

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ОБЪЕМНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО–ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

К. Г. Батраков

В последние десятилетия наблюдается бурный прогресс в развитии ЛСЭ. В настоящее время экспериментально получена генерация в диапазоне от ультрафиолетового до далекого инфракрасного. Ведется разработка и создание промышленных ЛСЭ для химической промышленности, обработки поверхностей, спектрометрических исследований, обеспечения связи и ряда других применений. С другой стороны, в электронике за последние 50 лет были разработаны источники излучения в диапазоне длин волн от километров до миллиметров. В последнее время все более остро встают вопросы создания перестраиваемого в широком спектральном диапазоне источника когерентного излучения и ЛСЭ с высокой выходной мощностью (до десятка гигаватт). С нашей точки зрения, оптимальным для достижения этих целей является использование неустойчивости электронного пучка в условиях многоволновой объемной распределенной обратной связи (ОРОС). Перспективным выглядит развитие нового типа ЛСЭ – объемного лазера на свободных электронах (ОЛСЭ) [1] на основе такой неустойчивости. Объемная распределенная обратная связь в ОЛСЭ предоставляет дополнительные геометрические степени свободы, регулируя которые можно плавно перестраивать частоту генерации. Использование ОЛСЭ позволяет распределить выходную мощность излучения по большему объему, что решает проблему электрической прочности генератора и стойкости выводных окон. Идея использования ОРОС в ЛСЭ явилась логическим продолжением работ по обнаружению параметрического (квазичеренковского) рентгеновского излучения [2], предсказанного до этого теоретически в работах [3, 4]. Было показано, что в условиях динамической дифракции, происходящей в объемной пространственно-периодической структуре, возникают особые области параметров, соответствующие вырождению собственных значений электромагнитных мод и приводящие к новым закономерностям в развитии неустойчивости электронного пучка. В этих областях взаимодействие электронного пучка с электромагнитной волной происходит более эффективно и эффективность генерации увеличивается с увеличением количества волн, принимающих участие во взаимодействии с электронным пучком [5, 6]. Эффект имеет общий характер и проявляется при различных механизмах генерации в условиях объемной многоволновой дифракции (квазичеренковский [7, 8], излучение осциллятора [9]). При объемной многоволновой геометрии стартовый ток генерации уменьшается с увеличением количества участвующих во взаимодействии волн. Таким образом, при одном и том же токе электронного пучка за счет объемной геометрии можно уменьшить область взаимодействия, что приведет к компактизации системы. Принципы объемной распределенной связи имеют универсальный характер, независимо от спектрального диапазона. В работах [10, 11] применение ОРОС было исследовано в диапазоне спектра от инфракрасного до ультрафиолетового. Было показано,

что и при этих длинах волн объемная распределенная связь обладает преимуществами как в режиме работы усилителя, так и в генераторном режиме. Многообещающей выглядит перспектива использования ОРОС в диапазонах, традиционных для электроники СВЧ. В [12] исследовался ОЛСЭ с трехмерной ОРОС, работающий в миллиметровом диапазоне. «Холодный» эксперимент подтвердил перспективность использования трехмерной связи: была получена чрезвычайно высокая добротность объемного резонатора при параметрах, соответствующих условиям динамической дифракции [12]. Применение внешних брэгговских резонаторов приводит к дальнейшему уменьшению стартового тока и улучшению характеристик ОЛСЭ [13]. Вслед за работами [3–10] исследования по применению двумерной распределенной связи в миллиметровом диапазоне начиная с 90-х гг. проводились также нижегородской группой [14–16]. В этих работах рассматривается один из аспектов преимущества двумерной распределенной связи – синхронизация генерации в поперечном направлении для широкого ленточного электронного пучка (или кольцевого пучка большого радиуса). На наш взгляд, переход к ОЛСЭ и ОРОС в этом диапазоне имеет те же преимущества, что и в других диапазонах: 1) уменьшает стартовые токи и размеры излучателей; 2) позволяет плавно изменять частоту излучения; 3) эффективно осуществляет селекцию мод в сверхразмерных системах, так как выбором условий многоволновой дифракции можно жестко закрепить геометрию генерации.

Данная работа посвящена некоторым теоретическим аспектам развития неустойчивости в условиях ОРОС.

Дисперсионное уравнение неустойчивости электронного пучка

Одним из методов исследования процессов взаимодействия электромагнитного излучения с электронным пучком является метод дисперсионных уравнений. В общем случае многоволновой динамической дифракции дисперсионное уравнение, описывающее неустойчивость пучка в бесконечной пространственно-периодической среде, имеет следующий вид [7]:

$$\begin{vmatrix} D_{\sigma}^{(1)} & -\omega^2 \chi_1 & D_{\sigma\pi}^{(1)} & 0 & -\omega^2 (\vec{e}_{\sigma 1} \vec{e}_{\sigma 2}) \chi_2 \dots \\ -\omega^2 \chi_{-1} & D_{\sigma}^{(1)\tau} & 0 & D_{\sigma\pi}^{(1)\tau} & -\omega^2 (\vec{e}_{\pi 1} \vec{e}_{\pi 2}) \chi_2 \dots \\ D_{\sigma\pi}^{(1)} & 0 & D_{\pi}^{(1)} & -\omega^2 \chi_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

где $D_{\sigma}^{(i)} = k^{(i)2} c^2 - \omega^2 \varepsilon_0^{(i)} + \frac{\omega_i^2}{\gamma} + \Gamma_{\sigma}^{(i)} ((\vec{k}^{(i)} - \vec{k}_o)^2 c^2 - (\omega - \omega_o)^2)$;

$D_{\sigma\pi}^{(i)} = \Gamma_{\sigma\pi}^{(i)} \{ (\vec{k}^{(i)} - \vec{k}_o)^2 c^2 - (\omega - \omega_o)^2 \}$; $\omega_i^2 = 4\pi e^2 n_e / m_e$ – квадрат лангмюровской частоты; γ – лоренц-фактор; n_e – плотность электронного пучка; ω – частота излучения; $\vec{k}^{(i)} = \vec{k} + \vec{\tau}_i$, $\vec{\tau}_i$ ($i = 1 \div n$) – векторы обратной решетки периодической структуры;

$$\Gamma_{\sigma,\sigma\pi}^{(i)} = \begin{cases} \frac{\omega_l^2}{\gamma} \frac{\Omega_{\sigma,\sigma\pi}^{(i)}}{(\omega - \vec{k}^{(i)}\vec{u} - \omega_o)^2 - \frac{\hbar^2 \{(\vec{k}^{(i)} + \vec{k}_o)^2 c^2 - (\omega - \omega_o)^2\}}{4m^2 c^2 \gamma^2}}, \\ \sqrt{\pi} \frac{\omega_l^2}{\gamma} \frac{\Omega_{\sigma,\sigma\pi}^{(i)}}{\delta_0^{(i)}} x^{(i)} \exp(-x^{(i)2}). \end{cases} \quad (2)$$

Первая формула справедлива в случае «холодного» электронного пучка, вторая – в случае «горячего» электронного пучка. Величины ω_o , \vec{k}_o , $\Omega_{\sigma,\sigma\pi}^{(i)}$ в (2) определяются механизмом генерации. Для квазичеренковского случая $\omega_o = 0$, $\vec{k}_o = 0$, $\Omega_{\sigma}^{(i)} = \frac{(\vec{u}\vec{e}_{\sigma}^{(i)})^2}{c^2}$, $\Omega_{\sigma\pi}^{(i)} = \frac{(\vec{u}\vec{e}_{\sigma}^{(i)})(\vec{u}\vec{e}_{\pi}^{(i)})}{c^2}$, $x^{(i)} = \frac{\omega - \vec{k}\vec{u} - \omega_o}{\sqrt{2}\delta_0}$. Для конкрет-

ности в дальнейшем будем рассматривать квазичеренковскую неустойчивость. Однако большинство полученных выражений будут справедливы для любого другого механизма излучения путем элементарной модификации выражения для Ω .

В отсутствие электронного пучка (1) переходит в обычное уравнение, описывающее процесс многоволновой динамической дифракции в пространственно-периодической среде [17]:

$$D^{(n)}(\vec{k}^{(1)}, \vec{k}^{(2)}, \dots, \vec{k}^{(n)}) = 0. \quad (3)$$

С учетом электронной составляющей дисперсионное уравнение, описывающее процесс взаимодействия системы «электронный пучок + излучение + периодическая среда», получается из уравнения (3) путем удлинения в $D^{(n)}(\vec{k}^{(1)}, \vec{k}^{(2)}, \dots, \vec{k}^{(n)})$ слагаемых

$k_i^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0^{(i)}$ до $k_i^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0^{(i)} + \frac{\omega_l^2}{\gamma} + \Gamma_i \{(\vec{k} + \vec{k}_o)^2 c^2 - (\omega - \omega_o)^2\}$, которые

включают в себя вклады в диэлектрическую проницаемость, обусловленные взаимодействием электронного пучка с электромагнитной волной. В качестве примера приведем дисперсионное уравнение для σ -поляризованной волны в двухволновом случае:

$$\begin{aligned} & \left(k^{(1)2} c^2 - \omega^2 \varepsilon_0^{(1)} + \omega_l^2 / \gamma + \Gamma_{\sigma}^{(1)} (k^{(1)2} c^2 - \omega^2) \right) \times \\ & \times \left(k^{(2)2} c^2 - \omega^2 \varepsilon_0^{(2)} + \omega_l^2 / \gamma + \Gamma_{\sigma}^{(2)} (k^{(2)2} c^2 - \omega^2) \right) - \omega^4 \chi_{\tau} \chi_{-\tau} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения для $\Gamma_{\sigma}^{(i)}$ в (2) приведены для двух предельных случаев. 1) В режиме «холодного» электронного пучка электроны имеют одну скорость, или разброс по скоростям мал ($\frac{\vec{k}\Delta\vec{u}}{\Delta\omega} \ll 1$, где $\Delta\vec{u}$ – тепловой разброс электронного пучка по скоростям, $\Delta\omega$ – ширина линии излучения). Поэтому все электроны принимают участие во взаимодействии с электромагнитной волной. 2) В режиме «горячего» электронного пучка выполняется неравенство $\frac{\vec{k}\Delta\vec{u}}{\Delta\omega} \geq 1$, при этом

только часть пучка взаимодействует с электромагнитной волной.

В рамках рассматриваемых режимов можно провести дополнительную классификацию. Особое положение занимает область параметров, при которых на процесс генерации существенное влияние оказывает квантовая отдача электрона. Казалось бы, условием классичности процессов индуцированного черенковского (квазичеренковского) излучения является малость энергии фотона по сравнению с энергией электрона. Однако нетрудно показать, что это условие является недостаточным и квантовые эффекты могут оказывать существенное влияние на процесс генерации индуцированного излучения даже при выполнении условия $\frac{\hbar\omega}{E} \ll 1$. Чтобы продемонстрировать это утверждение, выпишем законы сохранения импульса и энергии для процессов испускания и поглощения фотона электроном:

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= \vec{p} \mp \hbar\vec{k}, \\ E_{\vec{p}_1} &= E_{\vec{p}} \mp \hbar\omega.\end{aligned}\quad (5)$$

Подставив значение \vec{p}_1 из первого уравнения (5) во второе и учитывая связь между энергией и импульсом частицы, получим условия синхронизма в виде

$$\omega - \vec{k}\vec{u} \pm \frac{\hbar(k^2c^2 - (\vec{k}\vec{u})^2)}{2E_{\vec{p}}} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, из (6) следует, что процесс излучения может иметь квантовый характер даже при выполнении условия $\hbar\omega / E_{\vec{p}} \ll 1$. Это происходит, если квантовая отдача превышает ширину линии излучения. В таких условиях центр в спектре линии излучения и центр в спектре поглощения отделены друг от друга. Поэтому процесс излучения не подавляется поглощением фотонов. Как результат, генерация в таком режиме развивается наиболее интенсивно.

Режимы неустойчивости и генерации ОЛСЭ

Несмотря на наличие решений $k_z(\omega)$ дисперсионного уравнения с отрицательными мнимыми частями, возможны различные варианты развития неустойчивости (вплоть до ее отсутствия). Напомним основные элементы теории неустойчивости, справедливые в случае бесконечной однородной среды [18]. Обозначим через $k_z^{(+)}(\omega)$ корни дисперсионного уравнения с асимптотическим поведением $\lim_{\text{Im}\omega \rightarrow +\infty} \text{Im}k_z^{(+)}(\omega) \rightarrow +\infty$, а через $k_z^{(-)}(\omega)$ – с асимптотикой

$\lim_{\text{Im}\omega \rightarrow +\infty} \text{Im}k_z^{(-)}(\omega) \rightarrow -\infty$. Неустойчивость развивается, если найдется хотя бы

один корень с поведением $\text{Im}k_z^{(+)}(\omega)|_{\text{Im}\omega=0} < 0$ или $\text{Im}k_z^{(-)}(\omega)|_{\text{Im}\omega=0} > 0$. В зависимости от величины параметров неустойчивость может иметь различный характер. При конвективной неустойчивости начальное возмущение не растет в каждой точке со временем, а сносится вдоль оси z . В этом случае может возникнуть стационарный режим, при котором заданное в некотором сечении оси

возмущение физических величин растет в положительном направлении z (при $\text{Im } k_z^{(+)}(\omega)|_{\text{Im } \omega=0} < 0$) или в отрицательном направлении ($\text{Im } k_z^{(-)}(\omega)|_{\text{Im } \omega=0} > 0$).

Если для каких-либо дисперсионных ветвей уравнение

$$k_z^{(-)}(\omega) = k_z^{(+)}(\omega) \quad (7)$$

имеет решение в комплексной области частот с $\text{Im } \omega > 0$, то реализуется абсолютная неустойчивость, при которой начальное возмущение растет во времени. В случае больших, но конечных размеров системы ($|\text{Im } k|L \gg 1$) условие на развитие неустойчивости видоизменяется – абсолютная неустойчивость возникает, если уравнение

$$\text{Im } k_z^{(-)}(\omega) = \text{Im } k_z^{(+)}(\omega) \quad (8)$$

имеет решение с положительным знаком мнимой части $\text{Im } \omega > 0$ (во всех рассуждениях, приведенных выше, считается, что возмущение развивается по закону $\sim \exp(-i\omega t + ik_z z)$). Физическая причина изменения условия развития неустойчивости (7) на (8) в случае конечной системы заключается в появлении эффекта отражения волн от границ. Ниже будет показано, что аналогичное условие на развитие абсолютной неустойчивости возникает и для пространственно-периодической среды. В этом случае отражение происходит на плоскостях, образующих пространственно-периодическую структуру.

Проиллюстрируем вышесказанное на примере параметрической неустойчивости «горячего» электронного пучка в пространственно-периодической среде. В случае двухволновой динамической дифракции дисперсионное уравнение (4), описывающее неустойчивость электронного пучка, сводится к виду

$$\left(k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0 + i\omega^2 G^{(t)}\right) \left(k_z^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0\right) - \omega^4 \chi_\tau \chi_{-\tau} = 0. \quad (9)$$

Здесь $G^{(t)} = -\frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} \frac{\omega_i^2}{\omega^2} \frac{(\bar{u}\bar{e})^2}{u^2} \frac{k^2 c^2 - \omega^2}{\delta_0^2} x^{(t)} \exp(-x^{(t)2})$; $\delta_0^2 = k_x^2 \psi_x^2 + k_y^2 \psi_y^2 + k_z^2 \psi_z^2$;

$x^{(t)} = (\omega - \bar{k}\bar{u})/(\sqrt{2}\delta_0)$. При получении уравнения (9) считается, что черенковскому условию удовлетворяет только волновой вектор \bar{k} , а дифрагированная волна не удовлетворяет этому условию. Перепишем (9) в виде

$$\begin{aligned} & \left(k_z - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0 - iG^{(t)}) - k_\perp^2}\right) \left(k_z + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0 - iG^{(t)}) - k_\perp^2}\right) \times \\ & \quad \times \left(k_z + \tau_z - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0 - iG^{(t)}) - (\bar{k}_\perp + \bar{\tau}_\perp)^2}\right) \times \\ & \quad \times \left(k_z + \tau_z + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0 - iG^{(t)}) - (\bar{k}_\perp + \bar{\tau}_\perp)^2}\right) - \frac{\omega^4}{c^4} \chi_\tau \chi_{-\tau} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В области брэгговской дифракции уравнение (10) можно приближенно переписать как

$$(k_z - k_{1z}^{(0)})(k_z - k_{2z}^{(0)}) - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{r}{4\gamma_0\gamma_1\varepsilon_0} = 0. \quad (11)$$

В уравнении (11)

$$k_{1z}^{(0)} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0 - iG^{(t)}) - k_{\perp}^2}, \quad r = \chi_{\tau}\chi_{-\tau}.$$

$$k_{2z}^{(0)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0 - iG^{(t)}) - (\bar{k}_{\perp} + \bar{\tau}_{\perp})^2 - \tau_z} & \text{— в геометрии Лауэ,} \\ -\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0 - iG^{(t)}) - (\bar{k}_{\perp} + \bar{\tau}_{\perp})^2 - \tau_z} & \text{— в геометрии Брэгга.} \end{cases}$$

Решение уравнения (9) в этих обозначениях имеет следующий вид:

$$k_{z1,2} = \frac{k_{z1}^{(0)} + k_{z2}^{(0)}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_{z1}^{(0)} - k_{z2}^{(0)}}{2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{r}{4\gamma_0\gamma_1\varepsilon_0}}. \quad (12)$$

Нетрудно убедиться, что в случае геометрии Лауэ (косинусы углов, образуемые волновыми векторами с осью z, $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$) обе ветви решений относятся к типу $k_z^{(+)}(\omega)$ (при этом учитывается асимптотическое поведение величин $r(\omega \rightarrow \infty) = 0$ и $\varepsilon_0(\omega \rightarrow \infty) = 1$). Таким образом, в геометрии Лауэ речь может идти лишь о конвективной неустойчивости, при которой возмущение сносится в положительном направлении оси z. Инкремент усиления в этом случае равен:

$$\text{Im } k_{z1,2} = -\frac{k}{4\sqrt{\varepsilon_0}\gamma_0} \left\{ G_{1,2}^{(t)} \left(1 \pm \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)}} \right) - \chi_0'' \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \beta \pm \frac{\zeta(1-\beta)}{\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)}} \pm \frac{\beta\omega}{2c} \frac{r''}{\sqrt{\varepsilon_0}\chi_0''\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)}} \right] \right\}. \quad (13)$$

В уравнении (13) $\zeta = \frac{k_{z1}^{(0)} - k_{z2}^{(0)}}{2}$, $\varepsilon'_0 = \text{Re } \varepsilon_0$, $r' = \text{Re } r$, $r'' = \text{Im } r$,

$\chi_0'' = \text{Im } \chi_0$, $\beta = \frac{\gamma_0}{\gamma_1}$ — фактор асимметрии дифракции. Усиление имеет место,

когда хотя бы один корень дисперсионного уравнения содержит мнимую часть (13) с отрицательным знаком.

Более интересная ситуация возникает в геометрии Брэгга, когда волновые векторы прямой и дифрагированной волн имеют разный знак проекции на направление оси z ($\gamma_0\gamma_1 < 0$). В этом случае решение (12) со знаком «+» перед

квадратным корнем относится к типу $k_z^{(+)}(\omega)$, а со знаком «-» – к типу $k_z^{(-)}(\omega)$ (квадратные корни $\sqrt{\quad}$ понимаем в арифметическом смысле). Отсюда следует, что в брэгговской геометрии дифракции при определенных условиях становится возможным развитие абсолютной неустойчивости. Определим значение временного инкремента в области, далекой от вырождения. Производя в уравнении (8) разложение по малым параметрам $\omega\chi_0''/(c\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)})$ и $\omega''/(c\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)})$, получим:

$$\omega'' = \frac{\omega}{4(1-\beta)} \left\{ G_1^{(+)} + G_2^{(+)} + \frac{\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)}}{\zeta} (G_1^{(+)} - G_2^{(+)}) \right\} - \frac{\omega}{4} \chi_0'' \left\{ 1 + \frac{\beta\omega r''}{c(1-\beta)\zeta\sqrt{\varepsilon_0} |\chi_\tau|} \right\}. \quad (14)$$

Так как выражение (14) справедливо вдали от вырождения корней, то в синхронизме с электронным пучком находится только одна из двух волн. При этом на ζ накладывается условие

$$\zeta = \frac{\gamma_0}{2su_z} \left(\beta \frac{\omega^2}{4c^2 \varepsilon'_0} \frac{u_z^2}{\gamma_0^2} r' - s^2 \right), \quad (15)$$

где $s = \omega - \bar{k}_\perp \bar{u}_\perp - k_{z1}^{(0)} u_z$. Если величина параметра

$$f = \frac{\gamma_0}{2su_z} \left(\beta \frac{\omega^2}{4c^2 \varepsilon'_0} \frac{u_z^2}{\gamma_0^2} r' + s^2 \right) \quad (16)$$

больше нуля ($f > 0$), то условию синхронизма удовлетворяет волна с волновым числом k_{z1} и генерация излучения происходит на попутной волне (режим ЛБВ – лампы бегущей волны). В противоположном случае ($f < 0$) черенковскому синхронизму отвечает волна с волновым вектором k_{z2} и генерация осуществляется на встречной волне (режим ЛОВ – лампы обратной волны). Для этих двух физически различных случаев неустойчивость описывается инкрементами: при $f > 0$

$$\omega'' = \frac{\omega}{4(1-\beta)} \left\{ G_1^{(+)} \left(1 + \frac{\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)}}{\zeta} \right) \right\} - \frac{\omega}{4} \chi_0'' \left\{ 1 + \frac{\beta\omega r''}{c(1-\beta)\zeta\sqrt{\varepsilon_0} |\chi_\tau|} \right\}, \quad (17a)$$

при $f < 0$

$$\omega'' = \frac{\omega}{4(1-\beta)} \left\{ G_2^{(+)} \left(1 - \frac{\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)}}{\zeta} \right) \right\} - \frac{\omega}{4} \chi_0'' \left\{ 1 + \frac{\beta\omega r''}{c(1-\beta)\zeta\sqrt{\varepsilon_0} |\chi_\tau|} \right\}. \quad (17b)$$

Если параметры пучка и мишени таковы, что $\omega'' < 0$, то абсолютная неустойчивость отсутствует. При этом возможен режим стационарного усиления: для $f > 0$

$$\text{Im } k_{z1} = -\frac{k}{4\sqrt{\varepsilon_0}\gamma_0} \left\{ G_1^{(t)} \left(1 + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)}} \right) - \chi_0'' \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \beta + \frac{\zeta(1-\beta)}{\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)}} + \frac{\beta\omega}{2c} \frac{r''}{\sqrt{\varepsilon_0}\chi_0''\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)}} \right] \right\}, \quad (18a)$$

для $f < 0$

$$\text{Im } k_{z2} = -\frac{k}{4\sqrt{\varepsilon_0}\gamma_0} \left\{ G_2^{(t)} \left(1 - \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)}} \right) - \chi_0'' \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \beta - \frac{\zeta(1-\beta)}{\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)}} - \frac{\beta\omega}{2c} \frac{r''}{\sqrt{\varepsilon_0}\chi_0''\sqrt{\zeta^2 + \beta\omega^2 r'/(c^2 \varepsilon'_0)}} \right] \right\}. \quad (18b)$$

При $f > 0$ и $\text{Im } k_{z1} < 0$ усиление происходит на попутной волне в положительном направлении оси z . При $f < 0$ и $\text{Im } k_{z2} > 0$ имеет место усиление на встречной волне в отрицательном направлении оси z . Если $\text{Im } k_{z1} > 0$ и $\text{Im } k_{z2} < 0$, то развития неустойчивости не происходит.

Исследуем теперь вопрос о характере неустойчивости в точке вырождения корней дифракционного вырождения ($f = 0$). Этой области отвечает режим генерации, являющийся промежуточным между усилением на попутной и встречной волнах (режим ЛОВ–ЛБВ). В области вырождения корней параметр, описывающий отстройку от условий дифракции, равен $\zeta = \omega\sqrt{-\beta r'}/(2c\sqrt{\varepsilon_0})$. В области вырождения из уравнения (6) получается значение инкремента:

$$\omega'' = \frac{\omega}{2(1-\beta)} \left(G^{(t)} - \chi_0''(1-\beta) \pm \sqrt{-\frac{\beta}{r'}r''} \right). \quad (19)$$

Если абсолютная неустойчивость не развивается ($\omega'' < 0$), для проверки возможности возникновения конвективной неустойчивости выпишем значения мнимых частей корней дисперсионного уравнения в точке вырождения дифракционных корней:

$$\text{Im } k_{z1,2} = \frac{k}{4\sqrt{\varepsilon_0}\gamma_0} \left\{ \chi_0''(1+\beta) - G^{(t)} \pm \sqrt{\sqrt{-\beta r'} \left(\chi_0''(1-\beta) \mp \sqrt{-\frac{\beta}{r'}r''} - G^{(t)} \right)} \right\}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что в случае, когда параметры таковы, что система находится в подпороговой области вблизи выполнения пороговых условий, функ-

циональная зависимость инкремента от плотности электронов имеет вид, аналогичный функциональной зависимости от плотности пучка в области, далекой от вырождения. Если же система находится в области, далекой от порога, то знак мнимой части определяется знаком квадратного корня в выражении (20), при этом $\text{Im}k_{z1} > 0$ и $\text{Im}k_{z2} < 0$. Таким образом, конвективная неустойчивость в данном случае отсутствует и в этой области параметров реализуется режим непропускания.

При вырождении корней излучение сильнее задерживается в области взаимодействия и, как будет показано ниже, при определенных условиях это положительно сказывается на условиях генерации. Одной из причин сильной задержки излучения при вырождении корней в геометрии Брэгга является возможность существенного уменьшения групповой скорости волны:

$$v_{grz} \cong \frac{2\gamma_0 c}{\sqrt{\varepsilon_0} \left(1 + \beta \pm (1 - \beta) \zeta / \sqrt{\zeta^2 + \beta \omega^2 r' / (4c^2 \varepsilon_0)} \right)}. \quad (21)$$

Из (21) следует, что в точках вырождения групповая скорость стремится к нулю $v_{grz} \xrightarrow{\zeta \rightarrow \pm \sqrt{-\beta r' / (2\sqrt{\varepsilon_0})}} 0$. Выше анализ характера неустойчивости был проведен на основании исследования асимптотического поведения корней $k_z(\omega)$ в комплексной области частот. В литературе, посвященной исследованию различных типов неустойчивости, часто используется менее строгий, но более физически наглядный способ анализа, основанный на определении направления групповой скорости волны относительно оси z . В рассмотренном выше случае брэгговской геометрии волна с волновым числом k_{z1} имеет групповую скорость $v_{grz} > 0$, соответственно эта волна распространяется в положительном направлении оси z . Волна с волновым числом k_{z2} распространяется в положительном направлении ($v_{grz} > 0$) при геометрии дифракции типа Лауэ и в отрицательном направлении ($v_{grz} < 0$) при геометрии дифракции типа Брэгга. В этих терминах критерий существования конвективной неустойчивости выглядит следующим образом:

$$v_{grz} \text{Im}k_z(\omega) < 0. \quad (22)$$

Очевидно, что в случае, рассмотренном выше, две процедуры исследования приводят к одинаковому результату. Именно поэтому режим с $f > 0$ можно назвать генерацией на попутной волне ($v_{grz} > 0$), а при $f < 0$ – генерацией на встречной волне.

Для «холодного» электронного пучка анализ развития неустойчивости проводится аналогично. Остановимся вкратце на тех особенностях «холодного» режима генерации, которые отсутствуют для «горячего» пучка. Для этого перепишем уравнение (4) для случая, когда электроны находятся в резонансе с прямой волной:

$$\begin{aligned} & \left[(\omega - \bar{k}\bar{u})^2 - \frac{\hbar^2 (k^2 c^2 - \omega^2)^2}{4m^2 c^4 \gamma^2} \right] \{ (k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0)(k_\tau^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0) - \omega^4 r \} = \\ & = -\frac{\omega_l^2}{\gamma} \left(\frac{\bar{u}\bar{e}}{c} \right)^2 (k^2 c^2 - \omega^2)(k_\tau^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (23)$$

Существенным отличием «холодного» режима является беспороговый характер генерации, заключающийся в том, что при любом, даже очень большом, значении коэффициента поглощения, неустойчивость будет развиваться. При этом для большого поглощения излучения значение инкремента в классическом случае, когда квантовая отдача электрона незначительна, имеет следующий вид:

$$\text{Im } k_z = -k \times \sqrt{\frac{\omega_l^2 u^2 \left(r' + \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4r'}}{2} \chi_0' \right) \left(\chi_0' + \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4r'}}{2} - \gamma^{-2} \right) \left(\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4r'}}{2} - \gamma^{-2} \right)}{\gamma \omega^2 u_z^2 \chi_0'' (-\alpha - r'' / \chi_0'')} . \quad (24a)$$

В квантовом режиме излучения

$$\text{Im } k_z = -k \frac{\omega_l^2 u^2 r' \left(r' + \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4r'}}{2} \chi_0' \right) \left(\chi_0' + \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4r'}}{2} - \gamma^{-2} \right)}{u_z \omega^3 \frac{\hbar}{mc} (-\alpha - r'' / \chi_0'') \chi_0''} . \quad (24b)$$

Все полученные выражения для инкрементов квазичеренковской неустойчивости справедливы в области параметров отклонения Брэгга α таких, что

$$\theta^2 = \chi_0' + \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4r'}}{2} - \beta^{-2} \gamma^{-2} > 0. \quad (25)$$

В области рентгеновских длин волн, вдали от линии поглощения, величина $\chi_0' < 0$ и условию (25) удовлетворяет только одна ветвь со знаком «+». В принципе даже для нерелятивистских или слабoreлятивистских скоростей электронов условие (25) может выполняться. Для этого требуется большое отклонение от условий дифракции Брэгга. В результате вместо динамической дифракции развивается кинематическая со слабой дифрагированной волной. Амплитуды остальных волн будут иметь порядок малости $\sim |\chi_n|/|\alpha|$. В частности, такая ситуация имеет место при смит-парселловском механизме излучения.

Влияние конечности области взаимодействия на процесс развития неустойчивости в пространственно периодических средах

В предыдущем параграфе были получены дисперсионные уравнения и исследован характер неустойчивости электронного пучка в бесконечной среде. Учет ограниченности области взаимодействия приводит к ряду новых особенно-

стей в процессе протекания генерации. С одной стороны, излучение может уходить из области взаимодействия, тем самым срывая процесс генерации. С другой стороны, эффект отражения волн на границах области взаимодействия может возвращать волну в область генерации, задерживая электромагнитную волну и обеспечивая переход от конвективной к абсолютной неустойчивости. Режим взаимодействия электронного пучка с электромагнитной волной зависит от длины системы. Так, если однопроходной коэффициент усиления Γ удовлетворяет условию $\Gamma \gg 1$, то процесс взаимодействия протекает как в бесконечной среде (режим сильного усиления) и возмущение экспоненциально возрастает с ростом длины области взаимодействия. При выполнении обратного неравенства реализуется режим слабого усиления. В этом случае зависимость однопроходного коэффициента усиления от размера носит осциллирующий характер (электроны в зависимости от фазовых условий либо излучают, либо поглощают излучение). Как результат, развитие неустойчивости происходит не так, как в бесконечной среде. В случае малых размеров области взаимодействия для обеспечения режима генерации необходимо принятие дополнительных мер для удержания излучения. Стандартными системами, выполняющими эти функции, являются резонаторы Фабри – Перо, образованные системой зеркал.

Объемная распределенная дифракционная система является эффективным объемным резонатором, причем такая система выполняет сразу несколько функций: во-первых, дифракционная структура играет роль эффективного распределенного зеркала, удерживающего излучение в области взаимодействия с электронным пучком; во-вторых, ОРОС изменяет дисперсионные характеристики среды, в частности модифицируется показатель преломления – изменяется фазовая скорость и изменяется групповая скорость, – т. е. изменяется скорость движения волнового пакета в такой среде.

Итак, пусть электронный пучок, обладающий средней скоростью \vec{u} , падает на плоскопараллельную пластинку толщиной L . На рис. 1 изображены две схемы взаимодействия электронного потока с электромагнитным полем в геометриях дифракции Лауэ и Брэгга.

Начнем рассмотрение со случая «горячего» пучка. Выпишем поле в системе

$$a\vec{e} \exp(i\vec{k}\vec{r}) + b\vec{e}_\tau \exp(i\vec{k}_\tau\vec{r}), \quad (\text{I})$$

$$\sum_i c_i \exp(i\vec{k}_i\vec{r})(\vec{e} + s_i\vec{e}_\tau \exp(i\vec{\tau}\vec{r})), \quad (\text{II})$$

$$f\vec{e} \exp(i\vec{k}\vec{r}) \exp(-ik_z L) + g\vec{e}_\tau \exp(i\vec{k}_\tau\vec{r}) \exp(-ik_z L), \quad (\text{III}) \quad (26a)$$

$$a\vec{e} \exp(i\vec{k}\vec{r}) + g\vec{e}_\tau \exp(i\vec{k}_\tau^{(-)}\vec{r}), \quad (\text{I})$$

$$\sum_i c_i \exp(i\vec{k}_i\vec{r})(\vec{e} + s_i\vec{e}_\tau \exp(i\vec{\tau}\vec{r})), \quad (\text{II})$$

$$f\vec{e} \exp(i\vec{k}\vec{r}) \exp(-ik_z L) + b\vec{e}_\tau \exp(i\vec{k}_\tau^{(-)}\vec{r}) \exp(ik_z L). \quad (\text{III}) \quad (26б)$$

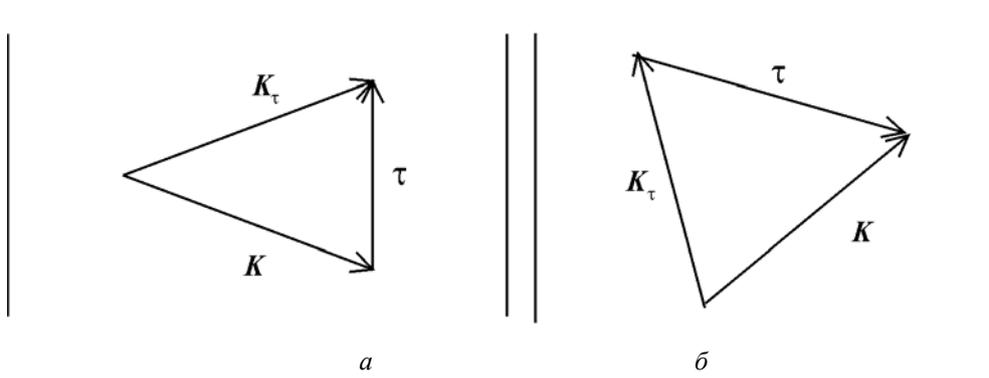


Рис. 1. Геометрия двухволновой дифракции Лауэ (а), \vec{k}, \vec{k}_τ – волновые векторы прямой и дифрагированной волн, $\vec{\tau}$ – вектор обратной решетки периодической структуры, проекции обоих волновых векторов на направление нормали к поверхности имеют одинаковый знак, и геометрия двухволновой дифракции Брэгга (б), \vec{k}, \vec{k}_τ – волновые векторы прямой и дифрагированной волн, $\vec{\tau}$ – вектор обратной решетки периодической структуры. Проекция волновых векторов на направление нормали к поверхности имеют разный знак

Поле в (26а) записано для геометрии дифракции Лауэ, в (26б) – для геометрии дифракции Брэгга. Римскими цифрами (I) и (III) обозначены области до и после объема взаимодействия. Цифрой (II) обозначена область взаимодействия. В этих уравнениях введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{k} &= (k_z, \vec{k}_\perp), \quad k_z = \sqrt{\omega^2 / c^2 - k_\perp^2}, \quad \vec{k}_\tau = (k_\tau, \vec{k}_\perp + \vec{\tau}_\perp), \\ k_\tau &= \sqrt{\omega^2 / c^2 - (\vec{k}_\perp + \vec{\tau}_\perp)^2}, \\ \vec{k}_\tau^{(-)} &= (-k_\tau, \vec{k}_\perp + \vec{\tau}_\perp), \\ k_{z1,2} &= k_{0z} + \frac{\omega}{4c\gamma_0} \left\{ (l + iG^{(t)} \pm \sqrt{(l + iG^{(t)} - \beta l_1)^2 + 4\beta r}) \right\} - \end{aligned}$$

два решения дисперсионного уравнения, описывающего неустойчивость пучка в «горячем» режиме; \vec{e} и \vec{e}_τ – единичные векторы поляризации излучения для прямой и дифрагированной волн двухволновой дифракции. При записи полей (26а) и (26б) считаем, что на систему «электронный пучок + периодическая среда» извне падают волны с частотой ω вдоль направлений волновых векторов \vec{k} и \vec{k}_τ с амплитудами полей a и b соответственно. В случае геометрии Лауэ эти волны падают с одной стороны, а в случае геометрии Брэгга – с противоположных сторон. Для полного задания полей (26а) и (26б) необходимо определить неизвестные коэффициенты c_i , f и g . С этой целью произведем сшивку на границах области взаимодействия:

$$\begin{aligned}
a &= c_1 + c_2, \\
b &= s_1 c_1 + s_2 c_2, \\
c_1 \exp(ik_{1z}L) + c_2 \exp(ik_{2z}L) &= f, \\
s_1 c_1 \exp(ik_{1z}L) + s_2 c_2 \exp(ik_{2z}L) &= g.
\end{aligned} \tag{27a}$$

$$\begin{aligned}
a &= c_1 + c_2, \\
b &= s_1 c_1 \exp(ik_{1z}L) + s_2 c_2 \exp(ik_{2z}L), \\
c_1 \exp(ik_{1z}L) + c_2 \exp(ik_{2z}L) &= f, \\
s_1 c_1 + s_2 c_2 &= g.
\end{aligned} \tag{27б}$$

$s_i = \frac{\omega^2 \chi_{-\tau}}{[(\bar{k}_i + \bar{\tau})^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0]}$ – коэффициенты связи дифрагированной и прямой волн

в i -й моде. В (27а) первое и второе уравнения отвечают непрерывности прямой и дифрагированной волн на границе $z = 0$, а третье и четвертое – на границе $z = L$. В (27б) первое и третье уравнения получаются из условия непрерывности прямой волны на границах $z = 0$ и $z = L$, а второе и четвертое – из непрерывности дифрагированной волны при $z = L$ и $z = 0$ соответственно. В результате получаются следующие выражения для амплитуд полей в области взаимодействия:

$$c_1 = \frac{s_2 a - b}{s_2 - s_1}, \quad c_2 = \frac{b - s_1 a}{s_2 - s_1}, \tag{28a}$$

$$c_1 = \frac{s_2 \exp(ik_{2z}L)a - b}{s_2 \exp(ik_{2z}L) - s_1 \exp(ik_{1z}L)}, \quad c_2 = \frac{b - s_1 \exp(ik_{1z}L)a}{s_2 \exp(ik_{2z}L) - s_1 \exp(ik_{1z}L)} \tag{28б}$$

и для амплитуд выходящих полей вне области взаимодействия:

$$\begin{aligned}
f &= \frac{s_2 \exp(ik_{1z}L) - s_1 \exp(ik_{2z}L)}{s_2 - s_1} a + \frac{\exp(ik_{2z}L) - \exp(ik_{1z}L)}{s_2 - s_1} b, \\
g &= s_1 s_2 \frac{\exp(ik_{2z}L) - \exp(ik_{1z}L)}{s_2 - s_1} a + \frac{s_2 \exp(ik_{2z}L) - s_1 \exp(ik_{1z}L)}{s_2 - s_1} b.
\end{aligned} \tag{29a}$$

$$\begin{aligned}
f &= \frac{s_2 - s_1}{s_2 \exp(ik_{2z}L) - s_1 \exp(ik_{1z}L)} \exp(ik_{1z}L) \exp(ik_{2z}L) a - \\
&\quad - \frac{\exp(ik_{2z}L) - \exp(ik_{1z}L)}{s_2 \exp(ik_{2z}L) - s_1 \exp(ik_{1z}L)} b, \\
g &= s_1 s_2 \frac{\exp(ik_{2z}L) - \exp(ik_{1z}L)}{s_2 \exp(ik_{2z}L) - s_1 \exp(ik_{1z}L)} a - \frac{s_2 - s_1}{s_2 \exp(ik_{2z}L) - s_1 \exp(ik_{1z}L)} b.
\end{aligned} \tag{29б}$$

В результате анализа полученных выражений (28а)–(29б) можно сделать следующие выводы: в геометрии Лауэ в режиме слабого усиления, исходя из (29а), величина, характеризующая поток излучения, выходящего из области взаимодействия, имеет вид

$$I = \gamma_0 |f|^2 + \gamma_1 |g|^2 = \gamma_0 |a|^2 + \gamma_1 |b|^2 - 2\gamma_0 L (A_1 k_{1z}'' + A_2 k_{2z}''), \quad (30)$$

где

$$A_1 = \left\{ (s_2^2 + \beta) |a|^2 + (s_1^2 / \beta + 1) |b|^2 - (s_2 - s_1)(ab^* + a^*b) \right\} / (s_2 - s_1)^2, \\ A_2 = A_1(s_2 \rightarrow s_1; s_1 \rightarrow s_2).$$

Таким образом, в геометрии Лауэ в этом режиме усиления добавка к энергии излучения, обусловленная взаимодействием с электронным пучком, мала ($\sim |k_z'' L| \ll 1$). В противоположном пределе сильного усиления для геометрии Лауэ усиление падающих извне сигналов происходит согласно асимптотическому закону $\sim \exp\{-\text{Im} k_{iz} L\}$, где

$$\text{Im} k_{iz} = \frac{\omega}{4c\gamma_0} \left\{ -G^{(r)} \left(1 \mp \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + 4\beta r}} \right) + \right. \\ \left. + \chi_0'' \left(1 + \beta \mp \frac{\Delta(1-\beta)}{\sqrt{\Delta^2 + 4\beta r}} \pm \frac{2\beta r''}{\chi_0'' \sqrt{\Delta^2 + 4\beta r}} \right) \right\}. \quad (31)$$

В (31) $\Delta = l - \beta l_1'$.

В случае геометрии дифракции Брэгга, как было показано выше, возможен другой тип генерации – абсолютная неустойчивость. В полученных выражениях (29б) этому режиму соответствует обращение в ноль знаменателей для амплитуд выходящих из системы полей при не равном нулю числителе:

$$s_2 \exp(ik_{2z} L) - s_1 \exp(ik_{1z} L) = 0. \quad (32)$$

Временной инкремент, описывающий развитие абсолютной неустойчивости, получается в результате решения (32) относительно частоты:

$$\omega'' = \left\{ \frac{\omega}{2(1-\beta)} \frac{G_1^{(t)}}{2} \left(1 + \frac{\kappa}{\Delta} \right) + \frac{G_2^{(t)}}{2} \left(1 - \frac{\kappa}{\Delta} \right) - \chi_0'' (1-\beta) + \right. \\ \left. + \frac{\beta r''}{\Delta} - \frac{2\gamma_0 c^2}{\omega u_z L_*} \frac{\kappa}{\Delta} \ln \left| \frac{\kappa + \Delta}{\kappa - \Delta} \right| \right\}, \quad (33)$$

где $\Delta = l - \beta l_1$, $\kappa = \sqrt{\Delta^2 + 4\beta r}$, $L_* = Lu / u_z$. Для параметров системы, соответствующих области, далекой от точек вырождения, если в синхронизме с электронным пучком находится только одна мода излучения, при $\eta = l + \beta l_1 > 0$ инкремент абсолютной неустойчивости равен

$$\omega'' = \frac{\omega}{2(1-\beta)} \left\{ \frac{G_1^{(t)}}{2} \left(1 + \frac{\kappa}{\Delta} \right) - \chi_0'' (1-\beta) + \frac{\beta r''}{\Delta} - \frac{2\gamma_0 c^2}{\omega u_z L_*} \frac{\kappa}{\Delta} \ln \left| \frac{\kappa + \Delta}{\kappa - \Delta} \right| \right\}.$$

В этих условиях при $\Delta < 0$ генерация происходит на попутной волне, а при $\Delta > 0$ – на встречной. Если $\eta < 0$, то

$$\omega'' = \frac{\omega}{2(1-\beta)} \left\{ \frac{G_2^{(t)}}{2} \left(1 - \frac{\kappa}{\Delta}\right) - \chi_0''(1-\beta) + \frac{\beta r''}{\Delta} - \frac{2\gamma_0 c^2}{\omega u_z L_*} \frac{\kappa}{\Delta} \ln \left| \frac{\kappa + \Delta}{\kappa - \Delta} \right| \right\},$$

и при $\Delta > 0$ генерация идет на попутной волне, а при $\Delta < 0$ – на встречной. Если плотность тока электронного пучка такова, что $\omega'' < 0$, то абсолютная неустойчивость не развивается. В этих условиях возможна ситуация, когда реализуется стационарное усиление. Тогда для параметров $\eta\Delta < 0$ будет усиливаться попутная волна, падающая со стороны границы $z = 0$. Как следует из (29б), асимптотический вид амплитуды усиливаемой в этом случае прямой волны в пределе сильного усиления при $z = L$ имеет вид

$$|f| \sim \left| a \frac{s_2 - s_1}{s_{2(1)}} \right| \exp \left\{ \frac{kL}{4\gamma_0} \left[-G_{1(2)}^{(t)} \left(1 \mp \frac{\Delta}{\kappa}\right) + \chi_0'' \left(1 + \beta \mp \frac{\Delta(1-\beta)}{\kappa} \pm \frac{2\beta r''}{\kappa}\right) \right] \right\}.$$

В выражении используется верхний знак при $\eta > 0$ и нижний знак при $\eta < 0$. В области параметров, удовлетворяющих условию $\eta\Delta > 0$, соответствующему генерации на встречной волне, усиливается дифрагированная волна, посланная с границы $z = L$. Асимптотический вид ее амплитуды при $z = 0$:

$$|g| \sim \left| b \frac{s_2 - s_1}{s_{2(1)}} \right| \exp \left\{ \frac{kL}{4\gamma_0} \left[-G_{1(2)}^{(t)} \left(1 \mp \frac{\Delta}{\kappa}\right) + \chi_0'' \left(1 + \beta \mp \frac{\Delta(1-\beta)}{\kappa} \pm \frac{2\beta r''}{\kappa}\right) \right] \right\}.$$

При вырождении корней дифракционного уравнения возникает переходная ситуация. Особенность данного случая заключается в том, что одновременно работают оба механизма генерации (и на попутной, и на встречной волне). В данной области решение генерационного уравнения (32) принимает вид

$$\omega'' = \frac{\omega}{2(1-\beta)} \left\{ G^{(t)} - \chi_0'' \left(1 - \beta \mp \frac{\sqrt{-\beta r''}}{|\chi_\tau| \chi_0''}\right) - \left(\frac{\gamma_0 c}{\bar{n} \bar{u}}\right)^3 \frac{16\pi^2 n^2}{-\beta(k\chi_\tau L_*)^2 kL_*} \right\}. \quad (34)$$

Формулы (33), (34) имеют прозрачный физический смысл. Слагаемые, пропорциональные $G^{(t)}$, описывают процесс наработки излучения электронным пучком в области взаимодействия, слагаемые $\sim \chi_0''$ описывают потери излучения на фотопоглощение, а слагаемые, в которые входит длина, описывают потери за счет выхода излучения через границы из области взаимодействия. Полученные выражения носят довольно общий характер, при этом в зависимости от механизма излучения изменяется только слагаемое $G^{(t)}$, связанное с наработкой излучения, остальные слагаемые вообще не меняются. Так, из (34) следует выражение для добротности объемной дифракционной системы в двухволновом случае

$$Q = \frac{2(1-\beta)}{\chi_0'' \left(1 - \beta \mp \frac{\sqrt{-\beta r''}}{|\chi_\tau| \chi_0''}\right) + \left(\frac{\gamma_0 c}{\bar{n} \bar{u}}\right)^3 \frac{16\pi^2 n^2}{-\beta(k\chi_\tau L_*)^2 kL_*}}. \quad (35)$$

Из (35) следует, что, изменяя фактор асимметрии дифракции, можно регулировать добротность объемного резонатора. В частности, в зависимости от па-

раметров системы (длины области взаимодействия, величины поглощения, частоты) существует оптимальное значение β , при котором потери в объемном резонаторе будут минимальны. На рис. 2 изображены зависимости добротности от фактора асимметрии для $\lambda = 4$ мм при длине генератора $L = 10$ см (рис. 2, а) и $L = 20$ см (рис. 2, б). Из этих графиков видно, что добротность увеличивается при отходе от одномерной геометрии распределенной обратной связи ($\beta = -1$) к объемной геометрии с большой величиной $|\beta|$. При этом для большей величины L добротность выходит на насыщение при меньшей абсолютной величине фактора асимметрии. Поэтому применение объемной РОС (ОРОС) особенно важно для систем с малыми размерами. На рис. 3 изображена зависимость отношения потерь в резонаторе при неоднородной геометрии дифракции к потерям при одномерной РОС. Из этого графика следует, что существует оптимальная величина фактора асимметрии, для которого потери минимальны.

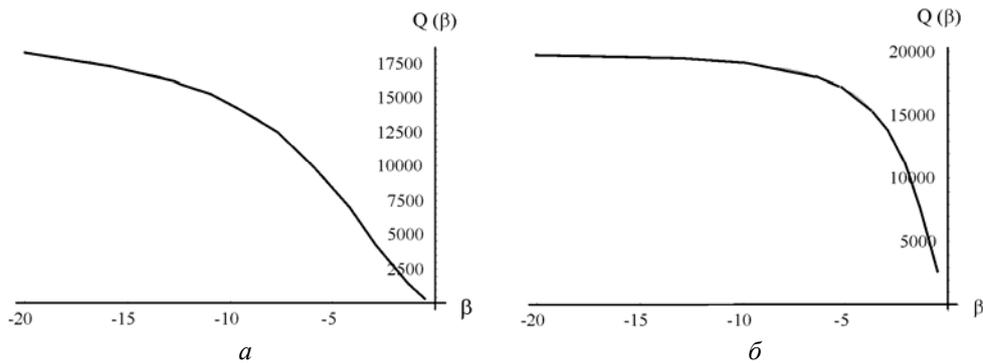


Рис. 2. Зависимость величины добротности Q объемного резонатора от фактора асимметрии β при длине $L = 10$ см (а) и зависимости величины добротности Q объемного резонатора от фактора асимметрии β при длине $L = 20$ см (б)

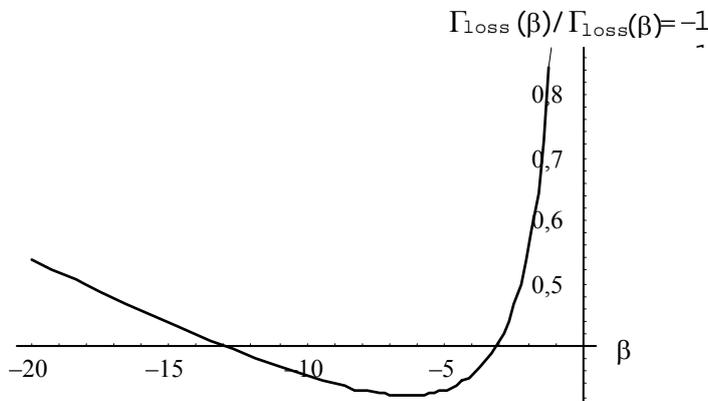


Рис. 3. Зависимость отношения $\Gamma_{loss}(\beta) / \Gamma_{loss}(\beta = -1)$ от фактора асимметрии дифракции для $\lambda \sim 4$ мм и $L = 10$ см

В случае «холодного» электронного пучка исследование неустойчивости, вывод пороговых условий генерации и нахождение полей в системе представляют более сложную задачу. Изложим вкратце теорию неустойчивости в этом случае. В пренебрежении зеркально отраженными от границ волнами дисперсионное уравнение (3), описывающее неустойчивость электронного пучка в двухволновом случае, является уравнением четвертого порядка. Тогда поле в области взаимодействия записывается в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_\tau = \sum_{i=1}^4 c_i \exp\{i\vec{k}_i \vec{r}\} (\vec{e} + s_i \vec{e}_\tau \exp\{i\vec{\tau} \vec{r}\}). \quad (36)$$

Для определения неизвестных коэффициентов используем условия непрерывности электрических полей, плотности тока и заряда электронного потока на границах области взаимодействия. В результате для двух геометрий получается система уравнений, из которой определяется структура полей:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 c_i = a, \\ \sum_{i=1}^4 \frac{c_i}{\delta_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^4 \frac{c_i}{\delta_i^2} = 0, \\ 1) \sum_{i=1}^4 s_i c_i = b \quad \text{или} \quad 2) \sum_{i=1}^4 s_i c_i \exp\{ik_{iz} L\} = b. \end{cases} \quad (37)$$

Первое уравнение в (37) выражает непрерывность прямой волны на границе $z = 0$, второе и третье уравнения отвечают непрерывности плотности тока и заряда электронного пучка на границе $z = 0$. Четвертое условие выражает непрерывность дифрагированной волны: 1) на границе $z = 0$ в геометрии Лауэ; 2) на границе $z = L$ в геометрии Брэгга. В результате решения этой системы линейных уравнений можно полностью определить поля в системе.

Все основные выводы, которые были сделаны для «горячего» пучка, справедливы и в данном случае. Проведем лишь дополнительно исследование пороговых условий в геометрии Брэгга в «холодном» пределе. Уравнение на порог генерации получается приравниванием определителя линейной системы (37) к нулю:

$$\begin{aligned} & s_1 \exp\{ik_{1z} L\} \delta_1^2 (\delta_2 - \delta_3)(\delta_2 - \delta_4)(\delta_3 - \delta_4) - \\ & - s_2 \exp\{ik_{2z} L\} \delta_2^2 (\delta_1 - \delta_3)(\delta_1 - \delta_4)(\delta_3 - \delta_4) + \\ & + s_3 \exp\{ik_{3z} L\} \delta_3^2 (\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 - \delta_4)(\delta_2 - \delta_4) - \\ & - s_4 \exp\{ik_{4z} L\} \delta_4^2 (\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 - \delta_3)(\delta_2 - \delta_3) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Решение (38) относительно частоты имеет следующий вид:

$$\omega'' = \frac{\omega}{2(1-\beta)} \left\{ G^{(cold)} - \chi_0'' \left(1 - \beta \mp \frac{\sqrt{-\beta r''}}{|\chi_\tau| \chi_0''} \right) - \left(\frac{\gamma_0 c}{\bar{n} \bar{u}} \right)^3 \frac{16\pi^2 n^2}{-\beta (k\chi_\tau L_*)^2 kL_*} \right\}. \quad (39)$$

В (39) $G^{(cold)} = \frac{\pi^2 n^2}{4\gamma} J \left(\frac{\omega_l}{\omega} \right)^2 k^2 L_*^2 f(y)$ – слагаемое, описывающее наработку

излучения «холодным» пучком; J – коэффициент связи электронного пучка с электромагнитной волной, его вид зависит от механизма генерации;

$$f(y) = \sin y \frac{(2y + \pi n) \sin y - y(y + \pi n) \cos y}{y^3 (y + \pi n)^3} - \quad (40)$$

профильная функция, зависящая от отстройки от условий синхронизма $\frac{\delta\omega}{2u_z} L_*$.

График профильной функции отстроек приведен на рис. 4.

Как следует из (40) и рис. 4, одной из особенностей генерации в области вырождения корней дифракционного уравнения является неравенство нулю стимулированного излучения при точном выполнении условия синхронизма. Возникновение этой особенности связано с интерференцией вкладов от двух ветвей дифракционного уравнения в процесс неустойчивости. В стандартном классическом ЛСЭ генерации при нулевой отстройке от условия синхронизма не происходит. Это связано с тем, что коэффициент усиления пропорционален разности между линиями спонтанного излучения и спонтанного поглощения. В классическом случае, когда из-за конечной ширины линий они перекрываются, это приводит к пропорциональности коэффициента усиления производной от функции спектра спонтанного излучения, а при нулевой отстройке от условий синхронизма спектральная интенсивность спонтанного излучения максимальна.

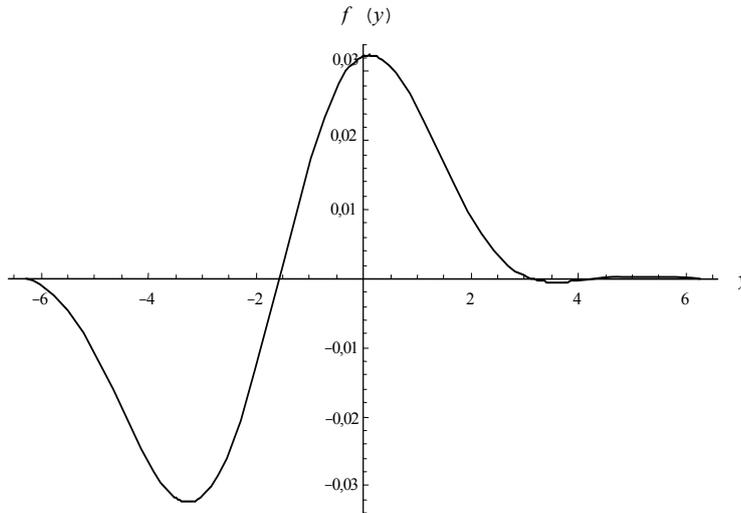


Рис. 4. Зависимость профильной функции генерации в области вырождения корней от величины отстройки от условий синхронизма y . График приведен для первой гармоники $n = 1$

Если квантовая отдача существенно влияет на процесс излучения (в режиме слабого усиления при выполнении неравенства $\Omega \frac{\hbar\omega}{mc^2\gamma} \frac{\omega L}{2u_z} \geq 1$, где параметр Ω определяется механизмом генерации: для параметрического механизма $\Omega = \chi_0 + \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4r}}{2}$; для ондуляторного дифракционного механизма $\Omega = \frac{\omega_p}{\omega} + \chi_0 + \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4r}}{2}$ и т. д.), то величина, отвечающая за наработку излучения в объеме взаимодействия в (39), принимает вид

$$G^{(cold)} = \frac{\pi^2 n^2 J}{2} \left(\frac{\omega_l}{\omega} \right)^2 \frac{mc^2}{\hbar\omega} kL_* \frac{\sin^2 x}{x^2 (x + \pi)^2}.$$

Профильная функция зависимости генерации от рассинхронизации в этом случае имеет вид

$$f_Q(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 (x + \pi)^2}. \quad (41)$$

Заметим, что в этом режиме при нулевой отстройке от условий синхронизма с одним из дифракционных корней наработка излучения отлична от нуля. Это связано с тем, что спонтанные линии излучения и поглощения разделены и не вычитаются друг из друга. Максимум величины генерации соответствует отстройке (см. рис. 5), при которой частота излучения лежит посередине между двумя дифракционными корнями.

В случае, когда система не достигает пороговых условий, но находится вблизи них, при слабом однократном усилении в области вырождения корней

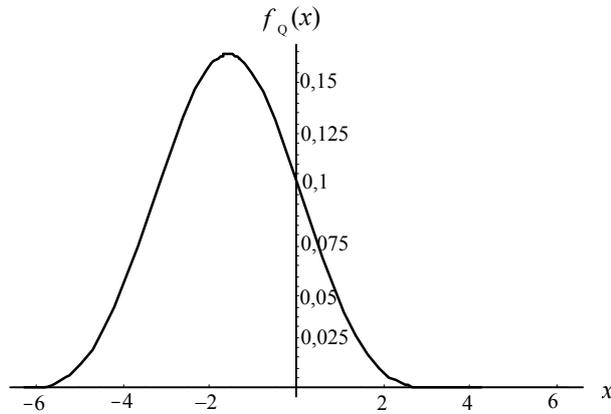


Рис. 5. Зависимость профильной функции стимулированного излучения от отстройки от синхронизма в точке вырождения корней, когда квантовая отдача при излучении становится существенной. График приведен для первой гармоники $n = 1$

возможен эффективный обмен энергией между электронной и электромагнитной подсистемами. Так, используя выражения (29б), (36), (37), нетрудно получить

$$I = \gamma_0 |E_0(z=L)|^2 + |\gamma_1|^2 |E_r(z=0)|^2 =$$

$$= (\gamma_0 |a|^2 + |\gamma_1|^2 |b|^2) \left(\frac{\gamma_0 c}{u_z} \right)^3 \frac{16\pi^2 n^2}{-\beta (k\chi_\tau L_*)^2 kL_* (\Gamma^{(thr)} - G^{(b)})}, \quad (42)$$

где $\Gamma^{(thr)} = \left(\frac{\gamma_0 c}{\bar{n}u} \right)^3 \frac{16\pi^2 n^2}{-\beta (k\chi_\tau L_*)^2 kL_*} + \chi_0 \left(1 - \beta \mp \frac{\sqrt{-\beta r''}}{|\chi_\tau| \chi_0} \right)$ – пороговое значение

темпа однопроходного усиления. $G^{(b)}$ – темп наработки излучения электронным пучком, вид этого слагаемого для пределов «горячего», «холодного» классического и квантового случаев был приведен выше ($G^{(t)}$, $G^{(cold)}$). Таким образом, усиление вблизи порога может достигать существенной величины – реализуется режим так называемого регенеративного усилителя, устройства с положительной обратной связью, в котором режим абсолютной неустойчивости не достигается. Вдали от пороговых условий, когда усиление мало, раскладывая (42) по малому параметру $G^{(b)}$ (и пренебрегая поглощением), получим:

$$I = (\gamma_0 |a|^2 + |\gamma_1|^2 |b|^2) \left(\frac{\gamma_0 c}{u_z} \right)^3 \frac{16\pi^2 n^2}{-\beta (k\chi_\tau L_*)^2 kL_* (\Gamma^{(thr)} - G^{(b)})} =$$

$$= (\gamma_0 |a|^2 + |\gamma_1|^2 |b|^2) \left\{ 1 - \beta \left(\frac{u_z}{\gamma_0 c} \right) kG^{(b)} L_* \left(\frac{k\chi_\tau L_*}{4\pi} \right)^2 \right\}. \quad (43)$$

Второе слагаемое в фигурных скобках формулы (43) описывает результат взаимодействия электронного пучка с волной. В зависимости от отстройки это слагаемое может давать как положительный, так и отрицательный вклад (тем самым увеличивая или уменьшая энергию в электромагнитной волне). Заметим, что в области вырождения корней функциональная зависимость наработки излучения от длины области взаимодействия изменяется. Так, если в обычной ситуации (в области, далекой от вырождения) усиление $\sim kG^{(b)} L_*$, то, как следует из формулы (43), при двукратном вырождении корней усиление волны $\sim kG^{(b)} L_* \left(\frac{k\chi_\tau L_*}{4\pi} \right)^2$. При развитой динамической дифракции этот коэффициент существенно больше, поэтому наработка излучения при вырождении происходит более эффективно.

Обсудим теперь, какие изменения наблюдаются при переходе к многоволновой дифракции: во-первых, происходит количественное изменение коэффициента поглощения. Во-вторых, в пороговых условиях слагаемое в $\Gamma^{(thr)}$, связанное с выходом излучения через границы в области n -кратного вырождения корней, пропорционально

$$\sim \frac{1}{-\beta k L_*} \left(\frac{4\pi n}{k \chi_\tau L_*} \right)^{2(n-1)}. \quad (43')$$

Это изменение функциональной зависимости приводит к понижению порогового тока генерации или при одном и том же токе – к уменьшению размера генератора.

В условиях n -кратного вырождения дифракционных корней вклад стимулированного излучения в (43) будет пропорционален $\sim k G^{(b)} L_* \left(\frac{k \chi_\tau L_*}{4\pi} \right)^{2(n-1)}$ (напомним, что в условиях динамической дифракции $\frac{k \chi_\tau L_*}{4\pi} \gg 1$). Аналог выражения для добротности резонатора (35) при многоволновой дифракции

$$Q \sim \frac{Q_0}{a \chi_0'' + \frac{b}{k L_*} \left(\frac{4\pi n}{k \chi_\tau L_*} \right)^{2(n-1)}}, \quad (35')$$

где a и b – константы, зависящие от геометрии дифракции.

Главный вывод из полученных выше результатов заключается в том, что процесс генерации существенным образом зависит от геометрии объемной распределенной связи. В частности, в выражения для коэффициентов усиления, инкрементов абсолютной неустойчивости (33), (34), (39), (43) входит фактор асимметрии дифракции β . Из этих выражений следует, что для каждого конкретного набора параметров системы (диапазона длин волн, степени модуляции, величины поглощения, длины области генерации) существует оптимальное значение этого параметра. Таким образом, переход к неоднородной геометрии генерации приводит к улучшению свойств системы.

Многоволновая дифракция обеспечивает генерацию в условиях, когда параметры системы таковы, что без дифракции неустойчивость не развивается. Ярким примером является квазичеренковская неустойчивость электронного пучка с излучением в жестком рентгеновском диапазоне. Хорошо известно, что в этом диапазоне длин волн диэлектрическая восприимчивость имеет отрицательное значение вдали от линий поглощения $\chi_0 < 0$, поэтому при отсутствии дифракции показатель преломления $n \sim 1 + \chi_0/2 < 1$, электромагнитная волна опережает электронный пучок, черенковская неустойчивость отсутствует. Однако, как было показано в [3], в области динамической дифракции показатель преломления может стать больше единицы и черенковское условие $1 - \beta n \cos \theta$ может быть удовлетворено. Тем не менее, если электронный пучок является нерелятивистским или слаборелятивистским, а диэлектрическая восприимчивость мала $\chi \ll 1$, квазичеренковский синхронизм в двухволновом случае обеспечивается только при больших отклонениях от условий дифракции Брэгга. Однако при большом отклонении от брэгговских условий амплитуда одной из волн становится значительно меньше амплитуды другой волны в отношении $\sim \chi/\alpha$.

При этом эффективность распределенной связи уменьшается. Одним из способов использования преимуществ развитой динамической дифракции и одновременного выполнения условий синхронизма в этом случае является применение многоволновой схемы дифракции. В такой схеме объемная распределенная связь может осуществляться несколькими сильносвязанными брэгговскими волнами, а синхронизм с электронным пучком обеспечивается слабосвязанной с остальными волнами компонентой. Проиллюстрируем сказанное на примере трехволновой неустойчивости с двумя сильносвязанными и одной слабосвязанной волной. В случае трехволновой компланарной дифракции дисперсионное уравнение (1), описывающее неустойчивость электронного пучка, запишется в виде

$$F_{\sigma}^{(3)}(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = -\Gamma_1 F_{\sigma}^{(2)}(\vec{k}, \vec{k}_2), \quad (44)$$

$$F_{\sigma}^{(3)}(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = (k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0)(k_1^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0)(k_2^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0) - \omega^4 (k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0) \chi_{1-2} \chi_{2-1} - \\ - \omega^4 (k_1^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0) \chi_2 \chi_{-2} - \omega^4 (k_2^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0) \chi_1 \chi_{-1} - \omega^6 (\chi_1 \chi_{-2} \chi_{2-1} + \chi_2 \chi_{-1} \chi_{1-2}), \\ F_{\sigma}^{(2)}(\vec{k}, \vec{k}_2) = (k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0)(k_2^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0) - \omega^4 \chi_2 \chi_{-2}.$$

Дисперсионное уравнение (44) получено в предположении, что электроны находятся в синхронизме с волной, имеющей волновой вектор \vec{k}_1 . Допустим, параметры системы находятся в области, в которой выполняются условия брэгговской связи для волн с волновыми векторами \vec{k} и \vec{k}_2 . Если $|\chi| \ll 1$, то для нерелятивистских или слаборелятивистских электронов невозможно одновременное выполнение условия сильной брэгговской связи и условия черенковского синхронизма волны с волновым вектором \vec{k}_1 . Поэтому генерация в трехволновом случае будет проходить по следующей схеме:

1) излучение генерируется за счет переходного механизма в периодической среде на плоскостях, соответствующих вектору обратной решетки $\vec{\tau}_1$ ($\omega - (\vec{k} + \vec{\tau}_1)\vec{u} \approx 0$);

2) объемная распределенная связь обеспечивается за счет динамической дифракции на плоскостях, отвечающих вектору обратной решетки $\vec{\tau}_2$ ($|\vec{k}| \approx |\vec{k} + \vec{\tau}_2|$).

Сделав в уравнении (44) подстановку $\vec{k} = \vec{k}_0 + \frac{\omega}{c} \vec{n} \delta$, где вектор \vec{k}_0 удовлетворяет точному условию синхронизма $\omega - (\vec{k}_0 + \vec{\tau}_1)\vec{u} = 0$, а $\delta \ll 1$, и раскладывая (44) по малому параметру δ , получим:

$$\delta^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{l_1}{\gamma_0} + \frac{l_2}{\gamma_2} \right) \delta + l_2 - \chi_2 \chi_{-2} = \\ = -\frac{1}{4\gamma_0 \gamma_1 \gamma} \Gamma_1 \frac{l \chi_{1-2} \chi_{2-1} + l_2 \chi_1 \chi_{-1} + \chi_1 \chi_{-2} \chi_{2-1} + \chi_2 \chi_{-1} \chi_{1-2}}{l_1^2}. \quad (45)$$

Производя процедуру шивки полей на границах области взаимодействия, выписывая уравнение генерации, а затем решая его относительно частоты по аналогии с тем, как делалось выше, получим временной инкремент неустойчивости для рассматриваемой системы:

$$\omega'' = \frac{\omega}{2(1-\beta_2)} \left\{ G^{(b)} \frac{l\chi_{1-2}\chi_{2-1} + l_2\chi_1\chi_{-1} + \chi_1\chi_{-2}\chi_{2-1} + \chi_2\chi_{-1}\chi_{1-2}}{l_1^2 l} f(y) - \chi_0'' \left(1 - \beta \mp \frac{\sqrt{-\beta_2} r''}{|\chi_\tau| \chi_0''} \right) - \left(\frac{\gamma_0 c}{\vec{n}\vec{u}} \right)^3 \frac{16\pi^2 n^2}{-\beta_2 (k\chi_\tau L_*)^2 kL_*} \right\}, \quad (46)$$

где $l = \frac{k_0^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0}{\omega^2}$, $l_i = \frac{(\vec{k}_0 + \vec{\tau}_i)^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0}{\omega^2}$.

На рис. 6, 7 изображены графики зависимости пороговых токов (соответствующие $\omega'' = 0$) от фактора асимметрии при разных длинах области взаимодействия ($L = 5$ см на рис. 4 и $L = 10$ см на рис. 5). Как и в двухволновом случае, здесь также существует оптимальное значение фактора асимметрии, при котором пороговый ток имеет минимальное значение.

Замечательной особенностью такой геометрии является ее универсальность, она может применяться для генерации в широком диапазоне длин волн – от СВЧ до жесткого рентгеновского излучения. Более того, в рентгеновском диапазоне схема неустойчивости с двумя сильносвязанными и одной слабосвязанной волной имеет следующее преимущество: при обычной двухволновой дифракции синхронизм электронного пучка с волной обеспечивается при большой величине фактора асимметрии $|\beta| > (\theta^2 + (|\chi_0| + \lambda^{-2} c^2 / u^2) / \chi_\tau)^2$. При таком

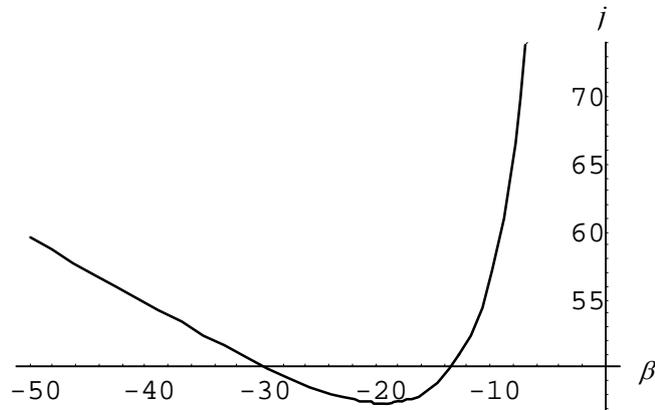


Рис. 6. Зависимость порогового тока генерации от фактора асимметрии дифракции β при длине области взаимодействия $L = 5$ см (длина волны излучения $\lambda = 3$ мм)

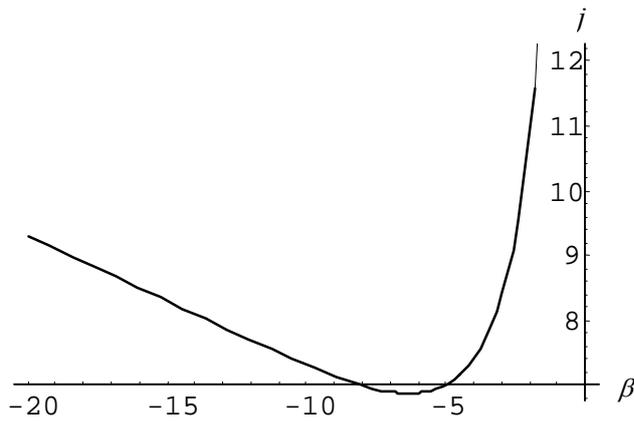


Рис. 7. Зависимость порогового тока генерации от фактора асимметрии дифракции β при длине области взаимодействия $L = 10$ см (длина волны излучения $\lambda = 3$ мм)

факторе асимметрии потери на поглощение велики, что является критическим фактором в этой области частот для протекания генерации. В предложенной же схеме не возникает ограничения на фактор асимметрии β_2 . В том числе его можно сделать равным -1 , реализовав так называемую симметричную дифракцию Брэгга. Как известно, в этих условиях реализуется режим аномально малого поглощения, или по другому – эффект Бормана [17]. Как результат, пороговый ток генерации будет существенно ниже.

Неустойчивость электронного пучка при пролете над поверхностью среды

При пролете электронного пучка в периодической структуре в результате взаимодействий с атомами среды электроны пучка рассеиваются и выводятся из условий синхронизма с электромагнитной волной, что препятствует процессу генерации. Уже при небольшой длине пролета в мишени первоначально моноскоростной пучок становится «горячим». В результате рассеяния возникают два фактора, которые влияют на процесс генерации:

1) процессы рассеяния сдвигают частоту излучения, что сводится к эффективной добавке мнимой части γ_{col} к частоте излучения. Поэтому одним из критериев является малость частоты столкновений по сравнению с шириной линии излучения $\gamma_{col} / \delta\omega \ll 1$;

2) более серьезное требование связано с многократным рассеянием. Простейшим критерием, учитывающим этот процесс, является неравенство $(|\omega\theta_{mult}c/\gamma| + |\omega\theta_{mult}^2|) / \delta\omega \ll 1$. Это требование является значительно более жестким, по сравнению с первым, уже при чрезвычайно малой длине пролета электронного пучка (напомним, что квадрат угла многократного рассеяния $\theta_{mult}^2 \sim L$).

Для того чтобы избежать разрушительного действия многократного рассеяния, электронный пучок проводится в вакуумном зазоре или вблизи поверхности замедляющей среды резонатора. В работе [19] было показано, что параметрический механизм излучения в этом случае также реализуется. При этом возникает требование на точность проводки пучка: пучок должен пролетать вблизи поверхности на расстоянии, не большем, чем $h \leq \lambda u / (4\pi\gamma)$. Эффективно участвует в процессе взаимодействия с волной только часть пучка на глубине $\sim \lambda u / (4\pi\gamma)$. Это связано с тем, что при пролете в вакуумном промежутке в синхронизме с электронным пучком может находиться только поверхностная, экспоненциально затухающая волна, причем степень экспоненциального затухания как раз определяется параметром $\lambda u / (4\pi\gamma)$.

Для проводки электронного пучка используется ведущее магнитное поле. В зависимости от его величины и частоты излучения в процесс генерации вносят вклад различные степени свободы пучка. При большой величине магнитного поля $eH^{(0)} / (m\lambda c \delta\omega) \gg 1$ генерация проходит в замагниченном пучке. При этом вклад в развитие неустойчивости вносит только продольная динамика электронов. Дисперсионное уравнение для электронов, пролетающих в вакууме, в этом случае имеет вид

$$k^2 c^2 - \omega^2 - (k_x^2 c^2 - \omega^2) \sigma, \quad (47)$$

где слагаемое σ связано со взаимодействием электронов с волной:

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\omega_i^2}{\gamma^3 (\omega - k_x u)^2} & \text{— для «холодного» электронного пучка,} \\ \frac{\sqrt{\pi} \omega_i^2}{\gamma^3 \delta_0^2} x^{(t)} \exp\{-x^{(t)2}\} & \text{— для «горячего» электронного пучка,} \end{cases}$$

$x^{(t)} = \Delta\omega / \sqrt{2}\delta_0$, $\Delta\omega = \omega - k_x u$ — отстройка от условий синхронизма. Из уравнения (47) следует, что резонансный вклад взаимодействия электронов с излучением содержится непосредственно в дисперсионном уравнении. Иная ситуация возникает при генерации незамагниченным пучком. В этом случае дисперсионное уравнение для электромагнитной волны, взаимодействующей с электронами в вакууме, имеет вид

$$k^2 c^2 - \omega^2 + \frac{\omega_i^2}{\gamma} = 0, \quad (48)$$

и резонансного слагаемого в (48) не содержится. В результате дисперсионное уравнение для электромагнитной волны не связывается с уравнением для медленной и быстрой плазменных волн:

$$1 - \frac{\omega_i^2}{\gamma^3 (\omega - \vec{k}\vec{u})^2} = 0. \quad (49)$$

Как будет показано ниже, резонансная связь возникает непосредственно за счет взаимодействия электронного пучка со средой при переотражениях поверхностной волны между пучком и средой. В этом случае, при решении граничной задачи, резонансные слагаемые, описывающие неустойчивость, войдут через граничные условия в результате сшивки полей на границах электронного пучка.

Приступим теперь к более подробному изучению неустойчивости для поверхностной геометрии. Пусть пучок электронов распространяется на расстоянии h над поверхностью пространственно-периодической среды и движется параллельно ее поверхности со скоростью \vec{u} . Ось x выбрана вдоль направления движения пучка, а ось z – по направлению нормали к поверхности среды. Динамическая дифракция излучения в периодической среде формирует объемную трехмерную распределенную связь, обеспечивая режим генерации. Система векторов обратной решетки периодической структуры $\vec{\tau}_n = \{2\pi n_1 / d_1, 2\pi n_2 / d_2, 2\pi n_3 / d_3\}$ (d_i – элементарные периоды трансляции периодической среды), определяющая процесс дифракции, может быть направлена под произвольным углом к скорости электронов. Спектр излучения определяется величиной пространственного периода и углом дифракции. Зависимость частоты генерации от угла дает возможность плавной перестройки частоты. Замедленная электромагнитная волна, находящаяся в синхронизме с электронным пучком, модулирует плотность и плотность тока пучка. Эта модуляция ведет к развитию неустойчивости.

Запишем скорость и радиус-вектор i -го электрона в пучке в виде $\vec{v}_\alpha(t) = \vec{u} + \delta\vec{v}_\alpha(t)$, $\vec{r}_\alpha(t) = \vec{r}_{0\alpha} + \vec{u}t + \delta\vec{r}_\alpha(t)$, где $\delta\vec{v}_\alpha(t)$ и $\delta\vec{r}_\alpha(t)$ – возмущения плотности и скорости электрона за счет взаимодействия с замедленной волной. Из уравнений движения для электрона в поле электромагнитной волны в линейном по полю приближении получим:

$$\begin{aligned} \vec{\delta j}(z, k_x, k_y, \omega) = e \sum_{\alpha} \{ \vec{u} [\exp(-ik_x x_{0\alpha} - ik_y y_{0\alpha}) \times \\ \times (\delta(z - z_{0\alpha})(-ik_x \delta x_\alpha(\omega - k_x u) - ik_y \delta y_\alpha(\omega - k_x u)) - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \delta(z - z_{0\alpha}) \delta z_\alpha(\omega - k_x u))] + \\ + \delta\vec{v}_\alpha(\omega - k_x u) \delta(z - z_{0\alpha}) \exp(-ik_x x_{0\alpha} - ik_y y_{0\alpha}) \}, \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь $\{\delta x_\alpha, \delta y_\alpha, \delta z_\alpha, \delta\vec{v}_\alpha\}(\omega) = \int dt \exp(i\omega t) \{\delta x_\alpha, \delta y_\alpha, \delta z_\alpha, \delta\vec{v}_\alpha\}(t)$, $\vec{\delta j}(z, k_x, k_y, \omega) = \int dx dy \exp(-ik_x x - ik_y y) \vec{j}(z, x, y, \omega)$.

Динамика электронов описывается уравнением движения

$$\frac{d\delta\vec{v}_\alpha(t)}{dt} - \frac{e}{m\gamma c} [\delta\vec{v}_\alpha(t), \vec{H}_0] = \frac{e}{m\gamma} \{ \vec{E}(\vec{r}_\alpha(t), t) + \frac{1}{c} [\vec{u}\vec{H}(\vec{r}_\alpha(t), t)] - \frac{\vec{u}}{c^2} (\vec{u}\vec{E}(\vec{r}_\alpha(t), t)) \}. \quad (51)$$

В (51) считается, что электроны движутся в ведущем магнитном поле. Выполняя фурье-преобразование (51), получим

$$\begin{aligned}
\delta v_{x\alpha}(\omega) &= \frac{ie}{m\gamma^3\omega} \int \frac{dk'_x dk'_y}{(2\pi)^2} \exp(ik'_x x_{0\alpha} + ik'_y y_{0\alpha}) E_x(z_{0\alpha}, k'_x, k'_y, \omega + k'_x u), \\
\delta v_{y\alpha}(\omega) &= \frac{1}{\omega^2 - \omega_H^2} \int \frac{dk'_x dk'_y}{(2\pi)^2} \exp(ik'_x x_{0\alpha} + ik'_y y_{0\alpha}) - \\
&\quad - \left\{ \omega_H^2 \left(\frac{\omega}{\omega + k'_x u} E_z - \frac{iu}{\omega + k'_x u} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \frac{ie\omega}{m\gamma} \left(\frac{\omega}{\omega + k'_x u} E_y + \frac{k'_y}{\omega + k'_x u} E_x \right) \right\}, \\
\delta v_{z\alpha}(\omega) &= \frac{1}{\omega^2 - \omega_H^2} \int \frac{dk'_x dk'_y}{(2\pi)^2} \exp(ik'_x x_{0\alpha} + ik'_y y_{0\alpha}) \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{ie\omega}{m\gamma} \left(\frac{\omega}{\omega + k'_x u} E_z - \frac{iu}{\omega + k'_x u} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \omega_H^2 \left(\frac{\omega}{\omega + k'_x u} E_y + \frac{k'_y}{\omega + k'_x u} E_x \right) \right\}, \quad (52)
\end{aligned}$$

где $\omega_H = eH/(m\gamma c)$. Пусть распределение плотности электронов в пучке в поперечном направлении описывается профильной функцией $n(z_\alpha) = n_e f(z_\alpha)$, $\int dz f(z) = 1$. Тогда, подставляя (52) в (50) и считая, что начальное распределение электронов в направлениях x и y хаотично, получим для фурье-компоненты плотности следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\vec{j}(z, k_x, k_y, \omega) &= \frac{\omega_l^2}{4\pi} f(z) \left\{ \frac{i\omega}{\gamma^3 (\omega - k_x u)^2} E_x \vec{e}_x + \right. \\
&\quad - \omega_H \left\{ \frac{\omega - k_x u}{\omega} E_z - \frac{iu}{\omega} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right\} + i(\omega - k_x u) \left\{ \frac{\omega - k_x u}{\omega} E_y + \frac{k_y u}{\omega} E_x \right\} \left. \right\} \\
&\quad + \frac{\vec{u} k_y}{\omega - k_x u} \frac{\omega_l^2}{4\pi} f(z) \frac{-\omega_H \left\{ \frac{\omega - k_x u}{\omega} E_z - \frac{iu}{\omega} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right\} + i(\omega - k_x u) \left\{ \frac{\omega - k_x u}{\omega} E_y + \frac{k_y u}{\omega} E_x \right\}}{\gamma \{ (\omega - k_x u)^2 - \omega_H^2 \}} \vec{e}_y + \\
&\quad - \frac{i\vec{u}}{\omega - k_x u} \frac{\omega_l^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(f(z) \frac{i(\omega - k_x u) \left\{ \frac{\omega - k_x u}{\omega} E_z - \frac{iu}{\omega} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right\} + \omega_H \left\{ \frac{\omega - k_x u}{\omega} E_y + \frac{k_y u}{\omega} E_x \right\}}{\gamma \{ (\omega - k_x u)^2 - \omega_H^2 \}} \right). \quad (53)
\end{aligned}$$

Выражение для плотности тока (53) содержит слагаемые, соответствующие черенковскому и циклотронному резонансам. Если профильная функция распределения электронов в поперечном направлении имеет ступенчатый вид ($f(z) = 1$ в области расположения пучка и $f(z) = 0$ вне этой области), то дисперсионное уравнение в области пучка получается путем приравнивания детерминанта линейной системы

$$(k^2 c^2 - \omega^2) \vec{E} - c^2 \vec{k} (\vec{k} \vec{E}) = -4\pi i \omega \vec{\delta j}(\vec{k}, \omega) \quad (54)$$

к нулю. В уравнении (54) $\vec{\delta j}(\vec{k}, \omega)$ определяется из выражения (53) ($\vec{\delta j}(z, k_x, k_y, \omega) \sim \vec{\delta j}(\vec{k}, \omega) \exp(ik_z z)$).

Обсудим вкратце некоторые особенности решений дисперсионного уравнения, получаемого в результате этих действий, не интересуясь при этом циклотронным резонансом (считаем, что система находится вдали от него). При амплитуде магнитного поля такой, что циклотронная частота значительно превосходит ширину линии генерации ($\omega - k_x u \ll \omega_H$), решения дисперсионного

уравнения имеют вид $k_{bz} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2}$, если волна поляризована перпендикулярно

к плоскости, образованной векторами \vec{u} и \vec{k} , и

$k_{bz} = \pm \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2\right) \left(1 - \frac{\omega_l^2}{\gamma^3 (\omega - k_x u)^2}\right)}$, если волна поляризована перпендикулярно

к плоскости, образованной векторами \vec{u} и \vec{k} .

Первые два корня отвечают электромагнитным волнам, не взаимодействующим с электронным пучком. Последние два решения являются результатом взаимодействия электронного потока с электромагнитным полем.

В противоположном предельном случае $\omega - k_x u \gg \omega_H$ корни дисперсионного уравнения для обеих поляризаций имеют вид

$$k_{bz} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - \frac{\omega_l^2}{\gamma}}.$$

При определении структуры полей, возникающих в рассматриваемой системе, кроме дисперсионных уравнений и их решений для каждой из областей нужно использовать граничные условия сшивки полей на границах. Выведем эти условия исходя из самосогласованной системы уравнений движения и уравнений для электромагнитных полей. Если на границе раздела не возбуждаются поверхностные токи и заряды, то используются обычные условия равенства тангенциальных составляющих электрических и магнитных полей на поверхностях раздела. На резкой границе электронного пучка такие поверхностные токи существуют. Для определения этих токов выпишем два уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{\delta j}, \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (55)$$

Подставив в (55) выражение для $\vec{\delta j}$ из (53) и интегрируя левую и правую части равенств (55) в узкой области вблизи границы пучка, получим уравнения непрерывности в следующем виде:

$$\left[H_y + \frac{u}{c} \frac{\omega_i^2}{\gamma} f(z) \frac{(\omega - k_x u) \left\{ \frac{\omega - k_x u}{\omega} E_z - \frac{i u}{\omega} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right\} - i \omega_H \left\{ \frac{\omega - k_x u}{\omega} E_y + \frac{k_y u}{\omega} E_x \right\}}{(\omega - k_x u) \{ (\omega - k_x u)^2 - \omega_H^2 \}} \right]_{z_b} = 0,$$

$$[H_x]_{z_b} = 0,$$

$$[E_t]_{z_b} = 0. \quad (56)$$

Таким образом, тангенциальные компоненты напряженности электрического поля и компонента напряженности магнитного поля, параллельная вектору скорости, сохраняются при переходе через границу пучка. Разрыв испытывает тангенциальная компонента магнитного поля, перпендикулярная вектору скорости электронов \vec{u} . Несохранение этой величины вызвано индуцированными электромагнитной волной поверхностными токами, направленными вдоль вектора скорости электронов.

Из (56) следует, что при большой величине ведущего магнитного поля для черенковского типа взаимодействия компонента H_y также непрерывна на границе электронного пучка. В противоположном предельном случае, когда ведущее магнитное поле мало, при черенковском взаимодействии граничное условие для H_y принимает вид

$$\left[H_y + \frac{u}{c} \frac{\omega_i^2}{\gamma} f(z) \frac{\left\{ \frac{\omega - k_x u}{\omega} E_z - \frac{i u}{\omega} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right\}}{(\omega - k_x u)^2} \right]_{z_b} = 0. \quad (57)$$

Как было показано выше, в этом предельном случае дисперсионное уравнение (48), описывающее взаимодействие электронного пучка с электромагнитным полем, не содержит резонансных слагаемых. Вместо этого резонансное слагаемое входит в граничные условия (57).

Для нахождения условий генерации запишем выражения полей, возбуждаемых в рассматриваемой системе:

- 1) $\bar{e}_y \{ t \exp\{-ik_z(h + \delta)\} \exp\{ik\vec{r}\} + \sum_i \bar{e}_i m_i \exp\{ik_i \vec{r}\}, \quad z > h + \delta,$
- 2) $\bar{e}_y \{ a \exp\{ik_b \vec{r}\} + b \exp\{ik_b^{(-)} \vec{r}\} + \sum_i \bar{e}_i m_i \exp\{ik_i \vec{r}\}, \quad h < z < h + \delta,$
- 3) $\bar{e}_y \{ c \exp\{ik\vec{r}\} + d \exp\{ik^{(-)} \vec{r}\} + \sum_i \bar{e}_i m_i \exp\{ik_i \vec{r}\}, \quad 0 < z < h,$
- 4) $\sum_\alpha f_\alpha \exp\{ik^{(\alpha)} \vec{r}\} \bar{u}_\alpha(\vec{r}), \quad -D < z < 0,$
- 5) $\sum_\alpha g_\alpha \exp\{ik_i^{(-)} \vec{r}\}, \quad z < -D. \quad (58)$

В (58) используются следующие обозначения: $\vec{k} = (\vec{k}_\perp, k_z)$; $k_z = \sqrt{\omega^2 / c^2 - k_\perp^2}$; $\vec{k}_i = (\vec{k}_\perp + \vec{\tau}_\perp, k_{iz})$; $\vec{k}_i^{(-)} = (\vec{k}_\perp + \vec{\tau}_{i\perp}, -k_{iz})$; $k_{iz} = \sqrt{\omega^2 / c^2 - (\vec{k}_\perp + \vec{\tau}_\perp)^2}$. Набор волновых векторов $\{\vec{k}_i\}$ и $\{\vec{k}_i^{(-)}\}$ отвечает волнам, уходящим от системы (в случае, если k_{iz} действительно), для $z > h + \delta$ и $z < -D$ соответственно, или затухающим при удалении от системы (в случае, если k_{iz} мнимое).

$\{\vec{F}_\alpha = \exp\{i\vec{k}^{(\alpha)}\vec{r}\}\vec{u}_\alpha(\vec{r}), \alpha = 1, \dots, n\}$ – набор блоховских волн, возбуждаемых в пространственно-периодической среде, $\vec{k}_b = (\vec{k}_\perp, k_{bz})$, $\vec{k}_b^{(-)} = (\vec{k}_\perp, -k_{bz})$ – волновые векторы, соответствующие модам, взаимодействующим с электронным пучком,

$$k_{bz} = k_z \sqrt{1 + \frac{\omega_i^2 \omega_H^2}{\gamma^3 (\omega - k_x u)^2 \{(\omega - k_x u)^2 - \omega_H^2\}}}. \quad (59)$$

Как было показано выше, с электронным пучком взаимодействуют волны с определенной поляризацией, эти волны в (58) выделены отдельно. Остальные волны, которые не взаимодействуют с электронным пучком, записаны в (58) под знаком суммы. Суммирование производится по всем векторам обратной решетки $\vec{\tau}_i$ периодической системы, а также по всем зонам α -состояний фотонов в периодической среде. При написании k_{bz} в (59) считалось, что плотность электронного тока такая, что реализуется комптоновский режим генерации. При этом учитываются лишь слагаемые, отвечающие резонансу второго порядка, как вносящие в этом режиме определяющий вклад по сравнению с другими пучковыми слагаемыми. Для нахождения неизвестных коэффициентов в (58) используем выведенные выше условия непрерывности и произведем сшивку полей на границах электронного пучка, вакуума и периодической среды:

$$\begin{aligned} f &= a \exp\{ik_{bz}H\} + b \exp\{-ik_{bz}H\} + \\ &+ \frac{u \omega_i^2}{c \gamma \omega \{(\omega - k_x u)^2 - \omega_H^2\}} \frac{uk_z \eta}{\omega \{(\omega - k_x u)^2 - \omega_H^2\}} \{a \exp\{ik_{bz}H\} + b \exp\{-ik_{bz}H\}\}, \\ f &= s \{a \exp\{ik_{bz}H\} - b \exp\{-ik_{bz}H\}\}, \\ a \exp\{ik_{bz}h\} + b \exp\{-ik_{bz}h\} &+ \frac{u \omega_i^2}{c \gamma \omega \{(\omega - k_x u)^2 - \omega_H^2\}} \frac{uk_z \eta}{\omega \{(\omega - k_x u)^2 - \omega_H^2\}} \times \\ &\times \{a \exp\{ik_{bz}h\} + b \exp\{-ik_{bz}h\}\} = c \exp\{ik_z h\} + d \exp\{-ik_z h\}, \\ s \{a \exp\{ik_{bz}h\} - b \exp\{-ik_{bz}h\}\} &= c \exp\{ik_z h\} - d \exp\{-ik_z h\}. \quad (60) \end{aligned}$$

.....

В (60) выписаны условия сшивки на двух границах пучка $z = h$ и $z = H = h + \delta$, используются следующие обозначения:

$$s = \frac{k_{bz}}{k_z \left\{ 1 + \frac{\omega_l^2 \omega_H^2}{\gamma^3 (\omega - k_x u)^2 \{ (\omega - k_x u)^2 - \omega_H^2 \}} \right\}},$$

$$\eta = \frac{k_{bz}}{\omega \left\{ 1 + \frac{\omega_l^2 \omega_H^2}{\gamma^3 (\omega - k_x u)^2 \{ (\omega - k_x u)^2 - \omega_H^2 \}} \right\}}.$$

Условия шивки на границах замедляющей среды не приведены и заменяются многоточием, эти условия зависят от вида среды.

Разрешая (60) относительно волны, падающей на среду d , получим:

$$d = \exp\{-2\alpha h\} [1 - s^2 + 2\eta_1] \frac{\exp\{\alpha_b \delta\} - \exp\{-\alpha_b \delta\}}{(s+1)^2 \exp\{\alpha_b \delta\} - (s-1)^2 \exp\{-\alpha_b \delta\}} a, \quad (61)$$

где $\eta_1 = \frac{u}{c} \frac{\omega_l^2 u c k_z^2}{\gamma \omega^2 \{ (\omega - k_x u)^2 - \omega_H^2 \}}$, $\alpha = k_z / i$, $\alpha_b = k_{bz} / i$.

Заметим, что условие равенства амплитуды падающей на среду волны $d = 0$ при отсутствии электронного потока давало бы уравнение, определяющее собственные моды «холодного» резонатора. Поэтому, исходя из вида системы (60), связи между амплитудами (61), уравнение генерации для системы «электронный пучок + замедляющая система» может быть записано в виде

$$\frac{\exp\{-2\alpha h\}}{\gamma^3} \left\{ \frac{\omega_l^2}{(\omega - k_x u)^2} + \frac{\omega_l^2}{\{ (\omega - k_x u)^2 - \omega_H^2 \}} \right\} \frac{\exp\{\alpha_b \delta\} - \exp\{-\alpha_b \delta\}}{(s+1)^2 \exp\{\alpha_b \delta\} - (s-1)^2 \exp\{-\alpha_b \delta\}} = N(\vec{k}, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n, \omega). \quad (62)$$

В (62) функция $N(\vec{k}, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n, \omega)$ определяется замедляющей структурой и равенство ее нулю дает собственные моды этой структуры. При этом в случае замагниченного пучка уравнение генерации принимает вид

$$\frac{\exp\{-2\alpha h\}}{\gamma^3} \frac{\omega_l^2}{(\omega - k_x u)^2} \frac{\exp\{\alpha_b \delta\} - \exp\{-\alpha_b \delta\}}{(s+1)^2 \exp\{\alpha_b \delta\} - (s-1)^2 \exp\{-\alpha_b \delta\}} = N(\vec{k}, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n, \omega),$$

в случае «слабой» замагниченности оно записывается как

$$2 \frac{\exp\{-2\alpha h\}}{\gamma^3} \frac{\omega_l^2}{(\omega - k_x u)^2} \frac{\exp\{\alpha_b \delta\} - \exp\{-\alpha_b \delta\}}{(s+1)^2 \exp\{\alpha_b \delta\} - (s-1)^2 \exp\{-\alpha_b \delta\}} = N(\vec{k}, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n, \omega).$$

Из сравнения этих уравнений следует, что слагаемые, связанные с электронным пучком, в этих двух случаях отличаются по величине в два раза. Физическая причина этой разницы заключается в том, что в случае замагниченного пучка вклад в генерацию вносит только продольное движение электронов. В противоположном случае вклад в индуцированное излучение вносит как продольное, так и поперечное движение, причем эти два вклада равны по величине.

Следует особо отметить, что процесс генерации индуцированного излучения при пролете электронного пучка в вакууме существенно отличается от той картины, которая, казалось бы, должна иметь место, если взять усредненные показатели диэлектрической восприимчивости и подставить их в систему из уравнений Максвелла и уравнений движения. Например, слагаемое, связанное с электронным пучком в дисперсионном уравнении, описывающем неустойчивость электронов, пролетающих в бесконечной среде, $\sim \frac{\omega_l^2}{\gamma} \frac{(\bar{u}\bar{e})^2}{c^2} \sim \frac{\omega_l^2}{\gamma} |\chi|$, где χ – восприимчивость. В случае же пролета над поверхностью среды пучковое слагаемое, как следует из (62), пропорционально $\sim \frac{\omega_l^2}{\gamma^3}$. Очевидно – это совершенно разные зависимости. На этом вопросе более подробно мы еще остановимся ниже.

Решение генерационного уравнения (62) находится стандартным образом методом слабосвязанных мод [20]. Для этого проведем разложение (62) в области параметров, при которых система «электронный пучок + волна + периодическая среда» находится одновременно вблизи условий синхронизма, с одной стороны, и, вблизи значений для собственной моды «холодной» системы без электронного пучка, с другой стороны:

$$A \left\{ \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^2 - \omega_H^2} \right\} = N_0 + \frac{\partial N}{\partial v} v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial v^2} v^2 + \dots, \quad (63)$$

где $A = \exp\{-2\alpha h\} (1 - \exp\{-2\alpha_b \delta\}) \frac{\omega_l^2}{4\gamma^3 \omega^2}$, $\omega - k_x u = v$. Слагаемое N_0 пропор-

ционально поглощению фотонов ($\sim \chi_0''$), $\frac{\partial N}{\partial v}$ равно нулю в точке вырождения,

$\frac{\partial^2 N}{\partial v^2}$ равно нулю в точке трехкратного вырождения и т. д. Если поглощение

преобладает ($|N_0| \gg \frac{\partial N}{\partial v} v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial v^2} v^2 + \dots$), то развивается диссипативная неус-

тойчивость, при которой $v'' \sim j^{1/2}$. Если поглощение несущественно, то вдали

от точки вырождения $v'' \sim j^{1/3}$. В точке пересечения двух корней $v'' \sim j^{1/4}$, а

в точке s-кратного вырождения $v'' \sim j^{1/s+2}$.

Как мы видим из результатов (62), (63), в процессе генерации на поверхностной волне участвуют электроны, находящиеся на расстоянии $\leq \frac{u\lambda\gamma}{4\pi c}$ от перио-

дической структуры. В области коротких длин волн и слаборелятивистских пучков это может привести к серьезным проблемам, так как возрастают требования к прецизионной проводке пучка вблизи поверхности мишени. Такая ситуация имеет общий характер, она находит свое проявление и при развитии неустойчи-

ности электронных пучков в резонаторах и в объемных средах: при пролете электронов на расстояниях $> \frac{u\lambda\gamma}{4\pi c}$ от замедляющих элементов генерация будет экспоненциально подавлена. Покажем это на примере плоского волновода, на пластины которого нанесена небольшая модуляция электродинамических свойств. Чтобы не усложнять рассмотрение, не будем учитывать несущественные в принципиальном плане для описания этих эффектов процессы, связанные с поляризацией. Будем исходить из скалярного полевого уравнения

$$-\Delta\psi(\vec{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r}, \omega)\psi(\vec{r}, \omega). \quad (64)$$

Выписывая (64), мы не учитываем динамики вектора поляризации излучения (считаем поляризацию жестко заданной) и считаем волну поперечной (что справедливо при малой модуляции). В таком виде уравнение (64) является аналогом уравнения Шредингера с заменой потенциала на функцию диэлектрической проницаемости. Считаем, что $\varepsilon(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0(z, \omega) + \chi(\vec{r}, \omega)$, где z – поперечная координата волновода, а $\chi(\vec{r}, \omega)$ – модуляция диэлектрических свойств волновода. Уравнение для функции Грина невозмущенной задачи (64) имеет вид:

$$\left\{ -\Delta - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0(z, \omega) \right\} G_0(z, z', \vec{r}_l - \vec{r}_l', \omega) = \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} G_0^{-1}\psi &= \frac{\omega^2}{c^2} \chi\psi, \\ \psi(\vec{r}, \omega) &= \varphi_n(z) \exp\{i\vec{k}_l^{(n)} r_l^{(n)}\} + \frac{\omega^2}{c^2} \int d\vec{r}_l' dz' G_0(z, z', \vec{r}_l - \vec{r}_l', \omega) \chi(\vec{r}', \omega) \psi(\vec{r}', \omega), \\ \psi(z, \vec{q}, \omega) &= (2\pi)^2 \varphi_n(z) \delta(\vec{k}_l^n - \vec{q}) + \\ &+ \frac{\omega^2}{c^2} \int d\vec{r}_l' dz' G_0(z, z', \vec{r}_l - \vec{r}_l', \omega) [\chi(\vec{r}', \omega) \psi(\vec{r}', \omega)]_{\vec{q}}. \end{aligned} \quad (65)$$

Учитывая модуляцию структуры по теории возмущений и воспользовавшись тем, что $[\chi(\vec{r}, \omega) \psi(\vec{r}, \omega)]_{\vec{q}} = (2\pi)^2 \varphi_n(z) \sum \chi_\tau \delta(\vec{k}_l^{(n)} - \vec{q} - \vec{\tau})$ из (65) получим:

$$\begin{aligned} \psi(z, \vec{q}, \omega) &= (2\pi)^2 \varphi_n(z, \vec{k}_l^n, \omega) \delta(\vec{k}_l^n - \vec{q}) + \\ &+ \frac{\omega^2}{c^2} \sum \exp\{\vec{k}_l^{(n)} - \vec{\tau}\} \int d\vec{r}_l' dz' \varphi_n(z', \vec{k}_l^n, \omega) \chi_\tau(z') G_0(z, z', \vec{k}_l^{(n)} - \vec{\tau}, \omega). \end{aligned} \quad (66)$$

Используемая в (66) собственная функция $\varphi_n(z, \vec{k}_l^n, \omega)$ и функция Грина удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d^2}{dz^2} + q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0(z, \omega) \right) \varphi_n(z, \bar{q}, \omega) &= 0, \\ \left(-\frac{d^2}{dz^2} + q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0(z, \omega) \right) G_0(z, z', \bar{q}, \omega) &= \delta(z - z'). \end{aligned} \quad (67)$$

Считая, что металлические пластины расположены в плоскостях $z = 0$ и $z = L$, область $0 < z < d$ заполнена диэлектриком с однородной по занимаемому пространству проницаемостью ε_0 , остальную часть волновода занимает вакуум. В этом случае волновая функция удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d^2}{dz^2} + q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varphi_n(z, \bar{q}, \omega) &= 0, & d < z < L; \\ \left(-\frac{d^2}{dz^2} + q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 \right) \varphi_n(z, \bar{q}, \omega) &= 0, & 0 < z < d, \end{aligned} \quad (68)$$

а функция Грина – уравнению (заметим, что в функции Грина нас интересует область $z' < d$, так как в (65) интегрирование идет по этой области)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d^2}{dz^2} + q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) G_0(z, z', \bar{q}, \omega) &= 0, & d < z < L; \\ \left(-\frac{d^2}{dz^2} + q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 \right) G_0(z, z', \bar{q}, \omega) &= \delta(z - z'), & 0 < z < d. \end{aligned} \quad (69)$$

Нетрудно найти решения этих уравнений. Чтобы не «затуманивать» сущность возникающих явлений, приведем решения для простейшего случая двух металлических пластин и малого возмущения диэлектрической проницаемости в области пластин. Простое, но более громоздкое рассмотрение диэлектрика с большим χ , занимающего существенный объем волновода, не изменит получаемого вывода. В этом случае (68) и (69) переписутся как

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d^2}{dz^2} + q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varphi_n(z, \bar{q}, \omega) &= 0, \\ \varphi_n(z = 0, \bar{q}, \omega) &= \varphi_n(z = L, \bar{q}, \omega) = 0, \\ \left(-\frac{d^2}{dz^2} + q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) G_0(z, z', \bar{q}, \omega) &= \delta(z - z'), \\ G_0(z = 0, z', \bar{q}, \omega) &= G_0(z = L, z', \bar{q}, \omega) = 0, \\ G_0(z = 0, z' - 0, \bar{q}, \omega) &= G_0(z = 0, z' + 0, \bar{q}, \omega), \\ \frac{d}{dz} G_0(z = 0, z' - 0, \bar{q}, \omega) - \frac{d}{dz} G_0(z = 0, z' + 0, \bar{q}, \omega) &= 1. \end{aligned} \quad (70)$$

В результате решения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
q_n^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{L^2}, \\
\psi_n &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left\{\frac{\pi n}{L} z\right\}, \\
G_0 &= \begin{cases} -\frac{\sinh[s(z'-L)]}{s \sinh(sL)} \sinh(sz), & z < z', \\ -\frac{\sinh(sz')}{s \sinh(sL)} \sinh[s(z-L)], & z > z'. \end{cases} \quad (71)
\end{aligned}$$

Используя (71), (65), (66), получим окончательное выражение для собственной функции:

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{r}, \omega) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left\{\frac{\pi n}{L} z\right\} \exp\{i\vec{q}_l^{(n)} \vec{r}_l^{(n)}\} - \\
&- \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{\omega^2}{c^2} \sum \exp\{(\vec{q}_l^{(n)} - \vec{\tau}) \vec{r}_l\} \sinh\left\{\sqrt{(\vec{q}_l^{(n)} - \vec{\tau})^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} (z-L)\right\} \times \\
&\times \int dz' \sin\left\{\frac{\pi n}{L} z'\right\} \chi_\tau(z') \frac{\sinh\left\{\sqrt{(\vec{q}_l^{(n)} - \vec{\tau})^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} z'\right\}}{\sqrt{(\vec{q}_l^{(n)} - \vec{\tau})^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \sinh\left(\sqrt{(\vec{q}_l^{(n)} - \vec{\tau})^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} L\right)}. \quad (72)
\end{aligned}$$

Из полученного выражения для поля (72) можно сделать следующий вывод: волна, находящаяся в синхронизме с электронным пучком ($\omega - (\vec{q}_l^{(n)} - \vec{\tau})\vec{u} = 0$),

будет экспоненциально подавлена при $\frac{2\pi z}{\beta\lambda\gamma} > 1$, независимо от формы модуля-

ции среды. Этот вывод носит общий характер: очевидно, что аналогичную задачу по теории возмущений можно решить для любой пространственно-периодической среды, когда восприимчивость мала и условия сильной связи волн не выполнены. В частности, это справедливо, если пучок нерелятивистских или слабoreлятивистских частиц движется в кристалле, а мы интересуемся излучением в рентгеновском диапазоне. Тогда излучение рентгеновских квантов также будет экспоненциально подавлено при выполнении неравенства $\frac{2\pi a}{\beta\lambda\gamma} \gg 1$, где a – характерный размер элементарной ячейки кристалла. При этом интенсивность и спектр излучения будут существенным образом отличаться от соответствующих величин, вычисленных при заданных восприимчивостях среды, получаемых при квантовом усреднении по ансамблю уравнений электромагнитного поля [17].

В работе рассмотрены некоторые теоретические вопросы, связанные с неустойчивостью электронного пучка в объемных пространственно-

периодических средах. Из полученных результатов следует, что объемная трехмерная распределенная связь (ОРОС) предоставляет богатые возможности для управления динамикой неустойчивости пучка и коллективных процессов излучения. К числу таких возможностей относятся: изменение в точках вырождения функциональной зависимости порогового тока и коэффициента усиления от длины области генерации (43'); изменение и регулирование добротности резонатора с помощью параметров, определяющих геометрию дифракции (35'); возможность генерации излучения в областях параметров, соответствующих меньшим потерям (46); возможность перехода от режима генерации на попутной волне к режиму генерации на встречной волне. Эти свойства неустойчивости пучка в условиях ОРОС могут быть использованы в широком диапазоне спектра: от СВЧ-излучения до рентгеновских частот. Причем для каждой области на первый план выходят разные факторы из набора приведенных преимуществ объемной генерации. Так, для генерации жестких рентгеновских квантов важны возможность резкого уменьшения поглощения излучения и создание объемного зеркала распределенного по всему объему взаимодействия электронного пучка с электромагнитной волной, предоставляемой ОРОС, а также возможность изменения дисперсионных характеристик излучения. В СВЧ-диапазоне важным применением неустойчивости в условиях ОРОС, на наш взгляд, является возможность селекции мод в сверхразмерных волноводах за счет многоволновой дифракции при создании мощных излучателей. Преимуществом в этой области является так и возможность регулирования добротности резонатора. Важным свойством неустойчивости в объемной геометрии является и относительно простая возможность перестройки частоты генерации излучения путем изменения геометрии дифракции. Такая возможность следует из чисто кинематических соотношений – выполнения условия Брэгга $k = |\vec{k} + \vec{\tau}|$, так как частота, определяемая этим условием, будет зависеть от геометрии и плавно изменяться при плавном изменении геометрии.

Литература

1. *Baryshevsky V. G.* // Nucl. Instr. Meth. 2000. Vol. A445. P. 281.
2. *Адищев Ю. Н., Барышевский В. Г., Воробьев С. А.* // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 293.
3. *Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D.* // Phys. Lett. 1976. Vol. A57. P.183.
4. *Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D.* // J. Physique. 1983. Vol. 44. № 8. P. 913.
5. *Барышевский В. Г., Феранчук И. Д.* // Вести АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1985. № 2. С. 79.
6. *Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D.* // Phys. Lett. 1984. Vol. A102. P. 141.
7. *Батраков К. Г., Дубовская И. Я.* // Вести АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1990. № 5. С. 82.
8. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya.* // J. Phys. D. 1991. Vol. 24. P. 1250.
9. *Baryshevsky V. G., Dubovskaya I. Ya., Zege A. V.* // Phys. Lett. 1990. Vol. 149. P. 90.
10. *Барышевский В. Г., Батраков К. Г., Дубовская И. Я.* // Вести АН БССР. Сер. физ.-тех. наук. 1992. № 3. С. 99.
11. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya.* // Nucl. Instr. Meth. 1996. Vol. A375. P. 292.
12. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya.* // Nucl. Instr. Meth. 1995. Vol. A358. P. 508.
13. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya. et al.* // Nucl. Instr. Meth. 1997. Vol. A393. P. 71.
14. *Ginzburg N. S., Peskov N. Yu., Sergeev A. S.* // J. Electr. 1993. Vol. 4, № 4. P. 301.

15. Гинзбург Н.С., Песков Н.Ю., Сергеев А. С. // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. № 9. С. 23.
16. Песков Н. Ю., Гинзбург Н. С., Денисов Г. Г., Сергеев А. С. и др. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, № 8. С. 72.
17. Чжан Ш. Многоволновая дифракция рентгеновских лучей в кристаллах. М., 1987.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Физическая кинетика. М., 1979.
19. Барышевский В.Г. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 6. С. 19.
20. Ерохин Н. С., Кузнецов М. В., Мусеев С. С. Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике. М., 1982.

SOME THEORETICAL QUESTIONS OF BEAM INSTABILITIES IN VOLUME SPATIALLY-PERIODIC STRUCTURES

K. G. Batrakov

The electron beam instability in spatial periodical structures is studied. The dispersion equations to describe such instabilities are derived and discussed. It is shown that the various regimes of generation exist depending on the quantities of the electron beam velocity spread, quantum recoil and linewidth of spontaneous emission. The effect of quantum recoil can influence on instability process in the optical and infrared spectral range even. The generation equation describing the starting currents and increments of an absolute instability are derived. It is shown that in vicinity of diffraction root degeneration the new law of dependence of starting generation current and gain on system parameters arises ((35'), (43), (43')). The advantages of volume distributed feedback (VDFB) are analyzed. The influence of guiding magnetic field on generation process leads to gain doubling in the case when the transverse motion contributes to instability. The generation in the surface scheme and in the case when electron propagate near the slowing elements is studied. It is shown in this work that VDFB is more preferred alternative in comparison with ordinary distributed feedback and creation of new type of FEL, the volume FEL (VFEL) has a good perspectives.