ЦИКЛИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРАФОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ПЛОСКИМИ РЕШЁТКАМИ

А. П. Гапоненко

Белорусский государственный университет, г. Минск;
lesha.gaponenko@mail.ru;
науч. рук. – Ю. Л. Орлович, канд. физ.-мат. наук, доц.

Целью настоящей работы является получение новых достаточных условий полной циклической расширяемости графов королевской решётки. Установлено, что каждый связный, локально связный порядка три и более граф королевской решётки является вполне циклически расширяемым и, как следствие, гамильтоновым.

Ключевые слова: гамильтонов цикл; циклическая расширяемость; локально связный граф; граф королевской решётки.

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является исследование проблемы циклического строения (в том числе гамильтоновости) графов с предписанными ограничениями локального характера. Наиболее типичными примерами таких графов являются конечные порождённые подграфы графов, связанных с плоскими решётками. Например, *королевская решётка* S^{∞} – это бесконечный граф, вершинами (x, y) которого являются точки плоскости с целочисленными координатами x и y, при этом две вершины смежны в S^{∞} тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между соответствующими точками равно 1 или $\sqrt{2}$. Можно считать, что S^{∞} – геометрический граф, т. е. граф, уложенный на плоскости так, что его рёбра представляют собой замкнутые прямолинейные отрезки с концами в соответствующих точках (вершинах графа).

Граф королевской решётки – это произвольный конечный порождённый подграф графа S^{∞}. Граф королевской решётки можно рассматривать одновременно как граф и геометрическую фигуру (*геометрическую форму* графа), образованную всеми точками плоскости, принадлежащими рёбрам графа, и всеми максимальными (по включению) ограниченными множествами точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена непрерывной плоской кривой без самопересечений, не пересекающей рёбра графа. Всюду далее предполагаем, что изображение графа королевской решётки на плоскости наследует расположение вершин и рёбер в $\mathbf{R}^2$ от графа S^{∞}. На рис. 1 изображены фрагмент графа S^{∞} (слева) и граф королевской решётки (справа).

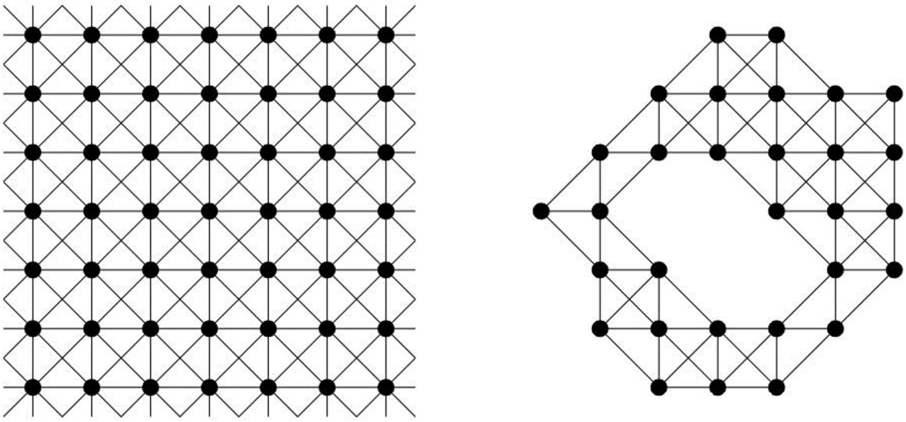

Рис. 1. Фрагмент графа S^∞ (слева) и граф королевской решётки (справа)

Граф королевской решётки называется *линейно выпуклым*, если пересечение геометрической формы этого графа с любой прямой ℓ, содержащей ребро графа S^∞, либо пусто, либо является отрезком (точкой) прямой ℓ. На рис. 2 изображён линейно выпуклый граф королевской решётки.

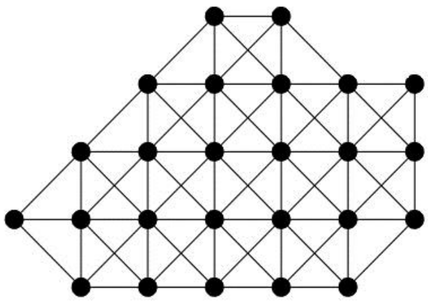

Рис. 2. Линейно выпуклый граф королевской решётки

В настоящей работе будет рассмотрен надкласс 2-связных линейно выпуклых графов королевской решётки – связные локально связные графы королевской решётки. Установлено, что графы из рассматриваемого класса обладают более сильными свойствами циклического строения, чем гамильтоновость. Результаты, относящиеся к циклическим свойствам графов, ассоциированных с плоскими решётками, подробно изложены в работах [1, 2].

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОНЯТИЯ

Теоретико-графовые понятия и обозначения, не оговоренные специально, следуют [3].

Далее мы приведём некоторые специальные понятия, используемые в работе и связанные с циклическими свойствами графов.

Граф называется *локально связным*, если окружение каждой его вершины порождает связный граф.

Граф называется *гамильтоновым*, если в нём имеется *гамильтонов цикл*, т. е. простой цикл, содержащий все вершины этого графа. Далее все циклы будем считать простыми.

Плоским называется граф, вершины и рёбра которого уложены на плоскости таким образом, что никакие два ребра не имеют общих точек кроме, возможно, концевых вершин. Аналогичным образом вводится понятие *плоского простого цикла*.

Цикл C в графе G называется *расширяемым*, если существует такой цикл C_1 в G, что $V(C) \subset V(C_1)$ и $|V(C_1)| = |V(C)| + 1$. При этом цикл C_1 называется *расширением* цикла C.

Граф называется *циклически расширяемым*, если любой негамильтонов цикл в этом графе является расширяемым.

Граф называется *вполне циклически расширяемым*, если каждая вершина графа принадлежит циклу длины три и каждый негамильтонов цикл в этом графе является расширяемым.

Граф назовём *вполне плоско циклически расширяемым*, если каждая вершина графа принадлежит циклу длины три и любой негамильтонов плоский цикл в этом графе является расширяемым и его расширение также является плоским циклом.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В статье [4] было доказано, что 2-связный линейно выпуклый граф королевской решётки является вполне циклически расширяемым и, как следствие, гамильтоновым. Отметим, что условие линейной выпуклости в формулировке этого утверждения является существенным, поскольку известно [5], что в классе 2-связных графов королевской решётки задача распознавания гамильтоновости NP-полна.

Нетрудно показать, что если граф королевской решётки является 2-связным и линейно выпуклым, то он локально связный, но обратное утверждение в общем случае неверно. Например, граф королевской решётки, изображённый на рис. 1 (справа), является локально связным, но не линейно выпуклым. Поэтому естественный интерес вызывает стремление рассмотреть циклические свойства более широкого класса графов, а именно связных, локально связных графов королевской решётки.

В рабочей гипотезе, которая естественно возникла в данной области исследований, утверждается, что каждый связный, локально связный порядка три и более граф королевской решётки является гамильтоновым. С целью её доказательства и для сокращения возникающих при этом случаев расположения окружения некоторой вершины графа относительно содержащего её простого негамильтонова цикла в работе введены понятия плоско цикла и вполне плоско циклически расширяемого графа.

Теорема 1. Каждый связный, локально связный порядка три и более граф королевской решётки является вполне плоско циклически расширяемым.

Тем самым, установлено, что рассматриваемые графы обладают плоским гамильтоновым циклом и, следовательно, являются гамильтоновыми.

Следствие 1. Каждый связный, локально связный порядка три и более граф королевской решётки является гамильтоновым.

Менее тривиальным следствием полученного результата оказался тот факт, что каждый связный, локально связный порядка три и более граф королевской решётки является вполне циклически расширяемым.

Следствие 2. Каждый связный, локально связный порядка три и более граф королевской решётки является вполне циклически расширяемым.

Для доказательства следствия 2 используется следующая важная лемма.

Лемма. В связном, локально связном порядка три и более графе королевской решётки для любого цикла C существует такой плоский цикл C_1, что $V(C_1) = V(C)$.

Поскольку доказательство теоремы 1 является конструктивным, то задача построения гамильтонова цикла в связном, локально связном порядка три и более графе королевской решётки разрешима за полиномиальное время.

Библиографические ссылки

1. *Gordon V. S., Orlovich Yu. L., Werner F.* Hamiltonian properties of triangular grid graphs // Discrete Math. 2008. Vol. 308. P. 6166–6188.
2. Not being (super)thin or solid is hard: A study of grid Hamiltonicity / E. M. Arkin [et al.] // Comput. Geom. 2009. Vol. 42, № 67. P. 58–605.
3. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. М., 1990.
4. *Hung R.-W.* Hamiltonian cycles in linear-convex supergrid graphs // Discrete Appl. Math. 2016. Vol. 211. P. 99–112.
5. *Hung R.-W., Yao C.-C., Chan S.-J.* The Hamiltonian properties of supergrid graphs // Theoret. Comput. Sci. 2015. Vol. 602. P. 132–148.