А. Э. МАРГОЛИН, В. И. СТРАЖЕВ, А. Я. ТРЕГУБОВИЧ

УНИТАРНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ, В КВАНТОВОЙ КОСМОЛОГИИ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе исследуется проблема унитарной эволюции в квантовой теории поля с индефинитной метрикой, квантовой космологии и квантовой теории вычислений на примерах некомпактной сигма-модели, волновой функции Вселенной тоннельного типа в полуклассической аппроксимации и квантовой теории информации, порожденной геометрической фазой.

Основная проблема, возникающая в процессе работы с теориями, обладающими индефинитной метрикой, – проблема унитарной эволюции, так как если невозможно отделить гильбертовы секторы с разными знаками нормы при помощи S-матрицы, то такие теории являются физически бессодержательными, в силу того что приводят к отрицательным вероятностям.

В то же время в моделях квантовой теории поля индефинитная метрика появляется достаточно часто. Упомянем только исследования по некомпактным сигма-моделям [1–2], уравнению Дирака – Кэлера [3], некомпактным конформным теориям [4–5], описывающим динамику суперструны, супергравитации. Попытка исключить появление индефинитной метрики в процессе вторичного квантования или путем наложения дополнительных ограничений в конечном счете не приводит к успеху [2–6]: в соответствующих амплитудах рассеивания возникают добавки, нарушающие унитарность теории [7–8]. Однако квантовополевые модели с некомпактными группами симметрий можно корректно проквантовать и при наличии индефинитной метрики [3, 9, 10, 12]. Описание алгебры операторов в таких случаях было начато в работе [11].

Существенно, что индефинитная метрика появляется не только в квантовополевых теориях, обладающих некомпактными группами симметрий, но также и в квантовой космологии.

Примыкает к данной проблематике и задача проведения квантовых вычислений в теории квантового компьютера.

1. ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА В РЕАЛИСТИЧЕСКИХ КВАНТОВОПОЛЕВЫХ ТЕОРИЯХ

В настоящем разделе описаны общие свойства алгебры операторов для пространств с индефинитной метрикой и показано, что возможно свести вычисление

3. Зак. 2458.

матричных элементов операторов, обладающих полной системой собственных состояний, к вычислениям внутри гильбертовых секторов пространства Крейна.

Будем рассматривать псевдогильбертовы пространства состояний с невырожденной индефинитной метрикой и фиксированным разложением на гильбертовы секторы:

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}^{+} \oplus \mathrm{H}^{-}. \tag{1.1}$$

В дальнейшем такие пространства будем именовать пространствами Крейна, согласно общепринятой терминологии [13]. Тогда имеют силу следующие утверждения [11–12]:

Предложение 1.1. Пусть A[H] – алгебра операторов на H. Тогда для любого оператора $R \in \mathrm{A[H]}$: $R = R_0 + R_1$, где R_0 сохраняет $\mathrm{H}^{+}, \mathrm{H}^{-}$ т. е. R_0: $\mathrm{H}^{\pm} \to \mathrm{H}^{\pm}$, а R_1 их «перемешивает»: R_1: $\mathrm{H}^{\pm} \to \mathrm{H}^{\mp}$. Таким образом, алгебра A[H] разлагается в прямую сумму подпространств:

$$\mathrm{A[H]} = \mathrm{A}_0\mathrm{[H]} \oplus \mathrm{A}_1\mathrm{[H]}. \tag{1.2}$$

Предложение 1.2. Эрмитовы или косоэрмитовы операторы $R_1 \in \mathrm{A}_1\mathrm{[H]}$ имеют либо нулевой спектр, либо собственные состояния с нулевой нормой; таким образом, оператор $R_1 \in \mathrm{A}_1\mathrm{[H]}$ имеет нулевое ожидаемое в любом своем собственном состоянии: $<\eta \mid R_1 \mid \eta> = 0$. Если проекции системы собственных состояний на гильбертовы секторы H^{+}, H^{-} порождают полную ортонормированную систему во всем пространстве H, то получаем

Предложение 1.3. Эрмитовы либо косоэрмитовы операторы $R_1 \in \mathrm{A}_1\mathrm{[H]}$ имеют нулевое ожидаемое в любом состоянии $\mu \in \mathrm{H}$: $<\mu \mid R_1 \mid \mu> = 0$.

В силу последнего предложения такие операторы не могут описывать наблюдаемые в физической теории. Отметим также, что для произвольного оператора $R_1 \in \mathrm{A}_1\mathrm{[H]}$ все собственные состояния, не принадлежащие нулевому спектру, лежат в прямой сумме гильбертовых секторов $\mathrm{H}^{+} \oplus \mathrm{H}^{-}$.

Предложение 1.4. Пусть квантовополевая модель со знаконеопределенным гамильтонианом, пространство состояний которой является пространством Крейна (1.1), обладает дискретной симметрией D, генерирующей на $\mathrm{H} = \mathrm{H}^{+} \oplus \mathrm{H}^{-}$ – канонический оператор Крейна J. Тогда теория унитарна, т. е. не содержит отрицательных вероятностей, а D в ней является оператором суперотбора.

Следует отметить некоторые специфические черты формальной и физической S-матриц квантовополевых теорий, наделенных индефинитной метрикой.

Пусть имеется некоторая квантовополевая модель, полное фоковское пространство которой V наделено индефинитной метрикой. Мы налагаем только одно совершенно естественное и необходимое минимальное ограничение (условие на физические состояния) для рассмотрения реальных теорий: если начальное состояние является физическим состоянием, то конечное состояние также является физическим и наоборот. Обычно под «физическим» понимается состояние с положительной нормой, т. е. унитарность соответствующей S-матрицы автоматически влечет условие отсутствия отрицательных вероятностей.

Если же пространство физических состояний H наделено индефинитной метрикой, то из требования унитарности формальной S-матрицы не следует, вообще говоря, исключения состояний с отрицательной нормой. В этом случае физическая S-матрица не должна перемешивать состояния с разными знаками нормы. Подавляющее большинство моделей с индефинитной метрикой имеют гамильтониан, являющийся эрмитовым оператором, что соответствует унитарности формальной матрицы рассеяния.

Пусть S – формальная (или полная) матрица рассеяния и P – проектор V на подпространство физических состояний H: PV = H. Тогда начальное ограничение на физические состояния может быть записано так:

$$(1 - P^+) SP = 0, \qquad P^+ S(1 - P) = 0,$$

$$\text{или } SP = P^+SP = P^+S'.$$

Предполагается, что H разлагается в прямую сумму H = $H_0 \oplus$ V, где H_0 – некое пространство (либо гильбертово, либо Крейна) и V_0 состоит из вырожденных состояний, т. е. состояний с нулевой нормой, ортогональных ко всему H. Состояния из V_0 в самосогласованной теории не должны вносить вклады в физические процессы.

Пусть P_0 – ортогональная проекция V на H_0, так что $P_0V = H_0$ ортогонально к $(1- P_0)$V. Тогда из $(1-P_0)^+ P_0 = P_0{}^+(1-P_0)$ следует эрмитовость P_0:

$$P_0{}^+ = P_0.$$

Если $P^1{}_0$ – одна из проекций V на V_0, то очевидно, что

$$(P^1{}_0)^+ P_0 = P_0 (P^1{}_0) = 0.$$

Обозначая $P = P_0 + P^1{}_0$, немедленно получаем

$$P^+P = P_0.$$

И если гамильтониан теории $\mathcal{H}$ эрмитов, то формальная S-матрица является автоматически унитарной:

$$S^+ S = 1.$$

Отсюда, однако, не следует унитарность ее редукции на подпространства физических состояний H либо H_0, т. е. унитарность соответствующей

$$S_{phys} = P^+ S_{phys} P,$$

которая, как видно из свойств проекторов $P, P_0, P^1{}_0$, унитарна в факторе $H/V_0=H_0$, если

$$S_{phys} S^+{}_{phys} = S^+{}_{phys} S_{phys}.$$

В случае, если H_0 – пространство с положительно определенной нормой, то проблем с вероятностной интерпретацией у теории нет, что справедливо для большинства известных теорий: квантовой электродинамики, неабелева компактного Янга – Миллса и др. Но и случай, когда H_0 имеет структуру пространства Крейна, также физически допустим, если существует процедура, позволяющая отделить состояния с положительной и отрицательной нормами и порожденная естественной симметрией модели, на что указано в предложении 1.4. Известны два широких класса моделей с индефинитной метрикой, обсуждаемые в физике высоких энергий: теория Янга – Миллса с неабелевой некомпактной группой симметрий и некомпактная сигма-модель имеют различные подпространства вырожденных состояний V_0. И, как показано в работах [9, 10], оба они удовлетворяют предложению 1.4. В первом случае V_0 включает продольные и скалярные моды квантов калибровочного поля, во втором – равно нулю. В следующем разделе будет подробно рассмотрен второй случай, обсуждение первого см. в [10, 12, 14, 15].

2. КВАНТОВЫЕ НЕКОМПАКТНЫЕ СИГМА-МОДЕЛИ

Первоначально появление сигма-моделей было вызвано потребностью построить феноменологические лагранжианы, описывающие низкоэнергетическую мезонную физику сильных взаимодействий в докварковую эпоху в начале 60-х гг. XX в. [16, 17]. Появление квантовой хромодинамики «не выбросило», однако, их за борт современной науки, т. к. в размерности пространства – времени, равной двум, они хорошо моделировали именно пертурбативные и непертурбативные хромодинамические эффекты: асимптотическую свободу, конфайнмент, инстантонный вакуум и др. [18].

В последние 15–20 лет нелинейные сигма-модели также стали возникать в описании скалярного сектора супергравитации. Причем в реалистических теориях супергравитации (например, SU(8) [19]), которые являются низкоэнергетическим пределом безаномальных теорий суперструн SO(32), $E_8 \times E_8$ [20, 21], возникают σ-модели некомпактного типа, т. е. модели с некомпактной полупростой группой симметрии.

В ряде простых случаев [22, 23] прямым вычислением было показано, что для моделей некомпактного типа имеет место стандартная феноменология нелинейных сигма-моделей – динамическая генерация масс с асимптотической свободой, что является предпосылкой генерации составного калибровочного бозона в супергравитации [24].

В то же время какой-либо общей теории, описывающей σ-модели такого типа, нет. Основная трудность в их исследовании – наличие индефинитной метрики в квантовом описании [6, 7, 25–27]. В указанных выше работах обычно предлагалась проверка унитарности S-матрицы в пространстве H^+, содержащем четное число состояний с отрицательной нормой в рамках приемлемой теории возмущений. Чаще всего в качестве такой теории выступает 1/N-разложение, которое особенно хорошо работает для O(N, 1) и U(N, 1)-типов модели.

В работе [9] показано, что такие случаи – проявление общей закономерности, обусловленной наличием дополнительной дискретной симметрии, генерирующей оператор суперотбора в соответствующем пространстве квантовых состояний [9, 12]. Там же был исследован вопрос о специфике спонтанного нарушения симметрии в таких моделях. Настоящий раздел основан на работах [9, 12], а также некоторых результатах, полученных в последнее время [28], и развивает систематический подход к изучению квантовых некомпактных сигма-моделей.

2.1. ДИСКРЕТНАЯ СИММЕТРИЯ В КВАНТОВЫХ МОДЕЛЯХ С НЕКОМПАКТНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ГРУППОЙ

Рассмотрим лагранжеву плотность

$$L = L(\tilde{\varphi}_i(x), \partial_\mu \tilde{\varphi}_i(x)), \tag{2.1}$$

которая является знаконеопределенной квадратичной формой, инвариантной относительно действия некомпактной группы $\tilde{G}$ на мультиплет полей $\tilde{\varphi}=(\tilde{\varphi}_i)_{i\in I}$. Таким же свойством обладает в этом случае и гамильтониан H модели (2.1). Мультиплет полей $\tilde{\varphi}=(\tilde{\varphi}_i)_{i\in I}$ преобразуется по неприводимому конечномерному глобальному представлению $\pi, \tilde{G}$:

$$\pi:\tilde{G}\to GL(V)\,,\ V=\{\tilde{\varphi}_i\}_{i\in I}\ , \tag{2.2}$$

такому, что при ограничении на максимальную компактную подгруппу $G\subset\tilde{G},\pi$ становится вполне приводимым и разбивается на прямую сумму двух неприводимых представлений:

$$\pi(G)=\pi_1(G)\oplus\pi_2(G);\qquad V=V_1\oplus V_2\ ,$$

$$V_1=\{\tilde{\varphi}_i\}_{i\in I_1}\ ,$$

$$V_2=\{\tilde{\varphi}_i\}_{i\in I_2}\ ,\qquad I_1+I_2=I\,, \tag{2.3}$$

где φ_j – полевые компоненты, входящие с положительными, а $\hat{\varphi}_j$ – с отрицательными квадратами в выражение (2.3). Условиям (2.1) – (2.3) удовлетворяют, например, инвариантные квадратичные формы некомпактных классических групп [29, 30].

Пусть $\tilde{g}$ и g – алгебра Ли групп $\tilde{G}$ и G соответственно, и в разложении Картана $\tilde{g}$ относительно g [29] $\{Q^A\}$ – генераторы $\tilde{G}$, $\{Q^{\epsilon}\}$ – генераторы g, а оставшиеся генераторы, относящиеся к некомпактной части $g^{\perp}$ относительно присоединенной формы Киллинга, – $\{Q^{\hat{b}}\}$. Тогда для дифференциала $d\pi$ представления π соответствующей алгебры Ли $\tilde{g}$ имеем:

$$d\pi:\tilde{g}\to gl(V)\,,$$

$$d\pi=d\pi_1\oplus d\pi_2\,,$$

$$\pi(Q^a)V_1\subset V_1,\quad \pi(Q^a)V_2\subset V_2,$$

$$\pi(Q^{\hat{b}})V_1\subset V_2,\quad \pi(Q^{\hat{b}})V_2\subset V_1,$$

Последние четыре соотношения показывают, что генераторы компактной части разложения Картана сохраняют каждое из подпространств $V_i(i=1,2)$, а генераторы некомпактной части $g^{\perp}$ эти подпространства перемешивают. Действие группы $\tilde{G}$ в представлении π обычно записывают в инфинитезимальной форме [31, 32]:

$$\Phi_i(x)\to\Phi_i^{'}(x)=e^{i\varepsilon Q}\Phi_i(x)e^{-i\varepsilon Q}\ ,$$

где

$$e^{i\varepsilon Q}\Phi(x)^{-i\varepsilon Q}=\Phi(x)+i\varepsilon[Q,\Phi(x)]+\dots ,$$

$$\delta\Phi_i(x)=i\varepsilon^{A}[Q^{A},\Phi_i(x)]=i\varepsilon^{A}t_{ij}^{A}\Phi_j .$$

В этой формуле t_{ij}^{A} – ij-й элемент матрицы $t^{A}=d\pi(Q^{A})$, представляющей генератор Q^{A}. Этот набор матриц подчиняется тем же коммутационным соотношениям, что и $\{Q^{A}\}$:

$$[t^{A},t^{B}]=f_{AB}^{c}t^{c}.$$

Под скобкой $[Q^{A}, \phi_i(x)]$ понимается коммутатор Q^{A} и $\phi_i(x)$ в операторном смысле. Переходя к квантовой формулировке обсуждаемых моделей, отметим, что из знаконеопределенности гамильтониана H следует необходимость введения в пространство состояний индефинитной метрики.

Рассмотрим важный пример.

1. Некомпактная $O(N, 1)$ сигма-модель [25–27].

Мультиплет полей $(\phi_1, \dots , \phi_N, \sigma)$ преобразуется по фундаментальному представлению группы $O(N, 1)$. Обозначая через $\Phi = (\phi_1, \dots , \phi_N)$, гамильтониан для такой модели записываем так:

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2}[(d_0\Phi)^2+(d_i\Phi)^2-(d_0\sigma)-(d_i\sigma)^2+\lambda(\Phi^2-\sigma^2+\frac{1}{2}f_0)]$$

$$(d_0\Phi)^2=\sum_{n=1}^{N}d_0\phi_n d_0\phi_n,\ \Phi^2=\sum_{n=1}^{N}\phi_n\phi_n , \qquad (2.4)$$

f_0 – константа связи, λ – лагранжев множитель. Отметим, что поле σ аналогично индефинитному гармоническому осциллятору с гамильтонианом:

$$H'=-\tfrac{1}{2}\left(p^2+q^2\right).$$

Существуют два метода квантования таких систем [6, 7].

1. Используется пространство Фока с индефинитной метрикой, в котором достигается положительная определенность собственных значений оператора энергии. Производящий функционал в формализме континуального интеграла будет иметь в этом случае следующий вид:

$$Z[J]=\int\limits_{\mathrm{Im}\,q(t)}dq(t)\exp\left\{i\int dt\left(L\left(q(t)-\tfrac{i}{2}\varepsilon q^2+Jq\right)\right)\right\}$$

где интегрирование $q(t)$ проводится вдоль мнимой оси от $-i\infty$ до $i\infty$ и $Z=-(\dot q^2-q^2)/2$.

2. Во втором методе используется пространство Фока с положительно определенной метрикой и отрицательными значениями энергии, а производящий функционал выглядит так:

$$Z[J] = \int\limits_{\mathrm{Re}\,q(t)} dq(t)\exp\left\{i\int dt\left(L\left(q(t)+\frac{i}{2}\varepsilon q^2 + Jq\right)\right)\right\},$$

где интеграл берется уже вдоль действительной оси. Знаки перед $i\varepsilon$ в обоих методах выбираются так, чтобы сделать интегралы сходящимися.

Но, как было показано в работе [7], во втором методе (с положительно определенным пространством Фока) унитарность в многопетлевых вакуумных амплитудах перехода нарушается, и поэтому приемлемым является только первый метод квантования, когда используется пространство состояний с индефинитной метрикой. Последняя возникает при каноническом квантовании теории, благодаря наличию знаконеопределенного тензора η в квадратичной форме H. Действительно, если $|0\rangle$ – вакуумное состояние, то для операторов рождения и уничтожения полей σ, ϕ_α имеем:

$$\langle 0|a^i(p)a^j(p')^+|0\rangle = 2p^0\eta^{ij}\delta(p-p'),$$

и, следовательно, σ квантуется со знаком минус в перестановочных соотношениях. Пространство состояний теории:

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}^+ \oplus \mathrm{H}^-.$$

Здесь H^+ – гильбертов сектор, содержащий четное число состояний с отрицательной нормой и произвольное число с положительной, а H^- – аналогичный сектор, но уже с нечетным числом состояний с отрицательной нормой и любым для них числом – с положительной. В работах [22, 27] показано, что S-матрица модели (2.4) сохраняет H^+ и унитарна в нем. Этот факт доказан для размерности пространства Минковского < 4, так как σ-модели в пространстве – времени большей размерности пертурбативно неперенормируемы. Поэтому в [27] H^+ названо физическим пространством: $\mathrm{H}^+ = \mathrm{H}_{phys}$, и унитарность S-матрицы доказывается для этого пространства. Фактически унитарность S-матрицы в H^+ есть следствие дополнительной дискретной симметрии D, сохраняющей $\mathrm{H} = \mathrm{H}^+ \oplus \mathrm{H}^-$ и имеющей в матричном представлении вид $\eta = \begin{pmatrix} 1_N & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ [9]. Приведем вначале общие рассуждения, касающиеся гамильтониана вида (2.4) и существенно использующие результаты, полученные в [9, 12]. Рассмотрим операторы, определенные на пространстве H. Алгебру таких операторов обозначим через $\mathcal{A}(\mathrm{H})$ как в [9, 12]. Тогда все основные свойства $\mathcal{A}(\mathrm{H})$, доказанные в [9, 12], имеют место. В частности:

а) каждый оператор $R \in \mathcal{A}(\mathrm{H})$ однозначно разлагается в прямую сумму $R = R_0 + R_1$, где $R_0 : \mathrm{H}^\pm \to \mathrm{H}^\pm$, а $R_1 : \mathrm{H}^\pm \to \mathrm{H}^\mp$;

б) всякий эрмитов либо косоэрмитов оператор кодиагонального типа $R=R_1$ имеет нулевое среднее значение в любом своем собственном состоянии. Кроме этого, всякий оператор такого вида имеет нулевое среднее значение в любом из гильбертовых секторов H^+, H^-;

в) алгебра $A(\mathrm{H})$ снабжена Z_2-градуировкой и инволюцией D, согласованной с этой градуировкой.

Если лагранжиан L сохраняется D, то, очевидно, и S-матрица D-инвариантна. Для полевых компонент и генераторов группы имеем: $\hat{\varphi}_\alpha \in A_0(\mathrm{H})$, $\hat{\varphi}_\beta \in A_1(\mathrm{H})$, $Q^a \in A_0(\mathrm{H})$, $Q^{\hat{b}} \in A_1(\mathrm{H})$. Так как каждая из компонент (φ_α), $(\hat{\varphi}_\beta)$ является эрмитовым оператором, то таковым является и лагранжиан L, т. е. $L \in A_0^э(H)$. Следовательно, S-матрица унитарна, причем сохраняет каждый из гильбертовых секторов H^+, H^- в силу того, что она D-инвариантна, т. е. $S \in A_0(\mathrm{H})$. Таким образом, S-матрица – унитарная S_{phys} для квантовой теории, описываемой лагранжианом L.

Применяя приведенные выше рассуждения к рассматриваемому примеру $O(N,1)$ σ-модели, получаем вывод [9]:

Оператор суперотбора D при действии на глобальные заряды Q^A и полевые компоненты (ϕ_α,σ) совпадает с матричным оператором η, который сохраняет гамильтониан H, S-матрицу и приводит, таким образом, к правилу суперотбора в пространстве состояний H:

$$\eta : Q^{\mathrm{A}} \to \eta Q^{\mathrm{A}}\eta;\ (\phi,\sigma)\to(\phi,-\sigma);\ \eta(\mathrm{H})=\mathrm{H}.$$

Выбор в работах [22, 27] подпространства H^+, которое сохраняется S-матрицей, эквивалентен выбору дополнительного квантового числа +1 – собственного значения оператора $D = \eta$ в пространстве H. Таким образом, унитарность S-матрицы в сигма-модели – следствие существования дополнительной дискретной симметрии, определяющей правило суперотбора в пространстве состояний теории. Симметрия D индуцирована инволюцией Картана алгебры Ли $\tilde{g}$ при фиксированном вложении максимальной компактной подалгебры g, однако существование D и все свойства инвариантны относительно этого вложения, т. е. не зависят от него.

Как известно, двумерные сигма-модели обладают рядом замечательных свойств: асимптотической свободой, динамической генерацией массы, динамической генерацией калибровочного бозона [7, 22, 25]. Кроме этого, некомпактная нелинейная сигма-модель описывает скалярный сектор любой реалистической теории супергравитации, которые в свою очередь являются низкоэнергетическими пределами суперструнных теорий. Проверка унитарности S-матрицы, проведенная в [22, 27], справедлива только в рамках теории возмущений ($1/N$ разложения).

В данном разделе приведено доказательство унитарности, справедливое и вне рамок теории возмущений. Отметим также, что все приведенные рассуждения вполне очевидно справедливы для σ-моделей вида $O(N, M)$ и $U(N, M)$ [34].

2.2. К ТЕОРЕМЕ ГОЛДСТОУНА В МОДЕЛЯХ С НЕКОМПАКТНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ГРУППОЙ СИММЕТРИИ

В предыдущем параграфе предполагалось, что операторы $Q^A(x)$, $\varphi_\alpha(x)$, $\hat{\varphi}_\beta(x)$ «хорошо определены» в пространстве $\mathrm{H} = \mathrm{H}^+ \oplus \mathrm{H}^-$. При этом в случае ненарушенной вакуумной симметрии принималось, что

$$Q^A|0\rangle = 0. \qquad (2.5)$$

Однако при спонтанном нарушении симметрии условие (2.5) перестает выполняться [33, 35]. Спонтанное нарушение симметрии фактически означает, что операторы Q^A не определены (или плохо определены) на вакуумном состоянии $|0\rangle$ и, следовательно, на всех линейных комбинациях, его содержащих. Если обозначить $\mathrm{pr}|0\rangle : H \to C|0\rangle$ – соответствующую проекцию на вакуумную прямую, то для $U(Q)^A$ области определения оператора Q^A имеем:

$$U(Q)^A = Ker\, pr|0\rangle.$$

Очевидно, $Ker\, pr|0\rangle = \tilde{\mathrm{H}} = \tilde{\mathrm{H}} \oplus \tilde{\mathrm{H}}^-$, где $\tilde{\mathrm{H}}^{\pm} = \mathrm{H}^{\pm} \cap Ker\, pr|0\rangle$. И для алгебры операторов $A(\tilde{\mathrm{H}})$ на $\tilde{\mathrm{H}}$, построенной аналогично $A(\mathrm{H})$, справедливы все утверждения подразд. 2.1.

В этой ситуации теорема Голдстоуна имеет некоторые особенности, связанные с тем, что компактные Q^a и некомпактные $Q^{\hat{b}}$ генераторы $\tilde{g}$ действуют по-разному. Она формулируется следующим образом.

Теорема. Пусть в квантовой модели с лагранжианом L (2.1) и некомпактной группой внутренней симметрии $\tilde{G}$ для некоторого $\phi \in V : \langle 0|\phi|0\rangle \neq 0$, где $V = \{\phi_\alpha\}$ – пространство представления $\tilde{G}$, натянутое на мультиплет полей, входящих в состав L.

Тогда:

а) если симметрия $\tilde{G}$ спонтанно нарушена только в компактной части, то возникают голдстоуны только с положительным знаком нормы;

б) если симметрия спонтанно нарушена только в некомпактной части, то возникают голдстоуны с отрицательной нормой;

в) в случае спонтанного нарушения симметрии как компактной, так и в некомпактной части могут возникать голдстоуны с разными знаками нормы.

В работах [9, 12] показано, как приведенный анализ применяется в конкретной ситуации в случае спонтанного нарушения симметрии в некомпактной $O(N, 1)$ сигма-модели.

2.3. ПЕРЕНОРМИРУЕМОСТЬ И УНИТАРНОСТЬ

Как известно, если некоторая квантовополевая модель обладает симметрией непрерывной либо дискретной, то теория считается перенормируемой только тогда, когда перенормировка не разрушает исходной симметрии. В противном случае появляются различного рода аномалии, о некоторых из них скажем далее. Будем рассматривать только некомпактные σ-модели (разд. 1), т. к. именно они охватывают наиболее широкий класс, практически всех физически интересных случаев.

Прежде всего следует сделать несколько замечаний:

1. Рассматриваются только нелинейные σ-модели, т. к. в линейных сигма-моделях, предложенных Гелл-Манном и Леви в 1960 г. [16], появляется член, явно нарушающий инвариантность относительно рассмотренной нами в разд. 1 дискретной симметрии D, когда непрерывная группа симметрий G некомпактна.

2. Размерность пространства времени d всюду ≤ 4, т. к. известно, что в противном случае сигма-модель неперенормируема. В большинстве известных случаев $d = 2$.

Вернемся теперь к началу пункта. В рассматриваемом случае перенормировка должна сохранять как непрерывную G-симметрию, так и введенную дискретную симметрию D, т. е. появляющиеся в каждом порядке теории возмущений контрчлены не должны менять общую форму лагранжиана. Предполагается, что первоначально теория регуляризована соответствующим образом (например, при помощи размерной регуляризации [36]), и т. к. последняя не затрагивает внутренних степеней свободы (т. е. перестановочна с G и D), то является допустимой.

Следует отметить, что сохранение G-симметрии не влечет автоматически сохранения D-симметрии, поскольку могут появиться контрчлены «смешанного» типа, содержащие поля из разных по группе H мультиплетов π_1 и π_2 (формула (2.3)) и явно нарушающих D-инвариантность. Однако несимметричные (неинвариантные) контрчлены приводят к несимметричным функциям Грина:

$$G_N(g_1,\ldots,g_N) = \langle 0|T\varphi_{\gamma_1}(g_1)\ldots\varphi_{\gamma_N}(g_N)|0\rangle \neq \langle 0|T\varphi^D_{\gamma_1}(g_1)\ldots\varphi^D_{\gamma_N}(g_N)|0\rangle,$$

где $\varphi^D_i(g_i)$ – соответствующее поле под действием оператора D. Откуда немедленно следует: G_N содержит нечетное число полей, порождающих отрицательную норму, что означает

$$G_N(g_1,\ldots,g_N) = \langle h_+, h_-\rangle = 0, \text{где } h_+ \in H^+, h_- \in H^-,$$

а последняя формула имеет место, т. к. $\mathrm{H}^+ \perp \mathrm{H}^-$ по определению.

Таким образом, могут иметь смысл только D-инвариантные контрчлены, коль скоро квантование проводится в пространстве с невырожденной индефинитной метрикой. Рассуждая чуть-чуть иначе, можно сказать так: поскольку все свободные пропагаторы и все взаимодействия инвариантны относительно D-симметрии, расходимости оказываются симметричными, так что неинвариантные контрчлены не требуются. Отсюда совершенно очевидно D-сохранение соответствующих тождеств Уорда.

В конкретных вычислениях $O(N,M)$ и $SU(N,M)$ сигма-модели чаще всего рассматриваются в пертурбативном подходе в рамках $1/N$-разложения, где M берется фиксированным (в большем числе случаев $M = 1$). Соответствующая теория является при этом мультипликативно перенормируемой и, естественно, при этом все контрчлены имеют тот же вид, что и члены исходного лагранжиана, но с соответствующими мультипликативными параметрами ренормгруппы. В таком подходе G-

инвариантность сохраняется, как известно, специальным подбором ренормгрупповых параметров, в то время как D-инвариантность следует автоматически. Таким образом, в этом случае нет различия между компактным и некомпактным вариантами. Случай спонтанного нарушения G-симметрии не вносит никаких существенных изменений в рассуждения, что показано в [9, 12].

2.4. ДИНАМИЧЕСКИЙ КАЛИБРОВОЧНЫЙ БОЗОН И НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Для некомпактной группы G имеет место известное утверждение о том, что нелинейная G/H сигма-модель калибровочно эквивалентна «линейной» модели с $G_{\mathrm{global}} \times H_{\mathrm{local}}$ симметрией. Этот факт, по-видимому, был впервые отмечен для компактного случая, рассмотренного в работе [37] (см. также [38]), и затем перенесен на некомпактный случай [39] в связи с изучением $SU(8)$ супергравитации [19]. Доказательство этого факта в [24], в принципе, имеет место и в случае некомпактной G. Небольшие модификации касаются только замены знакоопределенной метрики на g (алгебра Ли G) индефинитной метрикой Киллинга η_e^A, унитарного представления $g(x)$ группы G конечномерным представлением и соответственно элементов $g^+(x)$ на $g^{-1}(x)$.

Отметим, что нас будет интересовать в основном случай, когда H – максимальная компактная подгруппа, т. к. именно он встречается во всех интересных приложениях.

Таким образом, как и в стандартном случае, в некомпактной нелинейной сигма-модели динамически появляется калибровочный бозон [24] и возможно по общему рецепту получить «низкоэнергетические теоремы», описывающие амплитуды процессов, в которых участвуют голдстоуны. Однако т. к. все голдстоуны согласно соответствующему пункту теоремы подразд. 2.2 появляются только в секторе H^-, то отсюда немедленно следует утверждение:

Все матричные элементы процессов, содержащие нечетное число голдстоунов, равны нулю.

В остальном все правила вычислений такие же, как и в компактном случае с заменой δ^{ab} на тензор Киллинга η^{ab}.

2.5. ЗАМЕЧАНИЕ О КИРАЛЬНЫХ АНОМАЛИЯХ В НЕКОМПАКТНЫХ СИГМА-МОДЕЛЯХ

К настоящему моменту квантовые аномалии в нелинейных сигма-моделях достаточно хорошо изучены. Всплеск публикаций на эту тему пришелся на 1984–1985 гг. [40–42]. В это время были получены достаточные условия как отсутствия, так и сокращения киральных аномалий в нелинейных сигма-моделях В работах [43–47] был подведен окончательный итог изучению киральных аномалий в сигма-моделях. Однако речь всюду шла о случае компактной сигма-модели. В [28] авторы получили следующий необходимый критерий отсутствия аномалий в квантовых некомпактных сигма-моделях: для того чтобы некомпактная $\tilde{G}/H$ сигма-модель, где H – максимальная компактная подгруппа группы $\tilde{G}$, не имела киральных аномалий, необходимо, чтобы соответствующее представление группы H в пространстве фермионов было приводимым, вещественным и поднимающимся до группы

$\tilde{G}$, либо группа H была с самого начала безаномальна. Другими словами, основное отличие от общего случая – это приводимость соответствующего кирального представления.

Отсюда следует, что фундаментальные представления комплексных полупростых групп не годятся, поскольку остаются неприводимыми при ограничении на свою вещественную форму (следовательно, на максимальную компактную подгруппу). И, наоборот, хорошо известные примеры некомпактных [7, 43, 44], сигма-моделей $SO(p,q)/SO(p)\times SO(q)$ и $SU(p,q)/SU(p)\times SU(q)\times U(1)$ являются подтверждением этого результата, т. к. представления $SO(p)\times SO(q)$ и $SU(p)\times SU(q)\times U(1)$ полностью удовлетворяют всем перечисленным требованиям.

3. УНИТАРНОСТЬ В КВАНТОВОЙ КОСМОЛОГИИ

Представление волновой функции Вселенной (ВФВ) Ψ возникло сразу же после того, как Б. ДеВитт в [48] и Д. А. Уилер в [49] независимо друг от друга предложили каноническое квантование гравитации. В таком подходе Ψ должна удовлетворять аналогу уравнения Шредингера для квантовой механики – уравнению Уилера – ДеВитта:

$$\left(\frac{1}{2h^{1/2}}\frac{\delta}{\delta h_{ij}}h^{1/2}\Im_{ij,kl}\frac{\delta}{\delta h_{kl}}-{}^{(3)}R-2\lambda-8\pi G T_{00}\right)\Psi=0, \tag{3.1}$$

где используемые обозначения соответствуют указанным в работе [48]. В частности, h_{ij} – 3-метрика на границе ∂M 4-мерного многообразия M, на котором рассматривается соответствующая квантовая теория; h – ее детерминант; R – соответствующая ей скалярная кривизна; $\Im_{ij,kl}$ – метрика суперпространства всех метрик на границе; λ – космологическая постоянная ; G – гравитационная постоянная Ньютона; T_{00} – нулевая компонента тензора энергии-импульса полей материи φ .

Из уравнения (3.1) следует, однако, что $\Psi=\Psi[h_{ij},\varphi]$ не зависит от времени, и это порождает проблему вероятностной интерпретации теории.

Существует два основных подхода к решению этой проблемы. Первый из них приводит к описанию ВФВ в виде функционального интеграла в эвклидовом режиме, т. е. по положительно определенным метрикам и выражению для соответсвующей плотности вероятности dP в тех же терминах [50]. Второй подход восходит к оригинальной работе ДеВитта [48] и выражает dP через сохраняющийся ток Клейна – Гордона , так как уравнение (3.1) – многомерный аналог уравнения Клейна – Гордона с переменной массой, т. е.

$$dP=J^a d\Sigma_a, \tag{3.2}$$

$$J^a=-\frac{i}{2g^{ab}}(\Psi^*\nabla_b\Psi\text{-}\Psi\nabla_b\Psi^*), \tag{3.2а}$$

где

$$\nabla_a J^a=0 \tag{3.2б}$$

и Ψ^*– функция комплексно-сопряженная Ψ; $g^{\alpha\beta}$ – 4-метрика на M, которая при ограничении на ∂M совпадает с h_{ij}; ∇_α– соответствующая ковариантная производная; J^α в формуле (3.2а) – соответствующий ток Клейна – Гордона; $d\Sigma_\alpha$ – элемент 3-мерной поверхности. При этом сохранение вероятности dP гарантируется сохранением тока J^α. Оба варианта решения имеют свои трудности. Основная трудность первого из них заключается в следующем: хотя плотность вероятности dP является положительно-определенной величиной, интеграл от этой величины расходится, так что саму вероятность P нельзя нормировать [51]. Во втором подходе указанная трудность исчезает, однако возникает новая – возможность появления отрицательных вероятностей, что, как известно, является характерной чертой уравнения Клейна–Гордона. Действительно, как видно из (3.2–3.2б), ток Клейна – Гордона, а следовательно, и плотность вероятности dP изменяют знак при переходе от функции Ψ к комплексно-сопряженной функции Ψ^*. Таким образом, второй подход порождает индефинитную метрику. Следует отметить, что на данном этапе проблема возникает главным образом тогда, когда имеет место полуклассическая аппроксимация [52–54], так как пока именно в этом случае физические величины являются вычислимыми. В работе [56] с помощью критерия, полученного в [55, 57], показано, что если ВФВ Ψ – функция туннельного типа, то Ψ «эволюционирует» унитарно в каждом из гильбертовых секторов $H^+{}_{grav}$ и $H^-{}_{grav}$, а само разложение

$$H_{grav} = H^+{}_{grav} \oplus H^-{}_{grav} \tag{3.3}$$

можно выбрать каноническим.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФАЗА И КВАНТОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Фундаментальные успехи, достигнутые за последние 20 лет в физике твердого тела и нелинейной оптике, позволили говорить о принципиально новом способе хранения информации, когда ее бит представляет собой не электрический сигнал, а квантовое состояние некоторой системы, приготовленное и контролируемое с достаточной степенью точности. Возникшая вслед за этим идея преобразования такой квантовой информации путем интерференции состояний, управляемой внешними параметрами, делает возможной реализацию основных логических элементов с помощью квантовых объектов. Так, в 80-х гг. в работах Фейнмана и Дойча [58, 59] возникла идея квантового компьютера, в фундамент которой легли основные понятия квантовой механики: квантовое состояние как бит информации и унитарные операторы на пространстве состояний как вычисления.

И хотя высказанные в этих работах идеи и по сей день далеки от практической реализации, рост числа публикаций по этой тематике за последние десять лет принял экспоненциальный характер. Были, в частности, предложены различные способы реализации квантовых вычислений (см., например, [60] в качестве обзора). Недавно в работах [61, 62] была предложена модель голономного квантового компьютера (ГК), в которой квантовые вычисления реализуются неабелевой [63] фазой Берри [64]. Соответствующее унитарное преобразование возникает при циклическом адиабатическом изменении параметров вырожденной параметрической квантовой системы и смешивает собственные состояния одного и того же вырожденного уровня энергии. Эти преобразования имеют вид

$$\varphi_n(T) = U(C)\varphi_n(0), \tag{4.1}$$

где $U(C)$ – P-упорядоченная экспонента,

$$U(C) = P\exp\left(i\oint_C A_\mu(\vec{\lambda})d\lambda^\mu\right), \quad A_\mu = i\left\langle \varphi_{nb} \,|\, \nabla_\mu \varphi_{nb} \right\rangle, \tag{4.2}$$

а φ_{na}, составляющие вместе вектор φ_n, – собственные состояния параметрической системы с гамильтонианом $H(\vec{\lambda})$, управляемой N внешними параметрами λ_μ, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_N)$, соответствующие энергетическому уровню E_n, вырожденному с кратностью s_n (т. е. $a = 1, ..., s_n$). Интеграл в (4.2) берется по замкнутой кривой C, описываемой вектором $\vec{\lambda}$ в пространстве параметров, т. е. $\vec{\lambda}(T) = \lambda(0)$. Чтобы введенные преобразования имели смысл квантовых вычислений, нужно контролировать их с помощью внешних параметров в любой момент времени. Для этого в свою очередь необходимо знать «потенциал» A_μ (его иногда называют потенциалом Вильчека – Зи) как функцию λ_μ, поэтому актуальной задачей является установление такой зависимости для достаточно широкого класса систем.

Несмотря на то что в работах [61, 62] был сделан ряд шагов в указанном направлении, универсальный метод вычисления A_μ до сих пор отсутствует, поэтому цель данной работы – предложить метод вычисления потенциала Вильчека – Зи для конечноуровневых систем с постоянным спектром и произвольным вырождением.

Рассмотрим систему с N адиабатически меняющимися параметрами $\lambda_\mu(t)$ и гамильтонианом $H(\vec{\lambda})$. Согласно адиабатической теореме выполняется квазистационарное уравнение Шредингера

$$H(\vec{\lambda})\ \varphi_{ia} = E_i\ \varphi_{ia}, \quad i = 1, ..., n; \ a = 1, ..., s_i\ . \tag{4.3}$$

Спектр предполагаем стационарным, т. е.

$$H(\vec{\lambda}(t)) = U(\vec{\lambda}(t))H(0)U^+(\vec{\lambda}(t)). \tag{4.4}$$

Потенциал A_μ есть, вообще говоря, некоторая $s_i \times s_i$-матрица. Рассмотрим вначале случай полного отсутствия вырождения, когда $s_i = 1$. В этом случае формулы (4.1) и (4.2) упрощаются и принимают вид

$$\varphi_m(T) = \exp(i\gamma_m(C))\varphi_m(0), \ \gamma_m(C) = \oint_C A^{(m)}{}_\mu(\vec{\lambda})\ d\lambda^\mu, \tag{4.5}$$

где

$$A^{(m)}{}_\mu(\vec{\lambda}) = i\ \left\langle \varphi_m \middle| \nabla_\mu\ \ \varphi_m \right\rangle = i\ \left\langle m \middle| \nabla_\mu m \right\rangle, \tag{4.6}$$

Для сокращения записи будем писать $|m\rangle$ вместо $|\varphi_m\rangle$. Обозначим через $H_\perp$ матрицу, получающуюся из гамильтониана вычеркиванием последних строки и столбца, и предположим, что

$$\det\ (H_\perp - E_m) \neq 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{4.7}$$

Тогда нормированный вектор состояния можно представить в виде

$$\vec{m} = \frac{(\xi_m,\ 1)}{(1+|\vec{\xi}_m^{\,2}|)^{1/2}}. \tag{4.8}$$

Выражая $\vec{\xi}_m$ из уравнения на собственные значения, имеем

$$\vec{\xi}_m = (H_\perp - E_m)^{-1}\ \vec{h},\ h_i = -H_{in}. \tag{4.9}$$

Замечая, что потенциал (4.6) можно представить в виде

$$A_\mu = \frac{i}{2}\ (\vec{m}^*\nabla_\mu\vec{m} - \vec{m}\nabla_\mu\vec{m}^*),$$

окончательно получаем

$$A_\mu = \frac{i}{2}\ \frac{\vec{\xi}_m^*\nabla_\mu\vec{\xi}_m - \vec{\xi}_m\nabla_\mu\vec{\xi}_m^*}{(1+|\vec{\xi}_m|^2)^{1/2}}. \tag{4.10}$$

Нетрудно проверить, что в частном случае спина j в магнитном поле, когда гамильтониан является трехдиагональной матрицей $H = \hbar\omega_0\vec{B}\vec{J}$, фаза Берри, соответствующая проекции спина m, равна

$$\gamma_m(C) = m\Omega(C),$$

где $\Omega(C)$ – телесный угол, под которым виден из начала координат конфигурационного пространства контур C, описываемый вектором $\vec{B}$. Таким образом, из формулы (4.10) как частный случай следует хорошо известный результат, представленный в работе [64].

Вернемся к общему случаю вырожденной системы. Обозначим через $H_\perp$ матрицу, полученную из H вычеркиванием s_m последних строк и столбцов. Не нарушая общности, предположим справедливость условия (4.7) для вновь введенной матрицы $H_\perp$. Обозначим s_m собственных векторов, относящихся к энергии E_m, через $\vec{\xi}_{ma}$, $a = 1,\ldots,s_m$. Из уравнения на собственные значения получаем

$$\vec{\xi}_{ma} = (H_\perp - E_m)^{-1} h\vec{c}_a, \tag{4.11}$$

где $\vec{c}_a$ – произвольные векторы размерности s_m, которые могут быть выбраны ортонормированными, а h – $(n - s_m)\times s_m$ -матрица:

$$h = -\begin{pmatrix} H_{1,\, n-s_m+1} & H_{1,\, n-s_m+2} & \dots & H_{1,\, n} \\ H_{2,\, n-s_m+1} & H_{2,\, n-s_m+2} & \dots & H_{2,\, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n-s_m, n-s_m+1} & H_{n-s_m,\, n-s_m+2} & \dots & H_{n-s_m,\, n} \end{pmatrix}.$$

После ортогонализации $\vec{\xi}_{ma}$ получаем ортонормированный базис собственного подпространства H, соответствующего энергии E_m (для упрощения записи индекс m опущен):

$$\vec{z}_a = \frac{1}{\det\ \Gamma_{a-1}} \begin{pmatrix} & & & \vec{x}_1 \\ & \Gamma_{a-1} & & \vdots \\ \left\langle \vec{\xi}_a \middle| \vec{\xi}_1 \right\rangle & \left\langle \vec{\xi}_a \middle| \vec{\xi}_2 \right\rangle & \dots \left\langle \vec{\xi}_a \middle| \vec{\xi}_{a-1} \right\rangle & \vec{x}_a \end{pmatrix}, \qquad (4.12)$$

где $\vec{x}_b = (\vec{\xi}_b,\ \vec{c}_b)$, а

$$\mathrm{T}_a = \begin{vmatrix} 1 + \left\langle \vec{\xi}_1 \middle| \vec{\xi}_1 \right\rangle & \left\langle \vec{\xi}_1 \middle| \vec{\xi}_2 \right\rangle & \dots & \left\langle \vec{\xi}_1 \middle| \vec{\xi}_a \right\rangle \\ \left\langle \vec{\xi}_2 \middle| \vec{\xi}_1 \right\rangle & 1 + \left\langle \vec{\xi}_2 \middle| \vec{\xi}_2 \right\rangle & \dots & \left\langle \vec{\xi}_2 \middle| \vec{\xi}_a \right\rangle \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \left\langle \vec{\xi}_a \middle| \vec{\xi}_1 \right\rangle & \left\langle \vec{\xi}_a \middle| \vec{\xi}_2 \right\rangle & \dots & 1 + \left\langle \vec{\xi}_a \middle| \vec{\xi}_a \right\rangle \end{vmatrix} = 1 + Z_a^+ Z_a. \qquad (4.13)$$

Здесь $(n - s_m) \times a$-матрица Z_a состоит из первых a столбцов $(n - s_m) \times s_m$-матрицы $Z = (H_\perp - E_m)^{-1} h$. Воспользовавшись выражениями (4.2) и (4.12), получаем окончательное выражение для потенциала Вильчека – Зи в виде матричнозначной 1-формы:

$$A = \frac{i}{2} \frac{g_{ab}^{ij}\ \ (\vec{\xi}_j^* d\vec{\xi}_i - d\vec{\xi}_j^* \vec{\xi}_i) + 2\omega_{ab}}{\det\ \ (1 + Z_{a-1}^+ Z_{a-1})\ \det\ \ (1 + Z_{b-1}^+ Z_{b-1})},\ 1 \le i \le a;\ 1 \le j \le b, \qquad (4.14)$$

где производится суммирование по i, j в указанных выше пределах, а величины g_{ab}^{ij}, ω_{ab} определяются формулами

$$g_{ab}^{ij} = \Gamma_a^i \Gamma_b^{j*},\ \omega_{ab} = \left\langle \vec{\xi}_j \middle| d\left(\operatorname{Im} g_{ab}^{ij}\right) \vec{\xi}_i \right\rangle + \sum_{i=1}^{\min(a,b)} g_{ab}^{ii}. \qquad (4.15)$$

Здесь Γ_a^i – алгебраическое дополнение $\vec{\xi}_i$ в Γ_a. Заметим, что замена базиса $\vec{c}_a^{\,'} = U_{ab}(\vec{\lambda})\ \vec{c}_b$ индуцирует калибровочное преобразование

$$A^{'} = UAU^+ + i(dU)U^+,$$

как того и следовало ожидать.

Таким образом, формулы (4.14) и (4.15) дают решение задачи нахождения потенциала Вильчека – Зи для конечноуровневой системы с произвольным вырождением и постоянным во времени спектром с единственным ограничением, накладываемым на контур C условием (4.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cohen Y., Rabinovici E.* // Phys. Lett. 1983. V. B124. P. 371.
2. *Davis A. C., Macforlane A. J., van Holten G.W.* //Phys. Lett. 1983. V. B125. P. 151.
3. *Плетюхов В. А., Стражев В. И.* //Теорет. матем. физ. 1991. Т. 87. С. 173.
4. *Bars I.* //Nucl. Phys. 1990. V. B334. P. 125.
5. *Petropoulos P. M. S.* //Phys. Lett. 1990. V. B236. P. 151.
6. *Van Holten G. W.* //J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 1420.
7. *Morozumi T., Nojiri S.* //Prog. Theor. Phys. 1986. V. 75. P. 677.
8. *Xsu M. D , Xin G. P.* //Phys. Rev. 1981. V. D24. P. 471.
9. *Margolin A. E., Strazhev V. I.* //Phys. Lett. 1990. V. B249. P. 438.
10. *Margolin A. E., Strazhev V. I.* //Mod. Phys. Lett. 1992. V. A7. P. 2747.
11. *Марголин А. Э., Стражев В. И.* //Изв. АН БССР. 1989. № 3. С. 79.
12. *Марголин А. Э.* О квантовополевых моделях с некомпактной группой внутренней симметрии. Мн., 1989.
13. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М., 1986.
14. *Марголин А. Э., Стражев В. И.* //Изв. АН БССР. 1990. № 3. С. 84.
15. *Margolin A. E., Strazhev V. I.* // Quantuam Systems. New Trends and Methods: Proc. of the Intern. Workshop. Minsk, 1994. World Sci., Singapore, 1995. P. 123.
16. *Gell-Mann M., Levy M.* //Nuov. Cim. 1960. V. 16. P. 705.
17. *Де Альфаро В., Фубини С., Фурлан Г., Росетти К.* Токи в физике адронов. М., 1976.
18. *Novikov V. A., Shifman M. A., Vainstein A. I., Zakharov V. I.* // Phys. Rep. 1984. V. 116. P. 103.
19. *Cremmer E., Julia B.* //Nucl. Phys. 1979. V. B159. P. 141.
20. *Green M. B., Schwarz J. H.* //Phys. Lett. 1985. V. 151B. P. 21.
21. *Frampton P. H., van Dam H., Yamamoto K.* //Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1114.
22. *Gomes M., Ha Y. K.* //Phys. Lett. 1984. V. 145B. P. 235.
23. *Gomes M., Ha Y. K.* //Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 2390.
24. *Bando M., Kugo T., Yamawaki K.* //Phys. Rep. 1988. V. 164. P. 217.
25. *Van Holten G. W.* //Phys. Lett. 1984. V. 135B. P. 427.
26. *Cohen Y., Rabinovici E.* //Phys. Lett. 1983. V. 127B. P. 251.
27. *Brunini S.A., Gomes M., da Silva A. J.* //Phys. Rev. 1988. V. 38D. P. 706.
28. *Марголин А. Э., Стражев В. И.* //Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. С. 53.
29. *Желобенко Д. П., Штерн А. И.* Представления групп Ли. М., 1983.
30. *Дьедонне К.* Геометрия классических групп. М., 1974.
31. *Ченг Т. П., Ли Л. Ф.* Калибровочные теории в физике элементарных частиц. М., 1987.
32. *Райдер Л.* Квантовая теория поля. М., 1987.
33. *Golgstone J.* //Nuov. Cim. 1961. V. 19. P. 154.
34. *Amit D. J., Davis A. C.* //Nucl. Phys. 1983. V. 229B. P. 221.
35. *Хуанг К.* Кварки, лептоны и калибровочные поля. М., 1985.
36. *Коллинз М.* Перенормировка. М., 1988.
37. *Cremmer E., Julia B.* //Phys. Lett. 1978. V. 80B. P. 48.
38. *D'Adda A., di Vecchia P., Lüsher M.* //Nucl. Phys. 1978. V. B146. P. 63.
39. *Julia B., Luciani F.* //Phys. Lett. 1980. V. 90B. P. 270.

4. Зак. 2458.