Z, Y] \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \quad \forall X, Y, Z \in m$.

С помощью данной формулы была вычислена связность Леви-Чивита группы Ли осциллятора:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}E_1(x_2y_3 - x_3y_2) + \frac{1}{2}E_2(x_1y_3 + x_3y_1 - 2x_4y_3) + \frac{1}{2}E_3(-x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_4y_2)$$

где $X = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4, Y = y_1E_1 + y_2E_2 + y_3E_3 + y_4E_4$.

КАНОНИЧЕСКАЯ f -СТРУКТУРА НА ГРУППЕ ОСЦИЛЛЯТОРА

Рассмотрим далее группу автоморфизмов алгебры осциллятора [4]:

$$Aut(osc) = \left\{ \begin{pmatrix} \sigma(x^2 + y^2) & \omega y - \sigma vx & -\omega x - \sigma vy & u \\ 0 & x & y & y \\ 0 & -\sigma y & \sigma x & \omega \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} : \right. \\ \left. x, y, u, v, \omega \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0, \sigma = \pm 1 \right\}$$

Путем вычислений в пакете Mathematica мы получили метрический автоморфизм вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что его порядок равен 6 ($A^6 = E$).

Для вычисления канонических f -структур, порождаемых автоморфизмом 6-го порядка, воспользуемся следующими формулами[1]:

- $f_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}(A + A^2 - A^4 - A^5)$
- $f_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}(A - A^2 + A^4 - A^5)$
- $f_3 = f_1 + f_2$
- $f_4 = f_1 - f_2$

Оказалось, что данный автоморфизм порождает единственную каноническую f -структуру ($f = f_1$) вида:

$$f \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

или $f(E_1) = f(E_4) = 0$, $f(E_2) = -E_3$, $f(E_3) = E_2$.

Проведя соответствующие исследования для этой канонической f -структуры, доказана следующая

Теорема. Данная левоинвариантная f -структура на четырехмерной группе осциллятора является обобщенной приближенно келеровой и эрмитовой f -структурой, однако не является приближенно келеровой f -структурой, т.е. $f \in GNKf$, $f \in Hf$, $f \notin NKf$.

Библиографические ссылки

1. Balashchenko V. V. Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group // Kragujevac Journal of Mathematics. 2011. V. 35, № 2. P. 209–222.
2. Однородные пространства: теория и приложения / В. В. Балащенко [и др.]. Ханты-Мансийск, 2008.
3. Streater R. F. The representations of the oscillator group // Commun. Math. Phys. 1967. V. 4. P. 217–236.
4. Biggs R., Remsing C. C. Some remarks on the oscillator group // Differential Geometry and its Applications. 2014. V. 35. P. 199–209.
5. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Римановы многообразия и однородные геодезические. Владикавказ, 2012.
6. Yano K., Kon M. Structures on manifolds. Singapore, 1984.

7. *Кириченко В. Ф.* Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры // Известия АН СССР. Сер. «Математическая». 1983. Т. 47, № 6. С. 1208–1223.
8. *Балащенко В. В.* Однородные приближенно келеровы f -многообразия // Доклады РАН. 2001. Т. 376, № 4. С. 439–441.