УДК 531:621-752:681

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ ВИБРОЗАЩИЩАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

***О. М. ДУСМАТОВ*[1], *М. У. ХОДЖАБЕКОВ*[2]**

[1]*Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами,*
ул. Бунёдкор, 27, 100185, г. Ташкент, Узбекистан
[2]*Самаркандский государственный архитектурно-строительный институт,*
ул. Лолазор, 70, 140147, г. Самарканд, Узбекистан

Введение. Рассматривается задача устойчивости нелинейных колебаний пластины с динамическим гасителем и упругодиссипативными характеристиками гистерезисного типа при случайных воздействиях.

Объекты и методика исследования. Рассеяние энергии в материалах пластины и упругодемпфирующего элемента динамического гасителя колебаний учитывается в виде петли гистерезиса по гипотезе Писаренко – Богинича. Устойчивость виброзащищаемой системы изучена по методике, предложенной японским исследователем Ито, с помощью метода статистической линеаризации.

Результаты и их обсуждение. Получены условия устойчивости виброзащищаемой пластины, которые дают возможность определить области и границы устойчивости при разных значениях параметров пластины и динамического гасителя, а также при различных случайных воздействиях.

Заключение. При случайном воздействии в виде белого шума колебания виброзащищаемой пластины будут асимптотически устойчивыми, а условия устойчивости не зависят от спектральной плотности ускорения основания.

Ключевые слова: виброзащищаемая пластина; динамический гаситель колебаний; упругодиссипативные характеристики гистерезисного типа; условия устойчивости; случайные воздействия.

Образец цитирования:
Дусматов ОМ, Ходжабеков МУ. Нелинейная задача устойчивости виброзащищаемой пластины при случайных воздействиях. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2019;2:41–47.
https://doi.org/10.33581/2520-2243-2019-2-41-47

For citation:
Dusmatov OM, Khodjabekov MU. The nonlinear problems of stability of the vibration proof plate under random influences. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2019;2: 41–47. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-2243-2019-2-41-47

Авторы:
Олимжон Мусурмонович Дусматов – доктор физико-математических наук; заведующий кафедрой методики преподавания физики и астрономии физико-математического факультета.
Мураджон Усарович Ходжабеков – старший преподаватель кафедры механики строительства и сопротивления материалов строительного факультета.

Authors:
Olimjon M. Dusmatov, doctor of science (physics and mathematics); head of the department of teaching methods of physics and astronomy, faculty of physics-mathematics.
dusmatov62@bk.ru
Muradjon U. Khodjabekov, senior lecturer at the department of construction mechanics and resistance of materials, faculty of civil engineering.
uzedu@inbox.ru

Журнал Белорусского государственного университета. Физика. 2019;2:41–47
Journal of the Belarusian State University. Physics. 2019;2:41–47

THE NONLINEAR PROBLEMS OF STABILITY OF THE VIBRATION PROOF PLATE UNDER RANDOM INFLUENCES

O. M. DUSMATOV[a]***, M. U. KHODJABEKOV***[b]

[a]*Tashkent State Pedagogical University named after Nizami,*
27 Bunyodkor Street, Tashkent 100185, Uzbekistan
[b]*Samarkand State Architectural and Civil Engineering Institute,*
70 Lolazor Street, Samarkand 140147, Uzbekistan

Corresponding author: O. M. Dusmatov (dusmatov62@bk.ru)

Introduction. The problem of stability of nonlinear vibrations of a plate with a dynamic dumper and elastic-dissipative characteristics of the hysteresis type under random influences it considered.

Object and methods of research. The energy scattering in materials of the plate and the elastic – dumping element of the dynamic vibration dumper is taken into account in the form of a hysteresis loop according to the Pisarenco – Boginich. The stability of the vibration protected system, proposed Japanese counterpart Ito, method is studied using the static linearization method.

Results and discussion. The stability conditions of the vibration-resistant plate and obtained, which make it possible to determine the region and boundaries of stability at different values of the parameters of the plate and the dynamic dumper at different random influences.

Conclusion. It is shown that under random action in the form of white noise vibrations of the vibration – protected plate will be asymptotically stable, and the stability conditions do not depend on the spectral density of the acceleration of the base.

Keywords: vibration-resistant plate; a dynamic dumper of vibrations; elastic-dissipative characteristics of the hysteresis; stability conditions; random influences.

Введение

Развитие современной техники, рост скорости и мощности двигательных установок, машин и агрегатов, разнообразие характеристик комфортабельности транспортных средств, требования к устойчивости и маневренности летательных аппаратов обусловливают потребность дальнейшего совершенствования и расширения областей применения эффективных способов и средств пассивной и активной виброзащиты.

Все вышесказанное требует создания комбинированных средств виброзащиты, отработки новых конструктивных форм динамических гасителей колебаний (ДГК), а также более детального исследования внутренней динамики и устойчивости нелинейных виброзащитных систем.

Для определения эффективности гашения колебаний механических систем актуальным является решение задачи устойчивости.

Объекты и методика исследования

Исследуем устойчивость нелинейных колебаний виброзащищаемой пластины при случайных воздействиях. В качестве объектов исследований рассмотрим пластины и ДГК.

Рассеяние энергии в материале пластины и упругодемпфирующем элементе ДГК учитывается по гипотезе Писаренко – Богинича [1]. Дифференциальные уравнения колебаний пластины с ДГК и упруго-диссипативными характеристиками гистерезисного типа при случайных воздействиях имеют вид [2]

$$\begin{gathered}\ddot{x}_{ik} + \left(\epsilon_1 + j\epsilon_2\mathrm{sign}\omega\right)p_{ik}^2 x_{ik} - \left(\epsilon_3 + j\epsilon_4\mathrm{sign}\omega\right)d_{3ik}u_{ik0}x_2 = -d_{ik}W_0,\\ u_{ik0}\ddot{x}_{ik} + \ddot{x}_2 + \left(\epsilon_3 + j\epsilon_4\mathrm{sign}\omega\right)n^2 x_2 = -W_0,\end{gathered} \tag{1}$$

где x_{ik} – перемещение точки ik пластины; $j^2 = -1$; ω – частота колебаний; p_{ik} – частота собственных колебаний точки ik пластины без рассеяния энергии; $d_{ik} = \dfrac{d_{1ik}}{d_{2ik}}$; $d_{3ik} = \dfrac{c}{\rho h d_{2ik}}$, ρ – плотность материала пластины, h – толщина пластины, $d_{1ik} = \iint\limits_s u_{ik}dxdy$, $d_{2ik} = \iint\limits_s u_{ik}^2 dxdy$, $u_{ik} = u_{ik}(x, y)$ – собственные формы колебаний точки ik пластины; $u_{ik0} = u_{ik}\left(x_0,\ y_0\right)$ – значения собственных форм колебаний точки ik пластины; x_2 – перемещение ДГК относительно точки, установленной на пластине; $n = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – собственная частота ДГК, c – коэффициент жесткости упругодемпфирующего элемента ДГК, m – масса ДГК; $W_0 = W_0(t)$ – ускорение основания;

$$\epsilon_1 = 1 - \left(c_0 + T_1\right)\eta_1 - \left(T_2 + T_3\right)\nu_1;\ \epsilon_2 = \left(c_0 + T_1\right)\eta_2 + \left(T_2 + T_3\right)\nu_2;$$

$$\epsilon_3 = 1 - \theta_1\left(D_0 + F\right);\ \epsilon_4 = \theta_2\left(D_0 + F\right),$$

здесь

$$T_1 = \frac{3D}{d_{2ik}\rho h p_{ik}^2}\sum_{i_1=1}^{r} c_{i_1} x_{ika}^{i_1}\,\frac{h^{i_1}}{2^{i_1}\left(i_1+3\right)}\iint\limits_s u_{ik}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha_{11}\left|\alpha_{11}\right|^{i_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\alpha_{22}\left|\alpha_{22}\right|^{i_1}\right)\right)dxdy;$$

$$T_2 = \frac{6D\left(1-\mu\right)}{d_{2ik}\rho h p_{ik}^2}\sum_{i_2}^{s_2} k_{i_2} x_{ika}^{i_2}\,\frac{h^{i_2}}{2^{i_2}\left(i_2+3\right)}\iint\limits_s u_{ik}\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\alpha_{33}\left|\alpha_{33}\right|^{i_3}\right)\right)dxdy;$$

$$T_3 = \frac{2D\left(1-\mu\right)}{d_{2ik}\rho h p_{ik}^2}k_0\iint\limits_s u_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\alpha_{33}\right)dxdy;$$

$\eta_1, \eta_2, \nu_1, \nu_2, \theta_1, \theta_2$ – коэффициенты линеаризации; $F = \sum\limits_{n^*=1}^{s_1} D_{n^*} x_{2a}^{n^*}$ – декремент колебаний, D_{n^*} ($n^* = 0, \ldots, s_1$), c_{i_1} ($i_1 = 0, \ldots, r$) и k_{i_2} ($i_2 = 0, \ldots, s_2$) – некоторые числа, определяемые по выбранным на экспериментальной кривой $\alpha_0 = f\left(x_2\right)$ точкам с координатами f_i, полученным при простом виде циклической деформации материала [3], x_{2a} – амплитуда переменной $x_2(t)$; $\alpha_{11} = \dfrac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2} + \mu\dfrac{\partial^2 u_{ik}}{\partial y^2}$; $\alpha_{22} = \dfrac{\partial^2 u_{ik}}{\partial y^2} + \mu\dfrac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2}$; $\alpha_{33} = \dfrac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x\partial y}$; x_{ika} – амплитуда переменной $x_{ik}(t)$; μ – коэффициент Пуассона; $D = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ – цилиндрическая жесткость пластины, E – модуль Юнга.

Устойчивость рассматриваемой виброзащищаемой пластины при случайных процессах можно исследовать используя методику Ито [4–6]. Для этого решения дифференциальных уравнений (1) будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_{ik} &= \sigma_{ik}(t)e^{j\omega t} + \xi_{ik}(t)e^{-j\omega t},\\ x_2 &= \sigma_2(t)e^{j\omega t} + \xi_2(t)e^{-j\omega t}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\sigma_{ik}(t)$, $\xi_{ik}(t)$ и $\sigma_2(t)$, $\xi_2(t)$ – амплитудные значения переменных x_{ik} и x_2 соответственно.

Вычисляя производные из выражения (2) и подставляя их в (1), имеем систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ik} &= \frac{1}{2j\omega b_1}\Big(\left(\omega^2 - p_{ik}^2\left(\epsilon_1 + j\epsilon_2\right)\right)b_1\sigma_{ik} + \left(\omega^2 - p_{ik}^2\left(\epsilon_1 - j\epsilon_2\right)\right)b_1\xi_{ik}e^{-2j\omega t} +\\ &\quad + d_{3ik}u_{ik0}b_1\left(\epsilon_3 + j\epsilon_4\right)\sigma_2 + d_{3ik}u_{ik0}b_1\left(\epsilon_3 - j\epsilon_4\right)\xi_2e^{-2j\omega t} - d_{ik}b_1W_0e^{-j\omega t}\Big),\\ \dot{\xi}_{ik} &= -\frac{1}{2j\omega b_1}\Big(\left(\omega^2 - p_{ik}^2\left(\epsilon_1 + j\epsilon_2\right)\right)b_1\sigma_{ik}e^{2j\omega t} + \left(\omega^2 - p_{ik}^2\left(\epsilon_1 - j\epsilon_2\right)\right)b_1\xi_{ik} +\\ &\quad + d_{3ik}u_{ik0}b_1\left(\epsilon_3 + j\epsilon_4\right)\sigma_2e^{2j\omega t} + d_{3ik}u_{ik0}b_1\left(\epsilon_3 - j\epsilon_4\right)\xi_2 - d_{ik}b_1W_0e^{j\omega t}\Big),\\ \dot{\sigma}_2 &= \frac{1}{2j\omega}\Big(\left(\omega^2 - b_3\left(\epsilon_3 + j\epsilon_4\right)\right)\sigma_2 + \left(\omega^2 - b_3\left(\epsilon_3 - j\epsilon_4\right)\right)\xi_2e^{-2j\omega t} +\\ &\quad + u_{ik0}p_{ik}^2\left(\epsilon_1 + j\epsilon_2\right)\sigma_{ik} + u_{ik0}p_{ik}^2\left(\epsilon_1 - j\epsilon_2\right)\xi_{ik}e^{-2j\omega t} - b_2W_0e^{-j\omega t}\Big), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\dot{\xi}_2 = -\frac{1}{2j\omega}\Big(\big(\omega^2 - b_3(\epsilon_3 + j\epsilon_4)\big)\sigma_2 e^{2j\omega t} + \big(\omega^2 - b_3(\epsilon_3 - j\epsilon_4)\big)\xi_2 + \\ + u_{ik0}(\epsilon_1 + j\epsilon_2)\, p_{ik}^2 \sigma_{ik} e^{2j\omega t} + u_{ik0} p_{ik}^2 (\epsilon_1 - j\epsilon_2)\xi_{ik} - b_2 W_0 e^{j\omega t}\Big),$$

где $b_1 = n^2 d_{ik} + u_{ik0} d_{3ik}$; $b_2 = 1 - u_{ik0} d_{ik}$; $b_3 = n^2 + u_{ik0}^2 d_{3ik}$.

Используя метод статистической линеаризации на основе методики Ито, из (3) получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
d\sigma_{ik} &= \frac{1}{2j\omega}\Big(\big(\omega^2 - p_{ik}^2(\epsilon_1 + j\epsilon_2)\big)\sigma_{ik} + d_{3ik} u_{ik0} b_1 (\epsilon_3 + j\epsilon_4)\sigma_2\Big)dt + \\
&\quad + \frac{1}{4\omega^2}\sum_{l=1}^{4}\gamma_{1l}\, dw_w(t), \\
d\xi_{ik} &= -\frac{1}{2j\omega}\Big(\big(\omega^2 - p_{ik}^2(\epsilon_1 - j\epsilon_2)\big)\xi_{ik} + d_{3ik} u_{ik0} (\epsilon_3 - j\epsilon_4)\xi_2\Big)dt + \\
&\quad + \frac{1}{4\omega^2}\sum_{l=1}^{4}\gamma_{2l}\, dw_w(t), \\
d\sigma_2 &= \frac{1}{2j\omega}\Big(\big(\omega^2 - b_3(\epsilon_3 + j\epsilon_4)\big)\sigma_2 + u_{ik0} p_{ik}^2 (\epsilon_1 + j\epsilon_2)\sigma_{ik}\Big)dt + \\
&\quad + \frac{1}{4\omega^2}\sum_{l=1}^{4}\gamma_{3l}\, dw_w(t), \\
d\xi_2 &= -\frac{1}{2j\omega}\Big(\big(\omega^2 - b_3(\epsilon_3 - j\epsilon_4)\big)\xi_2 + u_{ik0}\, p_{ik}^2 (\epsilon_1 - j\epsilon_2)\xi_{ik}\Big)dt + \\
&\quad + \frac{1}{4\omega^2}\sum_{l=1}^{4}\gamma_{4l}\, dw_w(t),
\end{aligned} \tag{4}$$

где $w_w(t)$ определяет процесс Винера и суммы $\sum_{l=1}^{4}\gamma_{1l}$, $\sum_{l=1}^{4}\gamma_{2l}$, $\sum_{l=1}^{4}\gamma_{3l}$, $\sum_{l=1}^{4}\gamma_{4l}$ вычисляются по следующей матрице [5]:

$$\left\|\gamma\gamma^{\mathrm{T}}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 & d_{ik}^2 S_- & 0 & d_{ik} b_2 S_- \\ d_{ik}^2 S_+ & 0 & d_{ik} b_2 S_+ & 0 \\ 0 & d_{ik} b_2 S_- & 0 & b_2^2 S_- \\ d_{ik} b_2 S_+ & 0 & b_2^2 S_- & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Спектральная плотность W_0 есть [5]

$$S_{\mp} = S_0(\omega) \mp j\psi_0(\omega),$$

где

$$S_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau;$$

$$\psi_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\sin\omega\tau d\tau,$$

здесь $R(\tau)$ – корреляционная функция ускорения основания: $R(\tau) = \langle W_0(t) W_0(t+\tau)\rangle$; $\langle W_0(t) W_0(t+\tau)\rangle$ – математическое ожидание ускорения основания, τ – время корреляции.

Устойчивость системы, имеющей упругодиссипативные характеристики гистерезисного типа, изучена в работе [7] по методике Ито с помощью статистической линеаризации. Используя этот метод, найдем математические ожидания уравнений (4):

$$\frac{d\langle\sigma_{ik}\rangle}{dt}=\frac{1}{2j\omega}\Big(\big(\omega^2-p_{ik}^2(\epsilon_1+j\epsilon_2)\big)\langle\sigma_{ik}\rangle+d_{3ik}u_{ik0}(\epsilon_3+j\epsilon_4)\langle\sigma_2\rangle\Big),$$

$$\frac{d\langle\xi_{ik}\rangle}{dt}=\frac{-1}{2j\omega}\Big(\big(\omega^2-p_{ik}^2(\epsilon_1-j\epsilon_2)\big)\langle\xi_{ik}\rangle+d_{3ik}u_{ik0}(\epsilon_3-j\epsilon_4)\langle\xi_2\rangle\Big),\qquad(5)$$

$$\frac{d\langle\sigma_2\rangle}{dt}=\frac{1}{2j\omega}\Big(\big(\omega^2-b_3(\epsilon_3+j\epsilon_4)\big)\langle\sigma_2\rangle+u_{ik0}p_{lk}^2(\epsilon_1+j\epsilon_2)\langle\sigma_{ik}\rangle\Big),$$

$$\frac{d\langle\xi_2\rangle}{dt}=\frac{-1}{2j\omega}\Big(\big(\omega^2-b_3(\epsilon_3-j\epsilon_4)\big)\langle\xi_2\rangle+u_{ik0}p_{ik}^2(\epsilon_1-j\epsilon_2)\langle\xi_{ik}\rangle\Big).$$

Следовательно, устойчивость рассматриваемой системы не зависит от спектральной плотности ускорения основания – в отличие от случая параметрических случайных воздействий, когда такая зависимость имеется.

Результаты и их обсуждение

Определим условия устойчивости виброзащищаемой пластины. Для этого найдем решение системы дифференциальных уравнений (5), корни характеристических уравнений которой есть

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}&=\frac{1}{4j\omega}\Big(2\omega^2-b_3\epsilon_3-\epsilon_1p_{ik}^2-\big(\epsilon_2p_{ik}^2+b_3\epsilon_4\big)j\Big)+\frac{\pm\lambda^*+j\lambda^{**}}{4\omega},\\ \lambda_{3,4}&=\frac{1}{4j\omega}\Big(-2\omega^2+b_3\epsilon_3+\epsilon_1p_{ik}^2-\big(\epsilon_2p_{ik}^2+b_3\epsilon_4\big)j\Big)+\frac{\pm\lambda^*+j\lambda^{**}}{4\omega},\end{aligned}\qquad(6)$$

где

$$\lambda^*=\sqrt{\frac{-\kappa+\sqrt{\kappa^2+\kappa_0^2}}{2}};\ \lambda^{**}=\operatorname{sign}\kappa_0\sqrt{\frac{\kappa+\sqrt{\kappa^2+\kappa_0^2}}{2}},$$

$$\kappa=\big(b_3\epsilon_3-\epsilon_1p_{ik}^2\big)^2-\big(\epsilon_2p_{ik}^2-b_3\epsilon_4\big)^2+4d_{3ik}u_{ik0}^2p_{ik}^2(\epsilon_1\epsilon_3-\epsilon_2\epsilon_4);$$

$$\kappa_0=2\big(b_3\epsilon_3-\epsilon_1p_{ik}^2\big)\big(\epsilon_2p_{ik}^2-b_3\epsilon_4\big)-4d_{3ik}u_{ik0}^2p_{ik}^2(\epsilon_2\epsilon_3+\epsilon_1\epsilon_4).$$

С учетом (6) найдем решения системы дифференциальных уравнений (5) в виде

$$\langle\sigma_{ik}\rangle=\Big\langle C_1^{(1)}\Big\rangle e^{\lambda_1t}+\Big\langle C_1^{(2)}\Big\rangle e^{\lambda_2t},$$

$$\langle\xi_{ik}\rangle=\Big\langle D_1^{(1)}\Big\rangle e^{\lambda_3t}+\Big\langle D_1^{(2)}\Big\rangle e^{\lambda_4t},$$

$$\langle\sigma_2\rangle=\Big\langle C_2^{(1)}\Big\rangle e^{\lambda_1t}+\Big\langle C_2^{(2)}\Big\rangle e^{\lambda_2t},$$

$$\langle\xi_2\rangle=\Big\langle D_2^{(1)}\Big\rangle e^{\lambda_3t}+\Big\langle D_2^{(2)}\Big\rangle e^{\lambda_4t}.$$

Здесь коэффициенты определяются из условия нормирования, т. е.

$$\Big\langle C_1^{(1)}\Big\rangle=\frac{d_{3ik}u_{ik0}\sqrt{\epsilon_3^2+\epsilon_4^2}}{\sqrt[4]{z_1^2+z_2^2}},$$

$$z_1=\big(\epsilon_2p_{ik}^2-b_3\epsilon_4+\lambda^*\big)^2-\big(\epsilon_1p_{ik}^2-b_3\epsilon_3-\lambda^{**}\big)^2-4d_{3ik}^2u_{ik0}^2\big(\epsilon_3^2-\epsilon_4^2\big),$$

$$z_2 = -2\left(\epsilon_2 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_4 + \lambda^*\right)\left(\epsilon_1 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_3 - \lambda^{**}\right) - 8\epsilon_3\epsilon_4 d_{3ik}^2 u_{ik0}^2;$$

$$\left\langle C_1^{(2)} \right\rangle = \frac{d_{3ik} u_{ik0}\sqrt{\epsilon_3^2 + \epsilon_4^2}}{\sqrt[4]{z_3^2 + z_4^2}},$$

$$z_3 = \left(\epsilon_2 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_4 - \lambda^*\right)^2 - \left(\epsilon_1 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_3 - \lambda^{**}\right)^2 - 4d_{3ik}^2 u_{ik0}^2\left(\epsilon_3^2 - \epsilon_4^2\right),$$

$$z_4 = -2\left(\epsilon_2 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_4 - \lambda^*\right)\left(\epsilon_1 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_3 - \lambda^{**}\right) - 8\epsilon_3\epsilon_4 d_{3ik}^2 u_{ik0}^2;$$

$$\left\langle C_2^{(1)} \right\rangle = \frac{\sqrt{\left(\epsilon_2 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_4 + \lambda^*\right)^2 + \left(\epsilon_1 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_3 - \lambda^{**}\right)^2}}{\sqrt[4]{z_1^2 + z_2^2}};$$

$$\left\langle C_2^{(2)} \right\rangle = \frac{\sqrt{\left(\epsilon_2 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_4 - \lambda^*\right)^2 + \left(\epsilon_1 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_3 - \lambda^{**}\right)^2}}{\sqrt[4]{z_3^2 + z_4^2}};$$

$$\left\langle D_1^{(1)} \right\rangle = \frac{\sqrt{\left(\epsilon_2 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_4 - \lambda^*\right)^2 + \left(\epsilon_1 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_3 + \lambda^{**}\right)^2}}{\sqrt[4]{z_5^2 + z_6^2}},$$

$$z_5 = \left(\epsilon_2 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_4 - \lambda^*\right)^2 - \left(\epsilon_1 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_3 + \lambda^{**}\right)^2 - 4p_{ik}^4 u_{ik0}^2\left(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2\right),$$

$$z_6 = -2\left(\epsilon_2 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_4 - \lambda^*\right)\left(\epsilon_1 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_3 + \lambda^{**}\right) + 8\epsilon_1\epsilon_2 p_{ik}^4 u_{ik0}^2;$$

$$\left\langle D_1^{(2)} \right\rangle = \frac{\sqrt{\left(\epsilon_2 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_4 + \lambda^*\right)^2 + \left(\epsilon_1 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_3 + \lambda^{**}\right)^2}}{\sqrt[4]{z_7^2 + z_8^2}},$$

$$z_7 = \left(\epsilon_2 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_4 - \lambda^*\right)^2 - \left(\epsilon_1 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_3 + \lambda^{**}\right)^2 - 4p_{ik}^4 u_{ik0}^2\left(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2\right),$$

$$z_8 = -2\left(\epsilon_2 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_4 + \lambda^*\right)\left(\epsilon_1 p_{ik}^2 - b_3\epsilon_3 + \lambda^{**}\right) + 8\epsilon_1\epsilon_2 p_{ik}^4 u_{ik0}^2;$$

$$\left\langle D_2^{(1)} \right\rangle = \frac{p_{ik}^2 u_{ik0}\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}{\sqrt[4]{z_5^2 + z_6^2}};$$

$$\left\langle D_2^{(2)} \right\rangle = \frac{p_{ik}^2 u_{ik0}\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}{\sqrt[4]{z_7^2 + z_8^2}}.$$

Среднеквадратичные отклонения стационарно-амплитудных значений переменных x_{ik} определяются из выражения

$$\left\langle x_{ika}^2 \right\rangle = 4\left(\left\langle C_1^{(1)} \right\rangle + \left\langle C_1^{(2)} \right\rangle\right)\left(\left\langle D_1^{(1)} \right\rangle + \left\langle D_1^{(2)} \right\rangle\right).$$

Для устойчивости нелинейных случайных колебаний виброзащищаемой пластины с ДГК достаточно, чтобы действительные части корней характеристических уравнений были отрицательными, т. е.

$$\begin{aligned} -\epsilon_2 p_{ik}^2 - \epsilon_4 b_3 + \lambda^* < 0, \\ -\epsilon_2 p_{ik}^2 - \epsilon_4 b_3 - \lambda^* < 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку ϵ_2, ϵ_4 – положительные функции, определяющие рассеяние энергии в материалах пластины и ДГК, для достаточно малых значений $\langle x_{ika}\rangle$, $\langle x_{2a}\rangle$ значения к, $к_0$ будут положительными, то $\lambda^* > 0$. Первое неравенство в (7) является условием устойчивости виброзащищаемой пластины с ДГК:

$$\lambda^* < \epsilon_2 p_{ik}^2 + \epsilon_4 b_3. \tag{8}$$

Упростив по параметрам неравенство (8), имеем

$$\epsilon_2\epsilon_4\left(\left(\epsilon_2 p_{ik}^2 + \epsilon_4 n^2 + \epsilon_4 d_{3ik} u_{ik0}^2\right)^2 + \left(\epsilon_1 p_{ik}^2 - \epsilon_3 n^2 - \epsilon_3 d_{3ik} u_{ik0}^2\right)^2\right) +$$
$$+ \left(\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_4\right)^2 p_{ik}^2 d_{3ik} u_{ik0}^2 > 0.$$

Из полученного неравенства следует, что при наличии случайных воздействий в виде белого шума колебания виброзащищаемой пластины асимптотически устойчивы, а условия устойчивости не зависят от спектральной плотности ускорения основания.

Заключение

Использование методики Ито позволяет определить аналитические выражения условия устойчивости виброзащищаемой пластины, на основе которых можно анализировать области и границы устойчивости при различных параметрах пластины и ДГК (отношение масс, место установки ДГК, диссипативные свойства материалов пластины, а также упругодемпфирующих элементов и частоты настройки ДГК) и при случайных воздействиях. Наличие нелинейных свойств виброзащищаемой системы и ДГК обусловливает качественные особенности, связанные с определением оптимальных параметров и области устойчивости системы, повышением эффективности гашения колебаний в широком диапазоне частот.

Библиографические ссылки

1. Писаренко ГС, Богинич ОЕ. *Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии.* Киев: Наукова думка; 1981. 220 с.
2. Павловский МА, Рыжков ЛМ, Яковенко ВБ, Дусматов ОМ. Нелинейные задачи динамики виброзащитных систем. Киев: Техника; 1997. 204 с.
3. Писаренко ГС, Яковлев АП, Матвеев ВВ. *Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Справочник.* Киев: Наукова думка; 1971. 327 с.
4. Bernt O'. *Stochastic differential equations: An introduction with applications.* New York: Springer Science and Business Media Press; 2010. 379 p.
5. Cho WS To. *Nonlinear random vibrations: Analytical techniques and applications.* Boca Raton: CRC Press; 2012. 293 p.
6. Villarroel J. On solutions to Ito stochastic differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2003; 158(1):225–231. DOI: 10.1016/S0377-0427(03)00477-1.
7. Pavlovskii MA, Ryzhkov LM. Random parametric oscillations of elastic systems with hysteresis energy dissipation. *Soviet of Applied Mechanics.* 1990;26(9):890−895. DOI: 10.1007/BF00888776.

References

1. Pisarenko GS, Boginich OE. *Kolebaniya kinematicheski vozbuzhdaemykh mekhanicheskikh sistem s uchetom dissipatsii energii* [Vibration kinematic lifted mechanical system with calculs losing energy]. Kiev: Naukova dumka; 1981. 220 p. Russian.
2. Pavlovsky MA, Rijkov LM, Yakovenko VB, Dusmatov OM. *Nelineinye zadachi dinamiki vibrozashchitnykh sistem* [Nonlinear problems of dynamics of vibro-protected system]. Kiev: Tekhnika; 1997. 204 p. Russian.
3. Pisarenko GS, Yakovlev AP, Matveev VV. *Vibropogloshchayushchie svoistva konstruktsionnykh materialov. Spravochnik* [Vibroabsorbing properties of construction materials. Handbook]. Kiev: Naukova dumka; 1971. 327 p. Russian.
4. Bernt O'. *Stochastic differential equations: An introduction with applications.* New York: Springer Science and Business Media Press; 2010. 379 p.
5. Cho WS To. *Nonlinear random vibrations: Analytical techniques and applications.* Boca Raton: CRC Press; 2012. 293 p.
6. Villarroel J. On solutions to Ito stochastic differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2003; 158(1):225–231. DOI: 10.1016/S0377-0427(03)00477-1.
7. Pavlovskii MA, Ryzhkov LM. Random parametric oscillations of elastic systems with hysteresis energy dissipation. *Soviet of Applied Mechanics.* 1990;26(9):890−895. DOI: 10.1007/BF00888776.

Статья поступила в редколлегию 08.05.2019.
Received by editorial board 08.05.2019.