Доклады Национальной академии наук Беларуси

2006 январь–февраль Том 50 № 1

УДК 519.24

Член-корреспондент Ю. С. ХАРИН, А. С. ГУРИН

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ВЕКТОРНЫХ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОПУЩЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ИХ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Белорусский государственный университет

Поступило 06.06.2005

1. Введение. Авторегрессионные временные ряды являются часто используемой математической моделью для решения актуальных задач статистического анализа (прогнозирования, оценивания, проверки гипотез) экономических, финансовых, инженерных и других статистических данных [1]. В то же время на практике полное заполнение всех планируемых наблюдений встречается крайне редко [2–4]. Можно выделить два основных источника «пропусков». С одной стороны, некоторые данные не могут быть зарегистрированы в определенные моменты времени, например, из-за их несуществования или проблем измерения (выходные дни на бирже, сбой измерительного прибора). С другой стороны, некоторые наблюдения игнорируются экспертами ввиду их несостоятельности или малой степени доверия («выбросы», наличие шумов). Известный подход, основанный на вычислении функции правдоподобия [5,6] и использовании EM-алгоритма [2], позволяет строить оценки параметров авторегрессионной модели и интерполировать пропущенные значения. Однако этот подход является эвристическим, приводит к итерационным алгоритмам, для которых не известны характеристики точности оценивания. В настоящей работе строятся новые статистические оценки параметров авторегрессионной модели при наличии «пропусков» и исследуются их асимптотические свойства.

2. Математическая модель. Пусть наблюдаемый d-векторный $(d \geq 1)$ временной ряд $Y_t = (Y_{t1}, \ldots, Y_{td})' \in \mathbf{R}^d$ описывается моделью VAR(1) векторной авторегрессии первого порядка [7]:

$$Y_{t+1} = BY_t + U_{t+1},\ t \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

где $B \in \mathbf{R}^{d \times d}$ – матрица коэффициентов авторегрессии, спектральный радиус которой $\lambda_0 = \lambda_0(B) < 1$, $\{U_t \in \mathbf{R}^d : t \in \mathbf{Z}\}$ – независимые в совокупности случайные векторы с нулевым математическим ожиданием $\mathbf{E}\{U_t\} = 0_d$. В наблюдениях $\{Y_t\}$ имеются «пропуски». Шаблоном «пропусков» назовем последовательность двоичных векторов $O_t = (O_{ti})$, $t \in \mathbf{Z}$, где $O_{ti} = 1$, если Y_{ti} наблюдается, $O_{ti} = 0$, если Y_{ti} не наблюдается. Обозначим минимальный и максимальный моменты времени с наблюдаемыми компонентами: $t_- = \min\left\{t : \sum_{i=1}^d O_{ti} > 0\right\}$, $t_+ = \max\left\{t : \sum_{i=1}^d O_{ti} > 0\right\}$; без ограничения общности $t_- = 1$, $t_+ = T$. Отметим, что векторная авторегрессия VAR(p) порядка p сводится к VAR(1) расширением пространства наблюдений [7]: $\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^{dp}$. Задача состоит в построении статистических оценок модельных параметров B, Σ по наблюдаемому временному ряду $\{Y_t\}_{t=1,\ldots,T}$ с шаблоном «пропусков» $\{O_t\}_{t=1,\ldots,T}$, и исследовании их асимптотического поведения.

3. Оценки параметров, основанные на выборочных ковариациях. Сформулируем дополнительные предположения о шаблоне $\{O_t\}$ и инновационном процессе $\{U_t\}$.

П1. Момент четвертого порядка инновационного процесса равномерно ограничен: $\left|\mathbf{E}\left\{U_{ti_1}U_{ti_2}U_{ti_3}U_{ti_4}\right\}\right| \le \mathrm{const}_{\overline{I}}$, где $t \in \mathbf{Z}$, $i_1,\dots,i_4 \in \{1,\dots,d\}$, а через $\mathrm{const}_{\overline{I}_1,\dots,\overline{I}_n}$ в дальнейшем условимся обозначать математический объект (число, вектор, матрица), не зависящий от $i_1,\dots,i_n$.

П2. Ковариационная матрица инновационного процесса не зависит от времени: $\mathbf{Cov}\{U_t,U_t\} = \mathbf{E}\{U_tU_t'\} = \Sigma$, $t \in \mathbf{Z}$, $|\Sigma| \ne 0$.

П3. Момент восьмого порядка инновационного процесса равномерно ограничен: $\left|\mathbf{E}\left\{U_{ti_1}\cdots U_{ti_8}\right\}\right| \le \mathrm{const}_{\overline{I}}$, $t \in \mathbf{Z}$, $i_1,\dots,i_8 \in \{1,\dots,d\}$.

П4. Момент четвертого порядка инновационного процесса не зависит от времени: $\mathbf{E}\left\{U_{ti_1}U_{ti_2}U_{ti_3}U_{ti_4}\right\} = \Sigma^{(4)}_{i_1,i_2,i_3,i_4}$, $t \in \mathbf{Z}$, $i_1,\dots,i_4 \in \{1,\dots,d\}$.

П5. Инновационный процесс имеет нормальное распределение: $\mathcal{L}\{U_t\} = \mathcal{N}_d(0_d,\Sigma)$, $t \in \mathbf{Z}$.

П6. При $T \to \infty$ число наблюдаемых пар компонент векторов в один и тот же и соседние моменты времени бесконечно увеличивается: $\min_{i,j}\left(\sum_{t=1}^{T} O_{ti}O_{tj},\ \sum_{t=1}^{T-1} O_{t+1,i}O_{tj}\right) \to \infty$.

П7. При $T \to \infty$ имеет место следующее асимптотическое поведение шаблона $\{O_t\}$:

$$\sum_{t=1}^{T} O_{ti}O_{tj}\big/T \to \vartheta^{(0)}_{ij} \in (0,1],\ \sum_{t=1}^{T-1} O_{t+1,i}O_{tj}\big/(T-1) \to \vartheta^{(1)}_{ij} \in (0,1],$$

$$\sum_{t,t'=1}^{T-1} O_{ti}O_{tj}O_{t'i'}O_{t'j'}\delta_{t-t',\tau}\big/\left(T-|\tau|-1\right) \to \vartheta^{(2)}_{i,j,i',j'}(\tau) \in [0,1], \tag{2}$$

$$\sum_{t,t'=1}^{T-1} O_{ti}O_{tj}O_{t'+1,i'}O_{t'j'}\delta_{t-t',\tau}\big/\left(T-|\tau|-1\right) \to \vartheta^{(3)}_{i,j,i',j'}(\tau) \in [0,1],$$

$$\sum_{t,t'=1}^{T-1} O_{t+1,i}O_{tj}O_{t'+1,i'}O_{t'j'}\delta_{t-t',\tau}\big/\left(T-|\tau|-1\right) \to \vartheta^{(4)}_{i,j,i',j'}(\tau) \in [0,1],$$

где $\vartheta^{(0)}_{ij}$ – предельная частота наблюдения пары компонент (i,j) в один и тот же момент времени, $\vartheta^{(1)}_{ij}$ – предельная частота наблюдения пары (i,j) в соседние моменты времени, $\vartheta^{(2)}_{i,j,i',j'}(\tau)$ – предельная частота наблюдения пары (i,j) совместно с парой (i',j') при сдвиге во времени на τ, $\vartheta^{(3)}_{i,j,i',j'}(\tau)$ – предельная частота наблюдения пары (i,j) совместно с парой (i',j') в моменты времени, сдвинутые на $\tau-1$ и τ единиц времени от первой пары, $\vartheta^{(4)}_{i,j,i',j'}(\tau)$ – предельная частота наблюдения пары (i,j) в соседние моменты времени и пары (i',j') в соседние моменты времени, сдвинутые относительно первой пары на τ, где $\tau \in \mathbf{Z}$, $i,j,i',j' \in \{1,\dots,d\}$, $\delta_{a,b}$ – символ Кронеккера.

В предположениях П2, П4 обозначим ковариации $G = \mathbf{Cov}\{Y_1,Y_1\} = \sum_{i=0}^{\infty} B^i\Sigma(B')^i \in R^{d\times d}$, $G_1 = \mathbf{Cov}\{Y_2,Y_1\} = BG \in R^{d\times d}$, $g^{(1)}_{t-t',i,j,i',j'} = \mathbf{Cov}\{Y_{ti}Y_{tj},Y_{t'i'}Y_{t'j'}\}$, $g^{(2)}_{t-t',i,j,i',j'} = \mathbf{Cov}\{Y_{ti}Y_{tj},Y_{t'+1,i'}Y_{t'j'}\}$, $g^{(3)}_{t-t',i,j,i',j'} = \mathbf{Cov}\{Y_{t+1,i}Y_{tj},Y_{t'i'}Y_{t'j'}\}$, $g^{(4)}_{t-t',i,j,i',j'} = \mathbf{Cov}\{Y_{t+1,i}Y_{tj},Y_{t'+1,i'}Y_{t'j'}\}$, $t,t' \in \mathbf{Z}$, $i,j,i',j' \in \{1,\dots,d\}$. Назовем

$$T_0 = \inf\left\{T' \in \mathbf{N} : \min_{1\le i,j\le d}\left(\sum_{t=1}^{T'} O_{ti}O_{tj}, \sum_{t=1}^{T'-1} O_{t+1,i}O_{tj}\right) > 0\right\}$$

критическим временем наблюдения для заданного шаблона $\{O_t\}$. Для $T \ge T_0$ определим функции от шаблона ($\tau \in \mathbf{Z}$, $i,j,i',j' \in \{1,\dots,d\}$):

$$c^{(1)}_{\tau,i,j,i',j'}(T)=\frac{T\sum_{t,t'=1}^{T-1}O_{ti}O_{tj}O_{t'i'}O_{t'j'}\delta_{t-t',\tau}}{\sum_{t=1}^{T}O_{ti}O_{tj}\sum_{t=1}^{T}O_{ti'}O_{tj'}},\; c^{(2)}_{\tau,i,j,i',j'}(T)=\frac{T\sum_{t,t'=1}^{T-1}O_{ti}O_{tj}O_{t'+1,i'}O_{t'j'}\delta_{t-t',\tau}}{\sum_{t=1}^{T}O_{ti}O_{tj}\sum_{t=1}^{T-1}O_{t+1,i'}O_{tj'}},$$

$$c^{(3)}_{\tau,i,j,i',j'}(T)=\frac{T\sum_{t,t'=1}^{T-1}O_{t+1,i}O_{tj}O_{t'i'}O_{t'j'}\delta_{t-t',\tau}}{\sum_{t=1}^{T-1}O_{t+1,i}O_{tj}\sum_{t=1}^{T}O_{ti'}O_{tj'}},\; c^{(4)}_{\tau,i,j,i',j'}(T)=\frac{T\sum_{t,t'=1}^{T-1}O_{t+1,i}O_{tj}O_{t'+1,i'}O_{t'j'}\delta_{t-t',\tau}}{\sum_{t=1}^{T-1}O_{t+1,i}O_{tj}\sum_{t=1}^{T-1}O_{t+1,i'}O_{tj'}},$$

предельные характеристики шаблона:

$$C^{(1)}_{\tau,i,j,i',j'}=\frac{\vartheta^{(2)}_{i,j,i',j'}(\tau)}{\vartheta^{(0)}_{ij}\vartheta^{(0)}_{i'j'}},\; C^{(2)}_{\tau,i,j,i',j'}=\frac{\vartheta^{(3)}_{i,j,i',j'}(\tau)}{\vartheta^{(0)}_{ij}\vartheta^{(1)}_{i'j'}},\; C^{(3)}_{\tau,i,j,i',j'}=\frac{\vartheta^{(3)}_{i',j',i,j}(-\tau)}{\vartheta^{(0)}_{i'j'}\vartheta^{(1)}_{ij}},\; C^{(4)}_{\tau,i,j,i',j'}=\frac{\vartheta^{(4)}_{i,j,i',j'}(\tau)}{\vartheta^{(1)}_{ij}\vartheta^{(1)}_{i'j'}},$$

выборочные ковариации $\hat{G}=(\hat{G}_{ij})$, $\hat{G}_1=\left((\hat{G}_1)_{ij}\right)$

$$\hat{G}_{ij}=\sum_{t=1}^{T}Y_{ti}Y_{tj}O_{ti}O_{tj}\Big/\sum_{t=1}^{T}O_{ti}O_{tj}\,,\; (\hat{G}_1)_{ij}=\sum_{t=1}^{T-1}Y_{t+1,i}Y_{tj}O_{t+1,i}O_{tj}\Big/\sum_{t=1}^{T-1}O_{t+1,i}O_{tj}\,, \tag{3}$$

и при $|\hat{G}|\neq 0$ статистики, основанные на выборочных ковариациях (3):

$$\hat{B}=\hat{G}_1\hat{G}^{-1},\; \hat{\Sigma}=\hat{G}-\hat{G}_1\hat{G}^{-1}\hat{G}_1'. \tag{4}$$

4. Состоятельность оценок $\hat{B},\hat{\Sigma}$.

Л е м м а 1. *Если для модели* (1) *выполнено* П1, *то* $\forall\lambda\in(\lambda_0,1)$

$$\left|\mathbf{Cov}\{Y_{t_1i_1}Y_{t_2i_2},Y_{t_3i_3}Y_{t_4i_4}\}\right|\le\left(\lambda^{|t_1-t_3|+|t_2-t_4|}+\lambda^{|t_1-t_4|+|t_2-t_3|}\right)\mathrm{const}_{\bar{t}_1,\bar{t}_2,\bar{t}_3,\bar{t}_4},\; t_1,t_2,t_3,t_4\in\mathbf{Z},$$
$$i_1,i_2,i_3,i_4\in\{1,\dots,d\}.$$

Если вдобавок имеют место П2, П4, *то ковариация* $\mathbf{Cov}\{Y_{t_1i_1}Y_{t_2i_2},Y_{t_3i_3}Y_{t_4i_4}\}$ *зависит от моментов времени* t_1,t_2,t_3,t_4 *только через их разности* t_2-t_1,t_3-t_1,t_4-t_1. *Если к тому же имеет место* П5, *то эта ковариация выражается явно:*

$$\mathbf{Cov}\{Y_{t_1i_1}Y_{t_2i_2},Y_{t_3i_3}Y_{t_4i_4}\}=\left(G(B')^{t_3-t_1}I_{t_3-t_1\ge0}+B^{t_1-t_3}GI_{t_3-t_1<0}\right)_{i_1i_3}\times$$
$$\left(G(B')^{t_4-t_2}I_{t_4-t_2\ge0}+B^{t_2-t_4}GI_{t_4-t_2<0}\right)_{i_2i_4}+$$
$$\left(G(B')^{t_4-t_1}I_{t_4-t_1\ge0}+B^{t_1-t_4}GI_{t_4-t_1<0}\right)_{i_1i_4}\left(G(B')^{t_3-t_2}I_{t_3-t_2\ge0}+B^{t_2-t_3}GI_{t_3-t_2<0}\right)_{i_2i_3},$$

где I_A *– индикаторная функция события* A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следует из известного линейного представления [7] временного ряда (1) $Y_t=\sum_{i=0}^{\infty}B^iU_{t-i}$, $t\in\mathbf{Z}$.

Т е о р е м а 1. *Если для модели* (1) *выполнено* П2, *то статистики* (3) *являются несмещенными оценками матриц* G *и* G_1: $\mathbf{E}\{\hat{G}\}=G$, $\mathbf{E}\{\hat{G}_1\}=G_1$. *Если к тому же выполнены* П1 *и* П6, *то при* $T\to\infty$ *оценки* (3) *состоятельны в среднем квадратическом* $\hat{G}\xrightarrow{\mathbf{L_2}}G$, $\hat{G}_1\xrightarrow{\mathbf{L_2}}G_1$, *а статистики* (4) *являются состоятельными (по вероятности) оценками параметров* B,Σ: $\hat{B}\xrightarrow{\mathbf{P}}B$, $\hat{\Sigma}\xrightarrow{\mathbf{P}}\Sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следует из леммы 1, тождеств $G_1=BG$, $G=BG_1'+\Sigma$ и свойств сходимости случайных последовательностей.

5. Асимптотическая нормальность оценки $\hat{B}$.

Л е м м а 2. *Если выполнено* П7 *и* $T \to \infty$, *то* $c^{(k)}_{\tau,i,j,i',j'}(T) \to C^{(k)}_{\tau,i,j,i',j'}$, $k \in \{1,\dots,4\}$,

$$\sum_{t,t'=1}^{T-1} O_{t+1,i} O_{tj} O_{t'i'} O_{t'j'} \delta_{t-t',\tau} \Big/ \left(T - |\tau| - 1\right) \to \vartheta^{(3)}_{i',j',i,j}(-\tau) \in [0,1],$$

для предельных характеристик шаблона имеют место соотношения симметрии

$$C^{(k)}_{\tau,i,j,i',j'} = C^{(k)}_{-\tau,i',j',i,j},\ k \in \{1,4\},\ C^{(3)}_{\tau,i,j,i',j'} = C^{(2)}_{-\tau,i',j',i,j},\ \tau \in \mathbf{Z},\ i,j,i',j' \in \{1,\dots,d\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая и третья части утверждения являются очевидными следствиями П7 и введенных обозначений. Вторая часть получается заменой $t \leftrightarrow t'$ в П7.

Пусть последовательность случайных векторов $\xi_t = (\xi_{ti}) \in \mathbf{R}^d$ при $t \to \infty$ сходится по распределению к случайному вектору $\xi \in \mathbf{R}^d$, имеющему ковариационную матрицу $\Sigma = (\Sigma_{ij}) = \mathbf{Cov}\{\xi,\xi\}$. Тогда асимптотическими ковариациями случайного вектора ξ_t будем называть ковариации случайного вектора ξ и обозначать: $\mathbf{aCov}\{\xi_{ti},\xi_{tj}\} = \Sigma_{ij}$; аналогично определим асимптотические дисперсию и математическое ожидание: $\mathbf{aD}\{\xi_{ti}\} = \Sigma_{ii}$, $\mathbf{aE}\{\xi_t\} = \mathbf{E}\{\xi\}$, $i,j \in \{1,\dots,d\}$.

Результаты об асимптотической нормальности оценки $\hat{B}$ основаны на следующей центральной предельной теореме для m_T-зависимых случайных векторов [8, 9].

Т е о р е м а 2 [8, 9]. *Пусть* $\left\{Z_t^{(T)}, t \in \{1,2,\dots,k_T\}\right\}$ *– последовательность* m_T*-зависимых случайных величин с* $\mathbf{E}\left\{Z_t^{(T)}\right\} = 0$ *для любых* t *и* T, $k_T \to \infty$ *при* $T \to \infty$, $S_T = \sum_{t=1}^{k_T} Z_t^{(T)}$, $D_T^2 = \mathbf{E}\{S_T^2\}$, $\bar{D}_T^2 = \sum_{t=1}^{k_T} \mathbf{E}\left\{\left(Z_t^{(T)}\right)^2\right\}$, $F_T(x) = \mathbf{P}\{S_T \le D_T x\}$, $\Delta_T(x) = |F_T(x) - \Phi(x)|$, $\Phi(x)$ *– функция стандартного нормального распределения,* $\gamma_\delta = \delta(\delta+2)/\left(2(\delta^2+4\delta+2)\right)$, $0 < \delta \le 1$, $\varepsilon_T = D_T^{-2} m_T^{(3\delta+2)/\delta}$. *Предположим, что* $\mathbf{E}\left\{\left|Z_t^{(T)}\right|^{2+\delta}\right\} < \infty$ *и выполнены следующие условия: 1)* $D_T^2 \to \infty$, *2)* $\bar{D}_T^2 = \mathrm{O}(D_T^2)$, *3)* $\sum_{T=1}^{K_t} \mathbf{E}\left\{\left|Z_t^{(T)}\right|^{2+\delta}\right\} = \mathrm{O}(D_T^2)$, *4)* $k_T = \mathrm{O}(D_T^2)$, *5)* $D_T^8 m_T^{-6} \le k_T^7$ *для больших* T, *6)* $\varepsilon_T \to 0$. *Тогда для всех* x *выполнено:* $\Delta_T(x) \le \mathrm{const}_{T,x} \varepsilon_T^{\gamma_\delta} / (1+|x|)^{2+\delta}$.

Л е м м а 3. *Если для модели* (1) *выполнены* П2, П3, П4, П7, *то при* $T \to \infty$ *вектор, составленный из элементов матриц* $\sqrt{T}\left(\hat{G} - G\right)$, $\sqrt{T}\left(\hat{G}_1 - G_1\right)$, *распределен асимптотически нормально с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями* $\left(i,j,i',j' \in \{1,\dots,d\}\right)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{aCov}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{G} - G\right)_{ij}, \sqrt{T}\left(\hat{G} - G\right)_{i'j'}\right\} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} g^{(1)}_{\tau,i,j,i',j'} C^{(1)}_{\tau,i,j,i',j'},\\
&\mathbf{aCov}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{G}_1 - G_1\right)_{ij}, \sqrt{T}\left(\hat{G}_1 - G_1\right)_{i'j'}\right\} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} g^{(4)}_{\tau,i,j,i',j'} C^{(4)}_{\tau,i,j,i',j'},\\
&\mathbf{aCov}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{G} - G\right)_{ij}, \sqrt{T}\left(\hat{G}_1 - G_1\right)_{i'j'}\right\} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} g^{(2)}_{\tau,i,j,i',j'} C^{(2)}_{\tau,i,j,i',j'}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [10], что вектор имеет асимптотически нормальное распределение тогда и только тогда, когда линейная комбинация его элементов с произвольными коэффициентами имеет асимптотически нормальное распределение. Согласно (3), построим линейную комбинацию элементов вектора, составленного из элементов матриц $\sqrt{T}\left(\hat{G}-G\right)$, $\sqrt{T}\left(\hat{G}_1-G_1\right)$, с произвольными коэффициентами α_{ij}, $\beta_{ij}\in\mathbf{R}$, $i,j\in\{1,\ldots,d\}$:

$$\sqrt{T}\sum_{i,j=1}^{d}\left(\alpha_{ij}\left(\hat{G}-G\right)_{ij}+\beta_{ij}\left(\hat{G}_1-G_1\right)_{ij}\right)=\eta_1(T)+\eta_2(T)+\eta_3(T); \tag{6}$$

$$\eta_1(T)=\sqrt{T}\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{i,j=1}^{d}\left(\frac{\alpha_{ij}\left(Y_{ti}^{(m_T)}Y_{tj}^{(m_T)}-\mathbf{E}\left\{Y_{ti}^{(m_T)}Y_{tj}^{(m_T)}\right\}\right)O_{ti}O_{tj}}{\sum_{t_1=1}^{T}O_{t_1i}O_{t_1j}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_{ij}\left(Y_{t+1,i}^{(m_T)}Y_{tj}^{(m_T)}-\mathbf{E}\left\{Y_{t+1,i}^{(m_T)}Y_{tj}^{(m_T)}\right\}\right)O_{t+1,i}O_{tj}}{\sum_{t_1=1}^{T-1}O_{t_1+1,i}O_{t_1j}}\right),$$

$$\eta_2(T)=\sqrt{T}\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{i,j=1}^{d}\left(\frac{\alpha_{ij}\left(Y_{ti}^{(m_T)}U_{tj}^{(m_T)}-\mathbf{E}\left\{Y_{ti}^{(m_T)}U_{tj}^{(m_T)}\right\}\right)O_{ti}O_{tj}}{\sum_{t_1=1}^{T}O_{t_1i}O_{t_1j}}+\right.$$

$$\frac{\alpha_{ij}\left(U_{ti}^{(m_T)}Y_{tj}^{(m_T)}-\mathbf{E}\left\{U_{ti}^{(m_T)}Y_{tj}^{(m_T)}\right\}\right)O_{ti}O_{tj}}{\sum_{t_1=1}^{T}O_{t_1i}O_{t_1j}}+$$

$$\frac{\alpha_{ij}\left(U_{ti}^{(m_T)}U_{tj}^{(m_T)}-\mathbf{E}\left\{U_{ti}^{(m_T)}U_{tj}^{(m_T)}\right\}\right)O_{ti}O_{tj}}{\sum_{t_1=1}^{T}O_{t_1i}O_{t_1j}}+\frac{\beta_{ij}\left(Y_{t+1,i}^{(m_T)}U_{tj}^{(m_T)}-\mathbf{E}\left\{Y_{t+1,i}^{(m_T)}U_{tj}^{(m_T)}\right\}\right)O_{t+1,i}O_{tj}}{\sum_{t_1=1}^{T-1}O_{t_1+1,i}O_{t_1j}}+$$

$$\left.\frac{\beta_{ij}\left(U_{t+1,i}^{(m_T)}Y_{tj}^{(m_T)}-\mathbf{E}\left\{U_{t+1,i}^{(m_T)}Y_{tj}^{(m_T)}\right\}\right)O_{t+1,i}O_{tj}}{\sum_{t_1=1}^{T-1}O_{t_1+1,i}O_{t_1j}}+\frac{\beta_{ij}\left(U_{t+1,i}^{(m_T)}U_{tj}^{(m_T)}-\mathbf{E}\left\{U_{t+1,i}^{(m_T)}U_{tj}^{(m_T)}\right\}\right)O_{t+1,i}O_{tj}}{\sum_{t_1=1}^{T-1}O_{t_1+1,i}O_{t_1j}}\right),$$

$$\eta_3(T)=\sqrt{T}\sum_{i,j=1}^{d}\left(\alpha_{ij}\left(Y_{Ti}Y_{Tj}-\mathbf{E}\left\{Y_{Ti}Y_{Tj}\right\}\right)O_{Ti}O_{Tj}\Big/\left(\sum_{t=1}^{T}O_{ti}O_{tj}\right)\right),$$

$Y_t=Y_t^{(m_T)}+U_t^{(m_T)}$, $Y_t^{(m_T)}=\sum_{s=0}^{m_T}B^sU_{t-s}\in\mathbf{R}^d$, $U_t^{(m_T)}=\sum_{s=m_T+1}^{\infty}B^sU_{t-s}\in\mathbf{R}^d$, $t\in\mathbf{Z}$, $m_T\in\mathbf{N}$ – параметр разложения, зависящий от T.

Выбирая в теореме 2 $\delta=1$, $k_T=T-1$, $m_T=\lfloor T^{7/36}\rfloor$ ($[a]$ – целая часть a),

$$S_T=\sum_{t=1}^{k_T}Z_t^{(T)}=\sum_{t=1}^{T-1}T\sum_{i,j=1}^{d}\left(\frac{\alpha_{ij}\left(Y_{ti}^{(m_T)}Y_{tj}^{(m_T)}-\mathbf{E}\left\{Y_{ti}^{(m_T)}Y_{tj}^{(m_T)}\right\}\right)O_{ti}O_{tj}}{\sum_{t_1=1}^{T}O_{t_1i}O_{t_1j}}+\right.$$

$$\left.\frac{\beta_{ij}\left(Y_{t+1,i}^{(m_T)}Y_{tj}^{(m_T)}-\mathbf{E}\left\{Y_{t+1,i}^{(m_T)}Y_{tj}^{(m_T)}\right\}\right)O_{t+1,i}O_{tj}}{\sum_{t_1=1}^{T-1}O_{t_1+1,i}O_{t_1j}}\right),$$

и используя леммы 1,2, легко проверить условия теоремы 2 и тем самым доказать, что $\eta_1(T)$ имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией:

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\sum_{i,j,i',j'=1}^{d}\Big(\alpha_{ij}a_{i'j'}g^{(1)}_{\tau,i,j,i',j'}C^{(1)}_{\tau,i,j,i',j'}+\alpha_{ij}\beta_{i'j'}g^{(2)}_{\tau,i,j,i',j'}C^{(2)}_{\tau,i,j,i',j'}+\beta_{ij}a_{i'j'}g^{(3)}_{\tau,i,j,i',j'}C^{(3)}_{\tau,i,j,i',j'}+$$

$$\beta_{ij}\beta_{i'j'}g^{(4)}_{\tau,i,j,i',j'}C^{(4)}_{\tau,i,j,i',j'}\Big).$$

Применяя неравенства: $\left(\sum_{i=1}^{N}a_i\right)^2\le N^2\sum_{i=1}^{N}a_i^2$, $\mathbf{E}\left\{\left(U_{ti}^{(m_T)}\right)^2\right\}\le\lambda^{2m_T}\mathrm{const}_{\overline{t,T}}$, $\lambda\in(\lambda_0,1)$, $t\in\mathbf{Z}$, $m_T\in\mathbf{N}$, $i\in\{1,\dots,d\}$, получаем в (6) $\eta_2(T)\xrightarrow{\mathrm{L_2}}0$, $\eta_3(T)\xrightarrow{\mathrm{L_2}}0$ при $T\to\infty$. Следовательно, вектор, составленный из элементов матриц $\sqrt{T}\left(\hat{G}-G\right)$, $\sqrt{T}\left(\hat{G}_1-G_1\right)$, распределен асимптотически нормально с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями (5).

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы* 3, *и количество «пропусков» ограничено:* $\exists T_{\mathrm{obs}}\in\mathbf{N}$, *что* $O_{ti}=1$, $t\ge T_{\mathrm{obs}}$, $i\in\{1,\dots,d\}$. *Тогда при* $T\to\infty$ *вектор, составленный из элементов матриц* $\sqrt{T}\left(\hat{G}-G\right)$, $\sqrt{T}\left(\hat{G}_1-G_1\right)$, *распределен асимптотически нормально с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями* $(i,j,i',j'\in\{1,\dots,d\})$

$$\mathbf{aCov}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{G}-G\right)_{ij},\sqrt{T}\left(\hat{G}-G\right)_{i'j'}\right\}=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}g^{(1)}_{\tau,i,j,i',j'}$$

$$\mathbf{aCov}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{G}_1-G_1\right)_{ij},\sqrt{T}\left(\hat{G}_1-G_1\right)_{i'j'}\right\}=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}g^{(4)}_{\tau,i,j,i',j'},$$

$$\mathbf{aCov}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{G}-G\right)_{ij},\sqrt{T}\left(\hat{G}_1-G_1\right)_{i'j'}\right\}=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}g^{(2)}_{\tau,i,j,i',j'}.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия леммы* 3, *предположение* П5, *имеет место одномерный случай:* $d=1$, $\Sigma=\sigma^2$, *и предельные характеристики шаблона «пропусков» не зависят от временного лага* $\tau\in\mathbf{Z}$: $C^{(k)}_{\tau,1,1,1,1}=C^{(k)}_{1,1,1,1}=\mathrm{const}_{\tau}$, $k\in\{1,\dots,4\}$. *Тогда при* $T\to\infty$ *вектор* $\sqrt{T}\left(\hat{G}-G,\hat{G}_1-G_1\right)\in\mathbf{R}^2$ *распределен асимптотически нормально с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями:*

$$\mathbf{aD}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{G}-G\right)\right\}=\frac{\sigma^4}{\vartheta^{(0)}}\frac{2\left(1+B^2\right)}{\left(1-B^2\right)^3},\ \mathbf{aD}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{G}_1-G_1\right)\right\}=\frac{\sigma^4}{\vartheta^{(1)}}\frac{1-B^4+4B^2}{\left(1-B^2\right)^3},$$

$$\mathbf{aCov}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{G}-G\right),\sqrt{T}\left(\hat{G}_1-G_1\right)\right\}=4\sigma^4B\Big/\left(\vartheta^{(0)}\left(1-B^2\right)^3\right).$$

Теорема 3. *В условиях леммы* 3 *вектор, составленный из элементов матрицы* $\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)$, *распределен асимптотически нормально с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями* $(i,j,i',j'\in\{1,\dots,d\})$:

$$\mathbf{aCov}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)_{ij},\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)_{i'j'}\right\}=\sum_{k,k'=1}^{d}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\Big(g^{(4)}_{\tau,i,k,i',k'}C^{(4)}_{\tau,i,k,i',k'}-\sum_{l'=1}^{d}B_{i'l'}g^{(2)}_{\tau,l',k',i,k}C^{(2)}_{\tau,l',k',i,k}-$$
$$\sum_{l=1}^{d}B_{il}g^{(2)}_{\tau,l,k,i',k'}C^{(2)}_{\tau,l,k,i',k'}+\sum_{l,l'=1}^{d}B_{il}B_{i'l'}g^{(1)}_{\tau,l,k,l',k'}C^{(1)}_{\tau,l,k,l',k'}\Big)\left(G^{-1}\right)_{kj}\left(G^{-1}\right)_{k'j'}. \tag{7}$$

Доказательство. Преобразуем нормированное отклонение, используя (4) $\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)=\sqrt{T}\left(\hat{G}_1-G_1-B\left(\hat{G}-G\right)\right)\hat{G}^{-1}$. Определим линейную комбинацию с произвольными коэффициентами $\alpha_{ij}\in R$, $i,j\in\{1,\dots,d\}$:

$$\sum_{i,j=1}^{d}\alpha_{ij}\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)_{ij}=\sum_{i,j=1}^{d}\alpha_{ij}\sqrt{T}\sum_{k=1}^{d}\left(\left(\hat{G}_1-G_1\right)_{ik}-\sum_{l=1}^{d}B_{il}\left(\hat{G}-G\right)_{lk}\right)\left(\hat{G}^{-1}\right)_{kj}.$$

Используя теорему 1, лемму 3 и известную теорему о непрерывных функциональных преобразованиях случайных векторов [11], приходим к асимптотической нормальности линейной комбинации с нулевым средним и асимптотической дисперсией:

$$\sum_{i,j,i',j'=1}^{d}\alpha_{ij}\alpha_{i'j'}\sum_{k,k'=1}^{d}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\Big(g^{(4)}_{\tau,i,k,i',k'}C^{(4)}_{\tau,i,k,i',k'}-\sum_{l'=1}^{d}B_{i'l'}g^{(2)}_{\tau,l',k',i,k}C^{(2)}_{\tau,l',k',i,k}-$$

$$\sum_{l=1}^{d}B_{il}g^{(2)}_{\tau,l,k,i',k'}C^{(2)}_{\tau,l,k,i',k'}+\sum_{l,l'=1}^{d}B_{il}B_{i'l'}g^{(1)}_{\tau,l,k,l',k'}C^{(1)}_{\tau,l,k,l',k'}\Big)\left(G^{-1}\right)_{kj}\left(G^{-1}\right)_{k'j'}.$$

Следовательно, вектор, составленный из элементов матрицы $\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)$, распределен асимптотически нормально с нулевыми средними и ковариациями (7).

С л е д с т в и е 3. *В условиях следствия* 1 *при* $T\to\infty$ *вектор, составленный из элементов матрицы* $\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)$, *распределен асимптотически нормально с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями* $\left(i,j,i',j'\in\{1,\dots,d\}\right)$:

$$\mathbf{aCov}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)_{ij},\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)_{i'j'}\right\}=\sum_{k,k'=1}^{d}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\Big(g^{(4)}_{\tau,i,k,i',k'}-\sum_{l'=1}^{d}B_{i'l'}g^{(2)}_{\tau,l',k',i,k}-$$

$$\sum_{l=1}^{d}B_{il}g^{(2)}_{\tau,l,k,i',k'}+\sum_{l,l'=1}^{d}B_{il}B_{i'l'}g^{(1)}_{\tau,l,k,l',k'}\Big)\left(G^{-1}\right)_{kj}\left(G^{-1}\right)_{k'j'}.$$

С л е д с т в и е 4. *Пусть выполнены условия леммы* 3, П5, *и предельные характеристики шаблона не зависят от верхних и нижних индексов* $C^{(k)}_{\tau,i,j,i',j'}=C=\text{const}_{\bar{\tau},\bar{i},\bar{j},\bar{i'},\bar{j'},\bar{k}}$, $\tau\in\mathbf{Z}$, $i,j,i',j'\in\{1,\dots,d\}$, $k\in\{1,\dots,4\}$. *Тогда при* $T\to\infty$ *вектор, составленный из элементов матрицы* $\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)$, *распределен асимптотически нормально с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями* $\left(i,j,i',j'\in\{1,\dots,d\}\right)$: $\mathbf{aCov}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)_{ij},\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)_{i'j'}\right\}=C\Sigma_{ii'}\left(G^{-1}\right)_{jj'}$.

С л е д с т в и е 5. *В условиях следствия* 2 *при* $T\to\infty$ *нормированное случайное уклонение оценки* $\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)$ *распределено асимптотически нормально с нулевым средним и дисперсией*

$$\mathbf{aD}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{B}-B\right)\right\}=\frac{1}{\vartheta^{(1)}}\frac{1-B^4+4B^2}{1-B^2}+\frac{1}{\vartheta^{(0)}}\frac{2B^2\left(B^2-3\right)}{1-B^2}.$$

З а м е ч а н и е. При отсутствии «пропусков» $C=\vartheta^{(1)}=\vartheta^{(0)}=1$ и результаты следствий 4, 5 согласуются с результатами, полученными в [7].

Литература

1. G r e e n e W. H. Econometric Analysis. New York, 2000.
2. Л и т т л Р. Д. А., Р у б и н Д. Б. Статистический анализ данных с пропусками. М., 1991.
3. S h a f e r J. L. Analysis of incomplete data. London, 1997.
4. S t o c k i n g e r N., D u t t e r R. // Kybernetika. 1987. Vol. 23. P. 3–90.
5. J o n e s R. H. // Technometrics. 1980. Vol. 22, N 3. P. 389–395.
6. M a u r i c i o J. A. // J. of Time Series Analysis. 2002. Vol. 23, N 4. P. 473–486.
7. А н д е р с о н Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976.
8. M a e j i m a M. // KEIO Engineering Reports. 1978. Vol. 31, N 2. P. 15–20.
9. S h e r g i n V. V. // Lietuvos Matematikos Rinkinys. 1976. Vol. 16, N 4. P. 245–250.
10. Ш и р я е в А. Н. Вероятность. М., 1980.
11. Б а р н д о р ф-Н и л ь с е н О., К о к с Д. Асимптотические методы в математической статистике. М., 1999.

KHARIN Yu. S., HURYN A. S.

STATISTICAL ESTIMATORS OF PARAMETERS OF VECTOR AUTOREGRESSIVE TIME SERIES UNDER MISSING VALUES AND THEIR ASYMPTOTIC PROPERTIES

Summary

New estimators of parameters of vector autoregressive time series based on covariances are presented for the situation with missing values and their asymptotic properties are proved. Special cases of assumptions on the innovation process and on the so-called «pattern of missing values» are considered.