# СТРУКТУРНЫЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ ДОМИНИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВ В ГРАФАХ

**Т. С. Злобич**

*Белорусский государственный университет, г. Минск;*
*zlobich.tatiana@gmail.com;*
*науч. рук.– Ю. Л. Орлович, канд. физ.-мат. наук, доц.*

В настоящей работе исследуются структурные и алгоритмические свойства доминирующих множеств специального вида в графах с предписанными ограничениями локального характера. К рассматриваемым графам относятся решётки, цилиндры, торы, графы, максимальная степень которых не превышает трёх, в частности, кубические графы. Найдены необходимые и (или) достаточные условия существования специальных доминирующих множеств в графах указанного вида и установлена вычислительная сложность задач распознавания, связанных с такими доминирующими множествами.

***Ключевые слова:*** граф; доминирующее множество; $(a, b)$-доминирующее множество; NP-полная задача.

## ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является исследование структурных и алгоритмических свойств $(a, b)$-доминирующих множеств в графах. Для заданных натуральных чисел $a$ и $b$ подмножество $D$ вершин графа $G$ называется $(a, b)$-*доминирующим множеством*, если для любой вершины этого графа мощность пересечения её замкнутого окружения с множеством $D$ равна $a$, если вершина принадлежит множеству $D$, и равна $b$, если вершина принадлежит множеству $V(G) \setminus D$. В более общем виде понятие $(a, b)$-доминирующего множества было приведено в работе [1]. С точки зрения приложений обоснованный интерес представляет исследование свойств $(a, b)$-доминирующих множеств для небольших значений $a$ и $b$. Например, в [2, 3] получены интересные результаты, касающиеся свойств (2, 2)-доминирующих множеств.

В настоящей работе мы сконцентрируемся на исследовании структурных и алгоритмических свойств (3, 2)-доминирующих множеств в графах из различных классов. Можно заметить, что существование (3, 2)-доминирующего множества в графе эквивалентно раскраске вершин этого графа в два цвета – черный и белый – так, что у каждой вершины графа, вне зависимости от того, в какой цвет покрашена она сама, есть ровно два белых соседа.

Исследуемые в работе специальные доминирующие множества могут быть использованы для задач анализа и проектирования компьютерных сетей. Предположим, что требуется спроектировать компьютерную сеть, множество узлов которой разбито на два подмножества – центры обработки и центры хранения информации (в соответствующем графе каждая вершина окрашена в один из двух цветов – белый или чёрный). При этом каждый центр хранения (чёрная вершина) должен быть напрямую соединен ровно с двумя центрами обработки (белые вершины) и каждый центр обработки (белая вершина) напрямую соединен ровно с двумя другими центрами обработки (белые вершины). Если представить сеть в виде графа, то возникает задача о наличии в таком графе специальной раскраски вершин в два цвета, а именно задача о существовании для данного графа (3, 2)-доминирующего множества.

Теоретико-графовые понятия и обозначения, не оговоренные специально, следуют [4, 5]. Результаты, относящиеся к теории сложности вычислений, изложены в соответствии с [6].

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В следующих четырёх теоремах получены условия существования (3, 2)-доминирующих множеств для специальных декартовых произведений графов.

**Теорема 1.** В графе прямоугольной решётки $P_m \times P_n$ существует (3, 2)-доминирующее множество тогда и только тогда, когда $m \geq 2$ – чётное число и $n = m(k + 1) + k$, где $k \geq 0$ – произвольное целое число. При указанных ограничениях на параметры $m$ и $n$ прямоугольной решётки (3, 2)-доминирующее множество является единственным.

**Теорема 2.** Для любых целых чисел $m \geq 3$ и $n \geq 0$ в графе цилиндра $C_m \times P_{2n+1}$ (3, 2)-доминирующее множество существует и единственно.

**Теорема 3.** Для любых целых чисел $m \geq 1$ и $k \geq 1$ в графе цилиндра $C_{2mk+k} \times P_{2m}$ существует (3, 2)-доминирующее множество.

**Теорема 4.** В графе тора $C_n \times C_m$, где $nm \equiv 0 \pmod 2$, существует (3, 2)-доминирующее множество.

Следующие две теоремы содержат необходимые и достаточные условия существования (3, 2)-доминирующего множества в кубических (т. е. 3-регулярных) графах.

**Теорема 5.** В кубическом графе порядка $n$ существует (3, 2)-доминирующее множество тогда и только тогда, когда $n = 6k$, где $k \geq 1$, и в графе существует $k$ попарно вершинно непересекающихся подграфов, каждый из которых изоморфен графу $T$, изображённому на рис. 1.

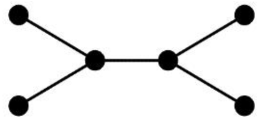

*Рис. 1.* Граф $T$

Напомним, что *паросочетанием* в графе называется произвольное подмножество попарно несмежных рёбер этого графа. Паросочетание $M$ называется *индуцированным*, если подграф, порождённый концевыми вершинами рёбер, входящих в это паросочетание, представляет собой дизъюнктное объединение $|M|$ графов $K_2$.

**Теорема 6.** В кубическом графе $G$ существует (3, 2)-доминирующее множество тогда и только тогда, когда множество вершин графа $G$ можно разбить на два подмножества $V_1$ и $V_2$ так, что подграф графа $G$, порождённый множеством $V_1$, является дизъюнктным объединением простых циклов, а подграф, порождённый множеством $V_2$, – индуцированным паросочетанием.

В качестве следствия теоремы 6 можно получить следующий результат.

**Следствие 1.** Если кубический граф $G$ содержит граф $H$, изображённый на рис. 2, в качестве порождённого подграфа, то в графе $G$ не существует (3, 2)-доминирующего множества.

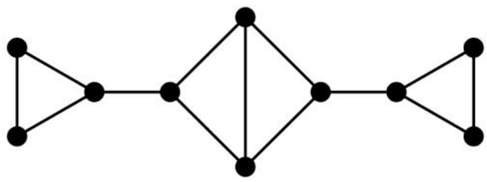

*Рис. 2.* Граф $H$

Ведём в рассмотрение следующую задачу распознавания.

(3, 2)-Доминирующее Множество

Условие: Задан граф $G$.

Вопрос: Существует ли в графе $G$ (3, 2)-доминирующее множество?

Далее приведены результаты, касающиеся вычислительной сложности сформулированной задачи распознавания.

**Теорема 7.** Задача (3, 2)-Доминирующее Множество является NP-полной в классе графов, максимальная степень которых не превосходит тройки.

**Теорема 8.** Задача (3, 2)-Доминирующее Множество является NP-полной в классе кубических графов.

В качестве следствий этих теорем получаем следующие результаты.

**Следствие 2.** Задача (3, 2)-Доминирующее Множество является NP-полной в классе всех графов.

**Следствие 3.** Следующая задача распознавания является NP-полной в классе кубических графов: выяснить существует ли разбиение множества вершин кубического графа на два подмножества так, что подграф графа, порождённый вершинами одного подмножества, является дизъюнктным объединением простых циклов, а подграф, порождённый вершинами второго подмножества, – индуцированным паросочетанием.

Результат следствия 2 относится к общему направлению исследований, посвящённых классификации в рамках теории NP-полноты теоретико-графовых задач, связанных с существованием специальных разбиений множеств вершин графов (см. [7]).

### Библиографические ссылки


1. *Heggernes P., Telle J. A.* Partitioning graphs into generalized dominating sets // Nordic Journal of Computing. 1998. Vol. 5. P. 128–142.
2. *Chellali M., Khelladi A., Maffray F.* Exact double domination in graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory. 2005. Vol. 25. P. 291–302.
3. *Khodkar A., Sheikholeslami S. M.* On perfect double dominating sets in grids, cylinders, and tori // Australasian Journal of Combinatorics. 2007. Vol. 37. P. 131–139.
4. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. М., 1990.
5. *Haynes T. W., Hedetniemi S. T., Slater P. J.* Fundamentals of domination in graphs. New York, 1998.
6. *Garey M. R., Johnson D. S.* Computers and Intractability: A Guide to the Theoty of NP-Completeness. New York, 1979.
7. *Brandstädt A., Le V. B., Szymczak T.* The complexity of some problems related to graph 3-colorability // Discrete Appl. Math. 1998. Vol. 89. P. 59–73.