

Теорема 2. У группы G_4 есть 3 одномерных, 3 двумерных и 1 трехмерное неприводимое комплексное представление.

Кроме того рассмотрена рациональная алгебра Чередника для группы $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ и классифицированы ее неприводимые конечномерные представления.

Будем обозначать $\xi = e^{2\pi i/3}$. Пусть V_0, V_1, V_2 – неприводимые комплексные представления $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, на которых 1 действует соответственно как 1, ξ, ξ^2 . Рассмотрим представления алгебры $H_{1,c}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, V_1)$.

Теорема 3.

1. Модуль $L(V_0)$ конечномерен, тогда и только тогда, когда

$$3k+1-2c_1-2c_2=0 \text{ или } 3k+2-2c_1-2c_2-2c_1\xi^2-2c_2\xi=0.$$

2. Модуль $L(V_1)$ конечномерен, тогда и только тогда, когда

$$3k+1-2c_1\xi-2c_2\xi^2=0 \text{ или } 3k+2-2c_1-2c_2-2c_1\xi-2c_2\xi^2=0.$$

3. Модуль $L(V_2)$ конечномерен, тогда и только тогда, когда

$$3k+1-2c_1\xi^2-2c_2\xi=0 \text{ или } 3k+2+2c_1+2c_2=0.$$

Здесь $k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$.

Литература

1. *Etingof P., Ginzburg V.* Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism // *Invent. Math.* 147. 2002. P. 243–348.
2. *Ginzburg V., Guay N., Opdam E., Rouquier R.* On the category O for rational Cherednik algebras // *Invent. Math.* 154. 2003. P. 617–651.
3. *Etingof P.* Calogero-Moser systems and representation theory // *Zurich lectures in advanced mathematics*, EMS, Zurich, 2007.

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ О ЦЕПЯХ МАРКОВА
ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА**

М. В. Мальцев

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи статистического анализа последовательностей событий (состояний) часто встречаются в кибернетике [1], генетике [2], криптографии [3] и во многих других областях научной и практической деятельности. Для моделирования дискретных временных рядов широко применяются цепи Маркова [4]. Наиболее общей моделью является цепь Маркова s -го порядка, $s \geq 1$. Однако при увеличении порядка экспоненциально возрастает количество параметров, поэтому построен ряд «малопараметрических» моделей цепи Маркова высокого порядка, одной из которых является цепь Маркова переменного порядка (ЦМПП(s)).

2. МОДЕЛЬ ЦМПП(S) И ЕЕ СВОЙСТВА

Пусть $A = \{0, 1, \dots, N-1\}$ – пространство состояний мощности $2 \leq N < \infty$, $x_i^{i+k-1} = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})$, $x_i, \dots, x_{i+k-1} \in A, i \in \mathbb{N}$ – последовательность символов (строка) из k элементов, $uw = (u_1, u_2, \dots, u_{|u|}, w_1, w_2, \dots, w_{|w|})$ – конкатенация строк u, w , $(X_t \in A)_{t \in \mathbb{Z}}$ – однородная цепь Маркова s -го порядка, заданная на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , с матрицей вероятностей одношаговых переходов $P = (p_{x_1^s, x_{s+1}})$, $p_{x_1^s, x_{s+1}} = P\{X_{t+1} = x_{s+1} | X_t = x_s, \dots, X_{t-s+1} = x_1\}, x_1^s \in A^s, x_{s+1} \in A$.

Определение 1 [5]. Цепь Маркова $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ называется цепью Маркова переменного порядка ЦМПП(s), если её вероятности одношаговых переходов $p_{x_1^{s+1}}$ имеют вид:

$$p_{x_1^s, x_{s+1}} = q_{x_{s-l+1}^s, x_{s+1}}, \quad (1)$$

где $0 \leq q_{x_{s-l+1}^s, x_{s+1}} \leq 1$, $l = l(x_1^s)$, $x_1^s \in A^s$, $x_{s+1} \in A$, $l \in \{0, 1, \dots, s\}$, причем

$$l(x_1^s) = \min\{k : P\{X_{t+1} = x_{s+1} | X_{t-s+1}^t = x_1^s\} = P\{X_{t+1} = x_{s+1} | X_{t-k+1}^t = x_{s-k+1}^s\}\}.$$

Соотношение (1) означает, что вероятность перехода в состояние x_{s+1} зависит от $l(x_1^s)$ состояний, причем длина l цепочки предыдущих состояний, от которых зависит текущее состояние ЦМПП(s), изменяется в зависимости от принимаемых ими значений. Функция $l(\cdot)$ называется контекстной функцией. Помимо $l(\cdot)$ в [5] определена функция $c(x_1^s) = x_{s-l+1}^s$. Через τ обозначим множество значений функции $c(\cdot)$.

Теорема 1. Цепь Маркова переменного порядка ЦМПП(s) с функцией $c(\cdot)$ является эргодической тогда и только тогда, когда найдется такое $m \geq s$, $m \in \mathbb{N}$, что

$$\min_{x_1^s, x_1^{t_s} \in A^s} \sum_{y_1^{m-s} \in A^{m-s}} \prod_{i=1}^m p_{c((x_1^s y_1^{m-s} x_1^{t_s})_i^{t+s-1}, (x_1^s y_1^{m-s} x_1^{t_s})_{i+s}^{t+s})} > 0.$$

Обозначим $\Pi_{x_1^s} = P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_s = x_s\}$, $x_1^s \in A^s$, – начальное s -мерное распределение вероятностей ЦМПП(s).

Лемма 1. Распределение вероятностей реализации $X = (X_1, \dots, X_n)$ ЦМПП(s) имеет вид:

$$P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^s q_{x_i} \cdot \prod_{i=s+1}^n q_{c(x_{i-1}), x_i}.$$

Оценки для переходных вероятностей ЦМПП(s), предложенные в [5], имеют вид:

$$\hat{q}_{x_{s-l+1}^s, x_{s+1}} = \frac{v_{x_{s-l+1}^s}(n)}{v_{x_{s-l+1}}(n)}, \quad (2)$$

где $v_{x_a^b}(n) = \sum_{i=1}^{n-b+a} \delta_{X_i^{i+b-a}, x_a^b}$, $\delta_{x_1^k, y_1^k} = \prod_{i=1}^k \delta_{x_i, y_i}$, δ_{x_i, y_i} – символ Кронекера.

Теорема 2. Если для реализации $X = (X_1, \dots, X_n)$ ЦМПП(s), определяемой (1), длительности $n > s$ с известной функцией $c(\cdot)$ выполнено условие $v_{x_{s-l+1}^s}(n) > 0$, то оценки (2) являются условными оценками максимального правдоподобия.

3. ОЦЕНИВАНИЕ КОНТЕКСТНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $(X_t \in A)_{t \in \mathbb{Z}}$ – ЦМПП(s), определяемая (1), $x_1^l \in \tau$, $2 \leq l \leq s$. Построим алгоритм оценивания контекстной функции для ЦМПП(s), основанный на проверке следующих вспомогательных гипотез о значимости символов: H_0 – первый символ x_1 в цепочке x_1^l не является значимым, то есть $P\{X_{l+1} = x_{l+1} | X_1^l = x_1^l\} = P\{X_{l+1} = x_{l+1} | X_2^l = x_2^l\}$; H_1 – вся цепочка x_1^l является значимой. Введем в рассмотрение статистику:

$$\gamma(n) = \sum_{x_1, x_{l+1} \in A} \frac{(v_{x_1^{l+1}}(n) - v_{x_1^l}(n) \hat{p}_{x_1^l, x_{l+1}})^2}{v_{x_1^l}(n) \hat{p}_{x_1^l, x_{l+1}}}.$$

Теорема 3. Если справедлива гипотеза H_0 , то при $n \rightarrow \infty$ распределение статистики $\gamma(n)$ сходится к χ^2 -распределению с $N-1$ степенью свободы.

На основании теоремы 3 построим тест, основанный на статистике $\gamma(n)$:

$$\begin{cases} H_0 : \gamma(n) < \Delta, \\ H_1 : \gamma(n) \geq \Delta, \end{cases} \quad (3)$$

где Δ – порог, определяемый, исходя из заданного уровня значимости α .

Следствие 1. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $\Delta = G_{N-1}^{-1}(1 - \alpha)$ – квантиль уровня $1 - \alpha$ стандартного χ^2 – распределения с $N - 1$ степенью свободы. Тогда при $n \rightarrow \infty$ размер теста равен α .

4. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ЦМПП

Пусть $(X_t \in A)_{t \in \mathbb{Z}}$ – ЦМПП(s), определяемая (1). Построим тест для проверки гипотез: $H_0 : (X_t \in A)_{t \in \mathbb{Z}}$ – равномерно распределенная случайная последовательность [3], $q_{x_{s-l+1}, x_{s+1}} = \frac{1}{N}$; $H_1 : (X_t \in A)_{t \in \mathbb{Z}}$ – цепь Маркова переменного порядка с переходными вероятностями одношаговых переходов

$$q_{x_{s-l+1}, x_{s+1}} = q_{x_{s-l+1}, x_{s+1}}(n) = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{\omega_{x_{s-l+1}}^{s+1}(n)}{\sqrt{n}} \right) > 0, \omega_{x_{s-l+1}}^{s+1}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \omega_{x_{s-l+1}}^{s+1}, \quad (4)$$

причем $\sum_{x_{s+1} \in A} \omega_{x_{s-l+1}}^{s+1} = 0$, $\sum_{x_{s-l+1} \in A^l} |\omega_{x_{s-l+1}}^{s+1}| \neq 0$. Асимптотическое соотношение

(4) означает, что рассматривается континуальное семейство альтернатив.

Введем следующие обозначения:

$$\xi_i(n) = \frac{v_i(n) - n/N^{l+1}}{\sqrt{n/N^{l+1}}}, \quad i = i_1^{l+1} \in A^{l+1},$$

$$\rho(n) = \sum_{\substack{k, \\ (i_1, \dots, i_{l_k}) \in \tau}} \sum_{i_{l_k+1}=1}^N \xi^2(i_1, \dots, i_{l_k+1})(n) - \sum_{\substack{k, \\ (i_1, \dots, i_{l_k}) \in \tau}} \left(\sum_{i_{l_k+1}=1}^N \xi(i_1, \dots, i_{l_k+1})(n) \right)^2.$$

Теорема 4. Если справедлива гипотеза H_0 , то при $n \rightarrow \infty$ распределение вероятностей статистики $\rho(n)$ сходится к χ^2 -распределению с $M = |\tau|(N-1)$ степенями свободы. Если справедлива гипотеза H_1 , то при $n \rightarrow \infty$ распределение статистики $\rho(n)$ сходится к нецентральному χ^2 -распределению с M степенями свободы и параметром нецентральности a^2 , определяемому следующей формулой:

$$a^2 = \frac{1}{N|\tau|} \sum_{\substack{k, \\ (x_1, \dots, x_{l_k}) \in \tau}} \left(\omega_{x_1 \dots x_{l_k}, x_{l_k+1}} \right)^2.$$

С помощью полученного в теореме результата построим тест, основанный на статистике $\rho(n)$:

$$\begin{cases} H_0 : \rho(n) \leq \Delta, \\ H_1 : \rho(n) > \Delta, \end{cases}$$

где Δ – порог, определяемый, исходя из заданной вероятности ошибки первого рода α .

Следствие 2. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $\Delta = G_{N|\tau|}^{-1}(1 - \alpha)$ – квантиль уровня $1 - \alpha$ стандартного χ^2 – распределения с $N|\tau|$ степенями свободы. Тогда при $n \rightarrow \infty$ размер теста равен α .

Литература

1. *Медведев Г.А.* Вероятностные методы исследования экстремальных систем / М., Наука, 1967. 380 с.
2. *Уотермен М.С.* Математические методы для анализа последовательностей ДНК / М., Мир, 1999. 350 с.
3. *Харин Ю.С. и др.* Математические и компьютерные основы криптологии / Мн.: Новое знание, 2003.
4. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова / М., Наука, 1970. 272 с.
5. *Buhlmann P.* Variable length Markov chains // The Annals of Statistics. 1999. V. 27. № 2. P. 480-513.

ОЦЕНИВАНИЕ РИСКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

К. С. Матецкий

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Очень часто на практике встречается задача прогнозирования цепей Маркова с конечным пространством значений $A = \{0, \dots, N - 1\}$, $N \geq 2$ по наблюдаемой реализации $X_1^T = \{x_1, \dots, x_T\} \in A^T$ длительности $T \geq 2$ [1 - 4].

При известной матрице вероятностей одношаговых переходов $P \in \mathbb{R}^{N \times N}$ и стационарном распределении $\pi^0 \in \mathbb{R}^N$ оптимальная по критерию минимума риска прогнозирования для (0-1)-функции потерь прогнозирующая статистика имеет вид [1, с. 242]

$$\hat{x}_{T+\tau} = \arg \max_{j \in A} (P^\tau)_{x_T, j}, \quad (1)$$

где $\tau \geq 1$ – «горизонт прогнозирования». Риск прогнозирования для статистики (1) равен

$$r(\tau) = 1 - \sum_{i \in A} \left(\pi^0 P^T \right)_i \max_{j \in A} (P^\tau)_{i, j}.$$

В том случае, когда матрица вероятностей переходов не известна, строится ее оценка максимального правдоподобия [1, с. 244]:

$$\hat{p}_{ij} = \begin{cases} \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \delta_{x_t, i} \delta_{x_{t+1}, j}}{\sum_{t=1}^{T-1} \delta_{x_t, i}}, & \text{если } \sum_{t=1}^{T-1} \delta_{x_t, i} > 0, \\ \frac{1}{N}, & \text{если } \sum_{t=1}^{T-1} \delta_{x_t, i} = 0. \end{cases}$$