

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НЕСВЯЗНОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И. П. Молочко

Белорусский государственный университет, г. Минск;

polevikov@bsu.by;

науч. рук. – В. К. Полевиков, канд. физ.-мат. наук, доц.

Целью работы является численное решение задачи капиллярной гидростатики о равновесных формах свободной поверхности жидкости в капилляре, помещенном в широкий цилиндрический сосуд [1].

Ключевые слова: капиллярная поверхность; численное моделирование; равновесные формы; численные результаты.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается цилиндрический сосуд, наполненный жидкостью объемом V , в который погружена капиллярная трубка так, что их оси симметрии совпадают. Считаем, что трубка имеет форму кругового цилиндра, а сосуд представляет собой цилиндр достаточно большого радиуса, такого, что уровень жидкости в нем на достаточном удалении от капилляра зависит только от атмосферного давления и силы тяжести.

Примем радиус сосуда за единицу длины и сформулируем задачу об осесимметричной несвязной капиллярной поверхности. Для этого введем безразмерные цилиндрические координаты r, z так, чтобы ось z совпадала с осью симметрии сосуда, и направим ее против вектора ускорения свободного падения $\vec{g}$. Тогда равновесные поверхности контакта жидкости и газа в капилляре и внешнем сосуде определяются равновесными линиями L_1, L_2 . Эти линии можно описать парой параметрических функций $r(s), z(s)$, где s – безразмерная длина дуги, соответствующей равновесной линии. Расположение осей, а также другие введенные обозначения показаны на рисунке 1, где $\delta = \frac{R_1}{R_2}$, R_1 и R_2 – радиусы трубки и сосуда соответственно, α – угол смачивания.

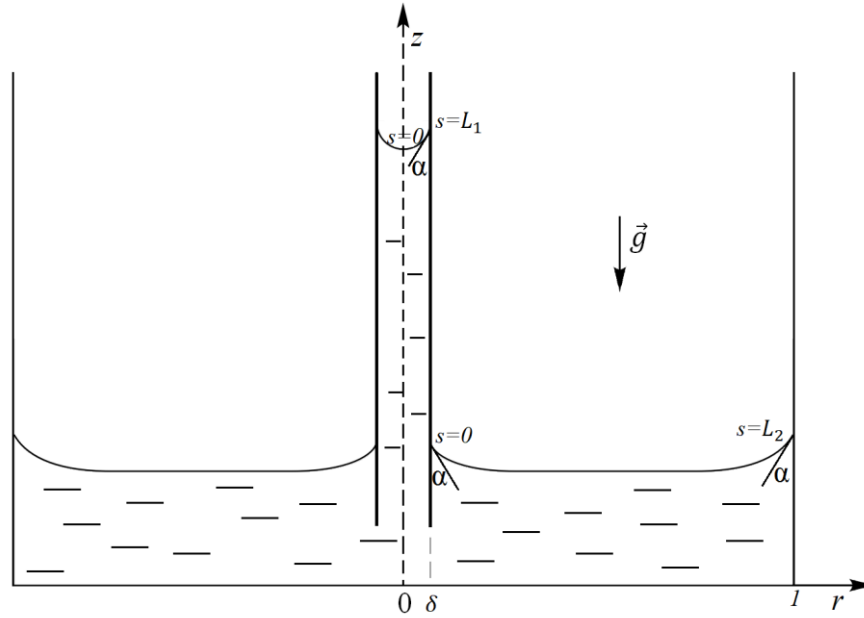


Рис.1. Иллюстрация постановки задачи

В предположении осевой симметрии параметрические функции $r(s)$, $z(s)$ в условиях равновесия и присутствия силы тяжести удовлетворяют нелинейным дифференциальным уравнениям Юнга-Лапласа [1], [2]:

$$z'' = r' \left(Bo \cdot z + Q - \frac{z'}{r} \right), r'' = -z' \left(Bo \cdot z + Q - \frac{z'}{r} \right) \quad (1)$$

где Q – неопределенная константа; $Bo = \rho g R_2^2 / \sigma$ – число Бонда; ρ – плотность жидкости, σ – поверхностное натяжение.

Математическая модель, описывающая равновесную форму свободной поверхности в капилляре безразмерными параметрическими функциями $r(s)$, $z(s)$, $0 \leq s \leq L_1$, состоит из дифференциальных уравнений (1) и граничных условий

$$z'(0) = 0, \quad r(0) = 0, \quad r'(0) = 1; \quad (2)$$

$$z'(L_1) = \cos \alpha, \quad r(L_1) = \delta, \quad r'(L_1) = \sin \alpha;$$

Во внешнем сосуде равновесная форма свободной поверхности описывается безразмерными параметрическими функциями $r(s)$, $z(s)$, $0 \leq s \leq L_2$, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям (1) и граничным условиям

$$z'(0) = -\cos \alpha, \quad r(0) = \delta, \quad r'(0) = \sin \alpha; \quad (3)$$

$$z'(L_2) = \cos \alpha, \quad r(L_2) = 1, \quad r'(L_2) = \sin \alpha;$$

Считая безразмерный объем U жидкости заданным, определим его как объем тела вращения:

$$U = 2\pi \left[\int_0^{L_1} z r r' ds + \int_0^{L_2} z r r' ds \right] \quad (4)$$

С учетом (1) – (4) выразим параметр Q через граничные условия и объем U :

$$Q = 2 \left(\cos \alpha (2\delta + 1) - Bo \frac{U}{2\pi} \right) \quad (5)$$

Особенность параметрической постановки состоит в отсутствии подходящей формулы для вычисления безразмерных длин L_1, L_2 соответствующих равновесных линий, что создает трудности для численного решения. Поэтому, следуя подходу [3], сделаем замену переменных, позволяющую вынести неизвестную длину в уравнения и проводить вычисления на фиксированном промежутке $[0, 1]$:

$$\bar{r}_1 = \frac{r}{L_1}, \bar{r}_2 = \frac{r}{L_2}, \quad \begin{cases} r = \bar{r}_1 L_1, & z = \bar{z}_1 L_1, & s = \bar{s} L_1, \\ r = \bar{r}_2 L_2, & z = \bar{z}_2 L_2, & s = \bar{s} L_2. \end{cases}$$

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Для нелинейной задачи (1) – (3) построены итерационно-разностные схемы второго порядка аппроксимации [3]. На каждой итерации реализация этих схем сводятся к решению систем линейных алгебраических уравнений методом прогонки [4]. В качестве начального итерационного приближения выбиралось точное решение при $\alpha = \pi/2$: $z(r) = z_0 = U/\pi$. Вычисления осуществлялись на равномерной сетке с шагом $1/100$.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Расчеты проводились при $Bo = 300, U = 3, \alpha = 0, \alpha = \pi, \delta = 0.04$.

Поведение жидкости в капиллярной трубке и внешнем цилиндре при изменении угла смачивания показано на рисунке 2. Как видим, равновесная форма свободной поверхности в капилляре сильно зависит от угла смачивания α . При $\alpha = \pi$ уровень жидкости опускается значительно ниже значения z_0 , соответствующего нейтральному углу $\alpha = \pi/2$, а при $\alpha = 0$ – поднимается значительно выше z_0 . Это связано со смачивающим эффектом капиллярных сил, приводящим к натеканию жидкости на стенки при $\alpha < \pi/2$, при которых свободная поверхность вогнута в сторону жидкости. При $\alpha > \pi/2$ свободная поверхность выпукла в сторону газа; в этом случае капиллярные силы сдерживают поднятие жидкости в капилляре, приводя к понижению ее уровня относительно z_0 .

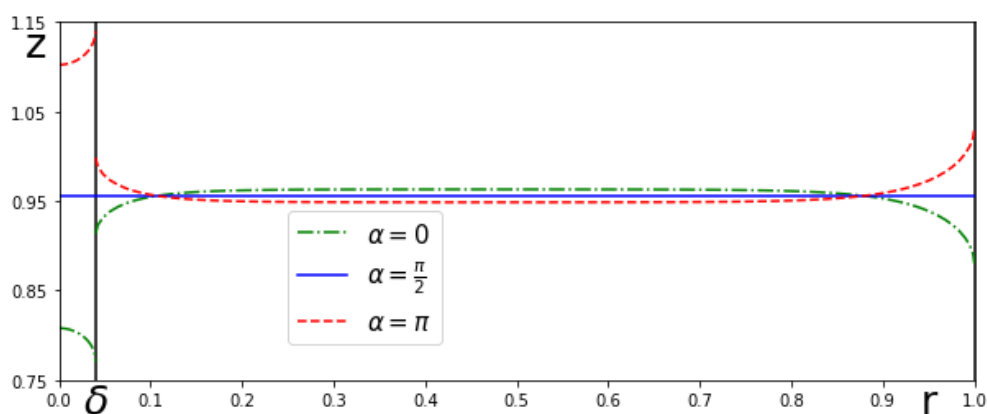


Рис. 2. Иллюстрация поведения жидкости в зависимости от угла смачивания

Сравним полученные результаты с известными теоретическими оценками поднятия жидкости [1]. Оценка Сигела для высоты подъема жидкости на оси симметрии и на стенке капилляра при $\alpha = 0$ имеют вид:

$$z(0) \leq \frac{2 \cos \alpha}{Bo} = 4.17,$$

$$z(1) \leq \frac{2 \cos \alpha}{Bo} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 4.83.$$

В результате численного решения нелинейной задачи в данной работе получено следующее значение высоты подъема жидкости на оси симметрии капилляра: $z(0) = 3.84$, а на его стенке $z(1) = 4.77$. Как видим, полученные численные результаты вполне согласуются с оценками линейной теории.

В данной работе впервые численно решена параметрическая задача о поднятии жидкости в капилляре, помещенном в широкий цилиндрический сосуд, в поле силы тяжести. В параметрической постановке получены равновесные формы свободной поверхности для углов смачивания $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$. На основании представленных результатов можно сделать вывод, что высота жидкости в капилляре существенно зависит от угла смачивания α , в то время как уровень жидкости во внешнем сосуде остается практически постоянным и только вблизи точек контакта незначительно зависит от α .

Библиографические ссылки

1. Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М., 1989.
2. Гидромеханика невесомости / В. Г. Бабский [и др.] ; под ред. А. Д. Мышкиса. М., 1976.
3. Polevnikov V. K. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces // Computational. Methods in Applied Mathematics. 2004. Vol. 4, № 1. P. 66–93.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1977.