КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ЗАМКНУТОЙ КОЛЛАПСИРУЮЩЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

К. А. Веренич*, В. Л. Калашников, С. Л. Черкас**

В данной статье сравниваются два подхода к квантованию замкнутой Вселенной Фридмана. В первом подходе используется нормировка волновой функции Вселенной по Шредингеру, в то время как во втором подходе волновая функция Вселенной нормируется в стиле уравнения Клейна – Гордона, что позволяет построить зависящие от времени квазигейзенберговы операторы и находить их средние значения. Показано, что в последнем подходе вследствие квантово-механического описания среднее значение масштабного фактора Вселенной не коллапсирует до нуля, а в конце эволюции стремится к постоянному значению близкому к тому, что получается из первого подхода, в котором эволюция во времени вообще отсутствует.

Объединение квантовой механики и гравитации входит в число самых важных задач современности и является одним из аспектов развития теории струн [1]. Квантовая гравитация необходима для описания ранней Вселенной, поскольку считается, что на Планковских временах $\tau_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$ от «начала» Вселенная должна описываться квантово-механически. Впервые канонический формализм, включающий в себя волновую функцию Вселенной и ее конфигурационное пространство – суперпространство, был разработан более 40 лет назад [2, 3].

Сегодня, несмотря на успехи квантовой гравитации, по-прежнему остается множество проблем, таких как отсутствие времени, трактовка волновой функции Вселенной и построение Гильбертова пространства для физических состояний.

Для замкнутой Вселенной, кроме этого, возникает проблема коллапса: как известно, достаточно массивные тела сжимаются под действием сил гравитации, в результате чего их плотность неограниченно возрастает. То же самое относится к замкнутой Вселенной, заполненной каким-либо видом материи. Согласно общим ожиданиям, квантово-механическое описание должно снять проблему коллапса, однако окончательно устоявшегося ответа на данный вопрос пока нет. Напротив, можно отметить, что коллапс приводит к дополнительным трудностям при квантово-механическом описании, поскольку ассоциируется с потерей вероятности. Как будет видно далее, одним из способов избежать этого является допущение реколлапса, т. е. когда после коллапса система вновь начинает расширяться.

Рассмотрим решение двух проблем: проблемы времени и проблемы коллапса на примере квантово-механического описания замкнутой однородной изотропной Вселенной Фридмана в минисуперпространстве.

---

* Физический факультет БГУ.
** Институт Фотоники Венского технического университета, Австрия.

Эйнштейновское действие для гравитации и однокомпонентного вещественного скалярного поля (которое в данной модели представляет единственный вид материи) можно записать следующим образом:

$$S=-\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}R+\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\right)^2-V\left(\varphi\right)\right], \qquad (1)$$

где R – скалярная кривизна [4], $g = det|g^{\mu\nu}|$ определитель контравариантного метрического тензора, $V(\varphi)$ – потенциал самодействия скалярного поля [5], включающий в себя космологическую постоянную.

Ограничимся рассмотрением однородной изотропной Вселенной с метрикой:

$$ds^2=N^2(t)dt^2-a^2(t)d\sigma^2, \qquad (2)$$

где $N(t)$ – функция хода [6], описывающая свободу относительно выбора параметризации времени, $a(t)$ – масштабный фактор Вселенной (расстояние между любыми двумя точками растет со временем как $r(t)=r_0\cdot a(t)$, где r_0 задает некоторый масштаб расстояний).

Для ограниченной метрики (2) и замкнутой Вселенной действие принимает вид:

$$S=\int N(t)\left\{\frac{3}{8\pi G}\left(a-\frac{a\dot{a}^2}{N^2(t)}\right)+\frac{1}{2}a^3\frac{\dot{\varphi}^2}{N^2(t)}-a^3V(\varphi)\right\}dt. \qquad (3)$$

Это действие может быть получено из следующего выражения варьированием по p_a и p_φ

$$S=\int\left\{p_\varphi\dot{\varphi}-p_a\dot{a}-N\left(t\right)\left(-\frac{3a}{8\pi G}-\frac{8\pi Gp_a^2}{12a}+\frac{p_\varphi^2}{2a^3}+a^3V(\varphi)\right)\right\}dt, \qquad (4)$$

после чего импульсы, выраженные через скорости $p_\phi=\frac{1}{N\left(t\right)}\dot{\varphi}a^3$ и $p_a=\frac{3}{4\pi N\left(t\right)}a\,\dot{a}$ должны быть снова подставлены в (4).

Варьирование действия (4) по N(t) приводит к равенству нулю гамильтониана системы

$$H=-\frac{3a}{8\pi G}-\frac{8\pi Gp_a^2}{12a}+\frac{p_\varphi^2}{2a^3}+a^3V(\varphi)=0 \qquad (5)$$

на классических траекториях движения системы.

Чтобы перейти от классической теории к квантовой мы должны заменить классические импульсы соответствующими операторами, удовлетворяющими коммутационным соотношениям $\left[\hat{p}_\varphi,\hat{\varphi}\right]=-i$, $\left[\hat{p}_a,\hat{a}\right]=i$, что может быть реализовано с посредством $\hat{p}_\varphi=-i\partial/\partial\varphi$, $\hat{p}_a=i\partial/\partial a$.

Уравнение Де Витта – Уиллера $\hat{H}\psi=0$ [2, 3], где ψ – волновая функция Вселенной, является квантовым вариантом гамильтоновой связи $H=0$.

Как можно заметить, в гамильтониане (5) присутствуют некоммутирующие операторы p_a и $1/a$ и априори неясно, каким должно быть взаимное расположение операторов. Поскольку в данном случае мы хотим нормировать волновую функцию Вселенной в стиле Шредингера $\int_0^\infty da \int_{-\infty}^\infty d\varphi \psi^* \psi = 1$, то упорядочение операторов выбирается из соображений, чтобы волновая функция обращалась в ноль, когда масштабный фактор Вселенной равен нулю или бесконечности. Таким образом, уравнение Де Витта – Уиллера принимает вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{1}{a^3}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - a + a^3 V(\varphi)\right)\psi(a,\varphi) = 0, \qquad (6)$$

где приняты планковские единицы измерения $4\pi G/3=1$. Везде далее для простоты мы будем полагать $V(\varphi)=0$, что дает возможность записать решение уравнения (6) с помощью метода разделения переменных:

$$\psi_k(a,\varphi) = \sqrt{a}\, K_{\sqrt{1/16-k^2/4}}(a^2/2)\, e^{ik\varphi},$$

где $K_\lambda(z)$ – модифицированная функция Бесселя [7]. Наконец, нормированное решение уравнения (6) представляется в виде волнового пакета:

$$\psi(a,\varphi) = C\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(a,\varphi)\, c(k)\, dk\,,$$

где C – нормировочный множитель.

При малых a функция $\psi_k(a,\varphi)$ имеет асимптотику $\psi_k = a^{\frac{1-\sqrt{1-4k^2}}{2}} e^{ik\varphi}$ и обращается в ноль при $a = 0$ только если $k \neq 0$. Это означает, что для конструирования волновых пакетов должны использоваться $c(k)$ обращающиеся в ноль при $k=0$, например $c(k) = k^2 e^{-k^2}$. Как мы видим, в данной картине имеется полностью статическая Вселенная с некоторым распределением масштабного фактора и амплитуды скалярного поля. Этот парадоксальный вывод (при том, что в настоящее время мы живем в расширяющейся Вселенной) вызывает оживленные дискуссии [8, 9, 10]. Разумеется, временная эволюция также будет отсутствовать, если проводить рассмотрение в Гейзенберговой картине. Например, домножим уравнение (6) на a и будем рассматривать оператор $\hat{H} = \hat{H}^+ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - a^2\right)$ как гамильтониан системы. Несмотря на то что можно построить нетривиальные Гейзенберговы операторы $\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{A}e^{-i\hat{H}t}$, их средние значения не эволюционируют со временем. Действительно, для среднего значения производной имеем

$$\left\langle \psi \,|\, \dot{\hat{A}}(t)\psi \right\rangle = i\left\langle \psi \,|\left(\hat{H}\hat{A} - \hat{A}\hat{H}\right)\psi \right\rangle = \left\langle \psi \,|\, \hat{H}\hat{A}\psi \right\rangle =$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\hat{H}^+ \psi)^* (a,\varphi) \hat{A}\psi(a,\varphi)\, d\varphi da = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\hat{H}\ \psi(a,\varphi)\right)^* \hat{A}\psi(a,\varphi)\, d\varphi da = 0 \cdot$$

Существенным здесь является то, что мы можем перебрасывать содержащиеся в гамильтониане операторы дифференцирования налево с помощью интегрирования по частям, поскольку волновая функция обращается в ноль на пределах интегрирования.

Предположим теперь, что поскольку уравнение Де Витта – Уилера похоже на уравнение Клейна – Гордона, то волновая функция также должна быть нормирована в стиле Клейна – Гордона. В этом случае естественно выбирать упорядочение операторов в виде лапласиана

$$\left(\frac{1}{2a^2}\frac{\partial}{\partial a}a\frac{\partial}{\partial a} - \frac{1}{2a^3}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{a}{2}\right)\psi = 0\,, \tag{7}$$

так, чтобы асимптотика решения при малых a была подобна плоской волне: $\psi_k(a,\varphi)=a^{\pm i|k|}e^{ik\varphi}$. Нормировка решений в стиле Клейна – Гордона выглядит следующим образом [10, 11, 12]:

$$\langle\psi,\psi\rangle = ia\int (\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial a} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial a})\Big|_{a=0}\, d\varphi = 1,$$

где интегрирование ведется по переменной φ в плоскости $a = 0$. При этом функция ψ должна быть построена в виде волнового пакета из отрицательно-частотных решений $\sim a^{-i|k|}e^{ik\varphi}$:

$$\psi(a,\varphi) = \int \psi_k(a,\varphi)c(k)dk \cdot \tag{8}$$

Поскольку теперь волновая функция неограничена по a, то отсутствие временной эволюции в Гейзенберговой картине не может быть доказано вышеупомянутым способом, что дает возможность предположить существование некоторой зависящей от времени картины (подобной картине Гейзенберга), которая соответствует нормировке волновой функции в стиле Клейна – Гордона. Такая картина, состоящая в квантовании уравнений движения, предложена в [11, 12], где постулируются дираковские коммутационные соотношения для квазигейзенберговых операторов в начальный момент времени $t = 0$. Согласно [11, 12], операторные уравнения движения

$$\ddot{\hat{a}} = -\frac{\dot{\hat{a}}^2}{2\hat{a}} - \frac{3\hat{p}_\varphi^2}{2\hat{a}^3} - \frac{1}{2\hat{a}}, \quad \dot{\hat{a}} = \frac{\hat{p}_a}{\hat{a}}, \quad \dot{\hat{\varphi}} = \frac{\hat{p}_\varphi}{\hat{a}^3}, \quad \dot{\hat{p}}_\varphi = 0. \tag{9}$$

должны быть решены с начальными условиями, удовлетворяющими гамильтоновой связи $-\frac{(\hat{p}_a(0))^2}{2\hat{a}(0)} + \frac{(\hat{p}_\varphi(0))^2}{2(\hat{a}(0))^3} + \frac{\hat{a}(0)}{2} = 0$:

$$\hat{a}(0) = const = a, \quad \hat{\varphi}(0) = \varphi, \quad \hat{p}_a(0) = \frac{|\hat{p}_\varphi|}{a}, \quad \hat{p}_\varphi(0) = \hat{p}_\varphi,$$

где $\ddot{p}_\phi = -i\partial/\partial\varphi$. Решение уравнений движения удобнее всего искать в импульсном представлении переменной φ, где $\hat{p}_\varphi = k$, $\hat{\varphi} = i\dfrac{\partial}{\partial k}$. Окончательно, если положить $\hat{a}(0) = const = 0$, то решение уравнений движения (9) для $\hat{a}(t)$ находится в параметрической форме:

$$\begin{aligned} a(\eta,k) &= k^{1/2}\sqrt[4]{\frac{\left(1-\cos(4\eta)\right)}{2}}, \\ t(\eta,k) &= 2^{-\frac{9}{4}}\sqrt{k}\int\limits_0^{4\eta}\left(1-\cos(\xi)\right)^{\frac{1}{4}}d\xi. \end{aligned} \tag{10}$$

В импульсном представлении формула для вычисления средних значений операторов [11, 12], выведенная из нормировки волновой функции Вселенной в стиле Клейна – Гордона, выглядит подобно обычной квантовой механике:

$$\left\langle \hat{A}(t)\right\rangle = \int a^{i|k|}c^*(k)\hat{A}(k,a,t)a^{-i|k|}c(k)\big|_{a\to 0}\,dk\,. \tag{11}$$

С помощью (10), (11) мы можем вычислить среднее значение масштабного фактора Вселенной и его дисперсию, например, для состояния Вселенной, задаваемого волновым пакетом $c(k) = k^2e^{-k^2}$.

Результаты расчета представлены на рис. 1. Как мы видим, среднее значение масштабного фактора после стадии расширения начинает уменьшаться на стадии коллапса. Однако из графика видно, что он не обращается в нуль. Последующий коллапс имеет меньшую амплитуду и в конце концов эволюция масштабного фактора затухает. Интересно, что асимптотическое значение, к которому приходит масштабный фактор, близко к значению, найденному в полностью статической Шредингеровской картине (в расчетах использовался один и тот же волновой пакет).

Отметим, что в нашей модельной задаче эволюция Вселенной заканчивается на планковских временах. В принципе расширение может быть увеличено, если задать волновой пакет с большей кинетической энергией, однако в настоящее время считается, что экспоненциальное расширение Вселенной возникает из-за потенциала скалярного поля. Согласно [5], существует множество Вселенных, в которых начальное значение скалярного поля распределено некоторым образом. То есть Вселенные, в которых величина поля достаточна для быстрого расширения (инфляции), эволюционируют подобно нашей Вселенной, в то время как Вселенные с малым значением скалярного поля коллапсируют. В этом смысле можно считать, что данная работа описывает судьбу таких «неразвившихся» Вселенных, которые после нескольких коллапсов и реколлапсов переходят в статическое состояние, которое можно трактовать как исчезновение времени.

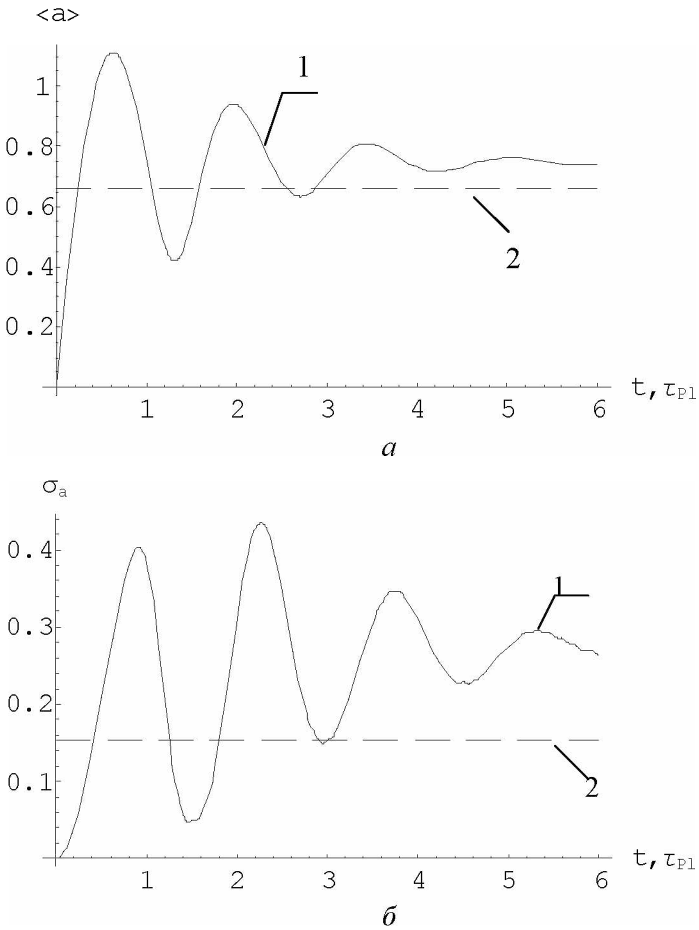

Рис. 1. Эволюция <$a(t)$>, рассчитанная в квазигейзенберговой картине для волновой функции, нормированной по Клейну – Гордону (1) с $c(k) = k^2 e^{-k^2}$ (*а*). Штрихами показано значение <a> для волновой функции, нормированной по Шрёдингеру (2). То же самое для эволюции дисперсии масштабного фактора (*б*)

Для описания реальной Вселенной необходимо квантовое рассмотрение инфляции, т. е. потенциала скалярного поля (напомним, что в данной работе потенциал скалярного поля полагался равным нулю). Решение операторных уравнений движения в этом случае сильно усложнится. Однако, кроме этого, имеется также принципиальная проблема. Согласно [11], на временах $t \sim 1/m$, во время рождения частиц материи (подразумевается, что их характерная масса m) происходит процесс «самоизмерения», когда масштабный фактор проецируется к разным значениям в разных пространственных областях, дальнейшую эволюцию которых можно описывать классически. Современная Вселенная представляет собой одну из таких расширившихся областей. Проблема состоит в том, что для описания процесса «самоизмерения» пространственно однородной модели недостаточно.

Таким образом, в квазигейзенберговой картине мы описали квантовую эволюцию однородной замкнутой Вселенной, состоящую в постепенном затухании коллапсов, причем среднее значение масштабного фактора не обращается в ноль.

Интересно отметить также появление стрелы времени (см. в этой связи [13]) в квазигейзенберговой картине замкнутой Вселенной, направленной в сторону затухания эволюции и стремления к статическому миру. Данная стрела времени возникла как результат соединения гравитации и квантовой механики. Напомним, что в эволюции классической замкнутой Вселенной стрела времени отсутствует, поскольку коллапсы и реколлапсы симметричны относительно замены t на $-t$. Стрела времени также отсутствует и в квантовой механике, т. е. в уравнении Шредингера, поскольку после замены t на $-t$ и комплексного сопряжения уравнение Шредингера переходит само в себя[1].

Литература

1. *Каку М.* Введение в теорию суперструн. 1991. С. 6.
2. *Wheeler J. A. //* Battelle Recontres. 1968. P. 242.
3. *DeWitt B. S.* // Phys. Rev. 1967. Vol. 160. P. 1113.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. 1988. С. 339.
5. *Линде А. Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. 1990. С. 57.
6. *Альтшулер Б. Л. , Барвинский А. О.* // УФН. 1996. Т. 166. С. 490.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы рядов интегралов и сумм. 1962. С. 965.
8. *Vilenkin A.* // Phys. Rev. 1989. Vol. 39. P. 1116.
9. *Isham C. J., Butterfeld J.* // arXiv: gr-qc/9901024.
10. *Shestakova T. P., Simeone C.* // Grav. Cosmol. 2004. Vol. 10. P. 161; ibid. 2004. Vol. 10. P. 257.
11. *Cherkas S. L., Kalashnikov V. L.* // arXiv: gr-qc/0512107.
12. *Cherkas S. L., Kalashnikov V. L.*// Grav. Cosmol. 2006. Vol. 12. P. 126.
13. *Kiefer C., Zeh H. D.* // Phys. Rev. D. 1995. Vol. 51. P. 4145.

QUANTUM MECHANICS OF A CLOSED COLLAPSING UNIVERSE

K. A. Verenich*, V. L. Kalashnikov, S. L. Cherkas**

Two approaches to the quantization of the minisuperspace model of a closed Friedman Universe are compared. In the first one Schrödinger normalization of the wave function of the Universe is used, and in the second one the wave function of the Universe is normalized in the style of the Klein-Gordon equation.

The last approach allows construction of the time-dependent quasi-Heisenberg operators and finding their mean values. It is shown that in this quasi-Heisenberg picture mean value of the Universe scale factor does not collapse to zero, and, besides tends to some constant value at the end of the Universe evolution. It is interesting to note that this value is close to that obtained in the first approach where any evolution in time is absent.

---

[1] Следует отметить, что стрелу времени необязательно соотносить с (не-) инвариантностью уравнений относительно $t \to -t$. В статистической физике и нелинейной динамике достаточно общие начальные условия дают вполне характерную асимптотику во времени, что также можно назвать стрелой времени.

* Department of Physics, Belarusian State University.
** Institute of Photonics, Technical University of Wien, Austria.