

Для случаев других распределений аналогичным способом получены результаты для плотности распределения реальной ставки процента и ее числовых характеристик.

Литература

1. Харин Ю. С., Зуев Н. М. Теория вероятностей: учебное пособие. – МН.: БГУ, 2004.
2. Харин Ю. С., Степанова М. Д. Практикум на ЭВМ по математической статистике. – МН.: 1987.
3. Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1989.
4. Энциклопедия финансового риск-менеджмента / Под редакцией А.А.Лобанова и А.В.Чугунова. – М: Альпина Паблишер, 2003. – 786 с.
5. Кирлица В. П. Финансовая математика: руководство к решению задач: учебное пособие / В.П.Кирлица. – Мн.: ТетраСистемс, 2005. – 192 с.
6. Воднев В. Т. Основные математические формулы / В.Т.Воднев, А.Ф.Наумович, Н.Ф.Наумович; под ред. Ю.С.Богданова. – Мн.: Выш. Школа, 1980. – 336 с.

АНАЛИЗ ОЦЕНОК КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ С УСТОЙЧИВЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

И. И. Комаров

Пусть $X_n, n \in Z$ – симметричный стационарный процесс с индексом устойчивости $\alpha, 0 < \alpha \leq 2$. Если $\alpha=2$, то ковариационная функция $R(n)=E(X_n X_0) - E(X_n)E(X_0), n \in Z$ описывает структуру зависимости процесса $X_n, n \in Z$. В случае $0 < \alpha < 2$ ковариационная функция не определена, поэтому возникает необходимость введения мер зависимости для случайного процесса $X_n, n \in Z$, которые являлись бы расширением понятия ковариационной функции.

В качестве такой меры может выступать функция [2]:

$$I_n(\theta_1, \theta_2) = -\ln E(e^{i(\theta_1 X_n + \theta_2 X_0)}) + \ln E(e^{i\theta_1 X_n}) + \ln E(e^{i\theta_2 X_0}), \quad (1)$$

где $\theta_1, \theta_2 \in R, n \in Z$.

В случае $\alpha=2$, введённая функция связана с ковариационной функцией следующим образом:

$$-I_n(1, -1) = R(n). \quad (2)$$

1. МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА AP(1)

Рассмотрим процесс авторегрессии первого порядка AP(1).

$$X_n - b_1 X_{n-1} = \varepsilon_n,$$

где ошибки ε_n - независимые, симметричные α - устойчивые случайные величины ($\varepsilon_n \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$) с характеристической функцией

$$Ee^{it\varepsilon} = \varphi_{\varepsilon}(t) = e^{-\sigma^{\alpha}|t|^{\alpha}}. \quad (3)$$

Исследуем задачу построения статистических оценок для коэффициента авторегрессии b_1 .

Рассмотрим функцию

$$-I_1(1, -1) = \ln E(e^{i(X_1 - X_0)}) - \ln E(e^{iX_1}) - \ln E(e^{-iX_0}). \quad (4)$$

Определим распределение случайных величин $X_1 - X_0$, X_1 , X_0 . Для этого воспользуемся следующим свойством устойчивых законов распределения [3].

Свойство 1. Если Y_1, Y_2 - независимые α - устойчивые случайные величины, $Y_i \sim S_{\alpha}(\sigma_i, 0, 0)$, $i = 1, 2$, то

$$a_1 Y_1 + a_2 Y_2 \sim S_{\alpha}((|a_1|^{\alpha} \sigma_1^{\alpha} + |a_2|^{\alpha} \sigma_2^{\alpha})^{1/\alpha}, 0, 0). \quad (5)$$

Тогда для случайной величины X_0 имеем

$$X_0 = \varepsilon_0 \sim S_{\alpha}(\sigma, 0, 0). \quad (6)$$

С учетом распределения X_0 и вида характеристической функции симметричной устойчивой случайной величины можем записать, что

$$Ee^{-iX_0} = \varphi_{X_0}(-1) = e^{-\sigma^{\alpha}}. \quad (7)$$

Для случайной величины X_1 имеем,

$$X_1 = b_1 X_0 + \varepsilon_1 = b_1 \varepsilon_0 + \varepsilon_1,$$

$$X_1 \sim S_{\alpha}(\sigma(b_1^{\alpha} + 1)^{1/\alpha}, 0, 0). \quad (8)$$

Как и в случае с X_0 для X_1 получим

$$Ee^{-iX_1} = \varphi_{X_1}(1) = e^{-\sigma^{\alpha}(b_1^{\alpha} + 1)}. \quad (9)$$

Для случайной величины $X_1 - X_0$ имеем

$$X_1 - X_0 = b_1 X_0 + \varepsilon_1 - X_0 = b_1 \varepsilon_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \varepsilon_1 + (b_1 - 1)\varepsilon_0.$$

$$X_1 - X_0 \sim S_{\alpha}(\sigma(1 + (b_1 - 1)^{\alpha})^{1/\alpha}, 0, 0), \quad (10)$$

следовательно

$$Ee^{-i(X_1 - X_0)} = \varphi_{X_1 - X_0}(1) = e^{-\sigma^{\alpha}((b_1 - 1)^{\alpha} + 1)}. \quad (11)$$

Подставляя (7), (9), (11) в (4) получим

$$-I_1(1,-1) = \sigma^\alpha (-(b_1 - 1)^\alpha + b_1^\alpha + 1). \quad (12)$$

Если $\alpha=2$ и учитывая, что при этом $Y_i \sim S_\alpha(\frac{\sigma_{*i}}{\sqrt{2}}, 0, 0)$, (это вытекает из определения для характеристической функции устойчивой случайной величины $\varphi_\varepsilon(t) = e^{-\sigma^2 |t|^2}$ и случайной величины распределенной по нормальному закону $\varphi(t) = e^{-\frac{\sigma^2 |t|^2}{2}}$) будем иметь

$$R(1) = \sigma_*^2 b_1 \quad (13)$$

$$b_1 = \frac{R(1)}{\sigma_*^2} \quad (14)$$

$$b_1 = \rho_1, \quad (15)$$

что совпадает с системой уравнений Юла-Уокера для данного случая.

2. МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА АР(2)

Рассмотрим процесс авторегрессии второго порядка АР(2).

$$X_n - b_1 X_{n-1} - b_2 X_{n-2} = \varepsilon_n.$$

Тогда для оценки параметров модели, используя (4) запишем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} -I_1(1,-1) = \ln E(e^{i(X_1 - X_0)}) - \ln E(e^{iX_1}) - \ln E(e^{-iX_0}) \\ -I_2(1,-1) = \ln E(e^{i(X_2 - X_0)}) - \ln E(e^{iX_2}) - \ln E(e^{-iX_0}) \end{cases}. \quad (16)$$

Определяя распределение случайных величин $X_1 - X_0$, $X_2 - X_0$, X_2 , X_1 , X_0 и используя свойство 1, для $\alpha = 2$ получим:

$$\begin{cases} R(1) = \frac{\sigma_*^2}{2} (-(b_1 - 1)^2 + b_1^2 + 1) \\ R(2) = \frac{\sigma_*^2}{2} (-(b_1^2 + b_2 - 1)^2 + (b_1^2 + b_2)^2 + 1). \end{cases}$$

Преобразуя, эту систему уравнений имеем

$$\begin{cases} R(1) = \sigma_*^2 b_1 \\ R(2) = \sigma_*^2 (b_1^2 + b_2) \end{cases}$$

Выражая коэффициенты b_1 и b_2 , имеем

$$\begin{cases} b_1 = \rho_1 \\ b_2 = \rho_2 - \rho_1^2. \end{cases} \quad (17)$$

Видно, что система уравнений отличается от системы уравнений Юла-Уокера для оценки параметров модели [1]

$$\begin{cases} b_1 = \rho_1 \frac{(1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2}, \\ b_2 = 1 - \frac{(1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2}. \end{cases}$$

В таблице приведён пример оценки коэффициентов модели AR(2) на основе смоделированных данных с учётом выполнения стационарности для коэффициентов модели [1]:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 < 1, \\ b_2 - b_1 < 1, \\ -1 < b_2 < 1. \end{cases}$$

Таблица

Истинные значения параметров AR(2)		Оценки параметров AR(2) методом Юла-Уокера		Оценки параметров AR(2) через функцию $-I_n(1, -1)$	
b_1	b_2	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$
0,3	0,03	0,2988	-0,0217	0,2924	-0,0198
0,3	0,3	0,3084	0,2509	0,4118	0,2083
0,3	0,5	0,3193	0,4582	0,5894	0,2991
0,03	0,3	0,0346	0,2404	0,0456	0,2399
0,5	0,1	0,5012	0,0600	0,5333	0,0429
-0,2	-0,7	-0,2405	-0,7020	-0,1413	-0,6880
0,01	-0,5	0,05892	-0,4694	0,04010	-0,4686
-0,01	0,5	-0,0073	0,5005	-0,0148	0,5004
0,05	-0,01	0,0409	-0,0701	0,0458	-0,0700

Из таблицы видно, если коэффициенты достаточно малы ($|b_i| \leq 0,1 \quad i = \overline{1, 2}$) или отличаются друг от друга примерно на порядок, то оценки параметров модели при помощи метода Юла-Уокера и при помощи функции $-I_n(1, -1)$ практически не отличаются. Однако в других случаях метод Юла-Уокера даёт более точные оценки параметров модели.

Литература

1. Дж.Бокс, Г.Дженкинс. Анализ временных рядов. Прогноз и управление./ Москва. изд-во Мир. 1974. 408 с.
2. J.Nowicka, A.Veron. Measurer of Dependence for ARMA Models with Stable Innovations/Annals Univ. Marie Curie-Sklodowska, Lublin. Sect. A. 1997. 1. P. 12.
3. Труш Н. Н., Соболева Т. В. Статистический анализ оценок спектральных плотностей устойчивых случайных процессов./ Минск. БГУ. 2008. 68 с.