ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ФИРМЫ В УСЛОВИЯХ НЕСОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ С ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЦЕН

М. А. Балаева

Как известно [1–3], задача фирмы в условиях несовершенной конкуренции в общем случае имеет вид

$$\Pi(Q, x) = p_0(Q)Q - \sum_{i=1}^{m} p_i(x_i)x_i \to \max_{Q,x}, \;\; f(x) - Q = 0, \;\; x \ge 0, \;\; Q \ge 0, \qquad (1)$$

где $f(x)$ – производственная функция, цена p_0 является функцией выпуска $p_0 = p_0(Q)$, причем $dp_0 / dQ \le 0$, цены p_i являются функциями факторов $p_i = p_i(x_i)$, причем $dp_i/dx_i \ge 0$, $i=\overline{1,m}$.

В данной работе рассматривается *задача анализа способов производственной деятельности* (ЗАСПД) в условиях несовершенной конкуренции. В учебном пособии [1] эта задача рассматривается, когда цена на выпускаемую продукцию $p_0(Q)$ является кусочно-гладкой функцией выпуска Q, но такой, что функция дохода $R(Q)= p_0(Q)Q$ кусочно-линейная возрастающая, а цены на факторы $p_i(x_i)$, $i = \overline{1,m}$, тоже являются кусочно-гладкими функциями затрат x_i, но такими, что стоимости затрат $C_i(x_i) = = p_i(x_i)x_i$, $i = \overline{1,m}$, – кусочно-линейные функции. В отличие от указанного пособия, в настоящей работе исследован случай, когда цена на продукцию

$$p_0(Q)=\alpha_0 Q+\alpha_1,\ Q \ge 0,\ \alpha_0<0,\ \alpha_1>0; \qquad (2)$$

и цены на факторы $p_i(x_i) = \beta_0^{(i)} x_i + \beta_1^{(i)}$, $x_i \ge 0$, $\beta_0^{(i)} > 0$, $\beta_1^{(i)} > 0$, $i = \overline{1,m}$, являются линейными функциями соответственно выпуска и затрат.

Известно [1], что ЗАСПД имеет ненулевое решение только при наличии каких-либо фиксированных или ограниченных переменных. Пусть ограничен какой-либо фактор. Тогда ЗАСПД в силу (1) примет вид

$$\begin{gathered} \alpha_0 Q^2 + \alpha_1 Q - \sum_{i=1}^{m} (\beta_0^{(i)} x_i^2 + \beta_1^{(i)} x_i) - \bar{p}\,\bar{x} \to \max, \\ Au - x \le 0,\ d'u \le \bar{x},\ q'u - Q = 0, \\ u \ge 0,\ x \ge 0,\ \ Q \ge 0. \end{gathered} \qquad (3)$$

Здесь $u \in \mathbf{R}^n$ – вектор интенсивностей технологических процессов, $A = \begin{pmatrix} a_{ij}, & j \in J \\ & i \in I \end{pmatrix}$ – матрица затрат, q – вектор производительностей технологических процессов, $\bar{x}$ – объем ограниченного фактора, d – вектор его затрат технологическими процессами, $\bar{p}$ – его цена.

Задача (3) является задачей квадратичного программирования.

Введем функцию Лагранжа, которая будет иметь вид (постоянные издержки $\bar{p}\bar{x}$ не будем учитывать): $L(u, x, Q, y_x, y_{\bar{x}}, y_Q) = (\alpha_0 Q^2 + \alpha_1 Q) - -\sum_{j=1}^{n}(\beta_0^{(i)} x_i^2 + \beta_1^{(i)} x) + y'_x(-Au + x) + y_{\bar{x}}(\bar{x} - d'u) + y_Q(q'u - Q).$ Используя условия Куна-Таккера, в [4] показано, что решение $(u^0,\ x^0,\ Q^0)$ задачи (3) и соответствующий вектор множителей Лагранжа $(y_x^0,\ y_{\bar{x}}^0,\ y_Q^0)$ удовлетворяют условиям: $y_Q^0 = 2\alpha_0 Q^0 + \alpha = MR(Q^0)$, $y_{x_i}^0 = 2\beta_0^{(i)} x_i^0 + \beta_1^{(i)} = = MC_i(x_i^0)$, $i = \overline{1,m}$, где $MR(Q^0)$ – предельный доход, $MC_i(x_i^0)$ – предельные издержки i-го фактора, и, кроме того, выполняется равенство $Mf_i(x^0) = \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = \dfrac{y_{x_i}^0}{y_Q^0}$, $i = \overline{1,m}$, где $Mf_i(x^0)$ – предельный продукт i-го фактора. Таким образом, получен основной результат: $MR(Q^0) \cdot Mf_i(x^0) = = MC_i(x_i^0)$, $i = \overline{1,m}$.

Рассмотрим теперь *ЗАСПД фирмы-монополиста*, когда имеется один ограниченный фактор. Пусть цена на продукцию является убывающей линейной функцией выпуска (2).Тогда согласно (3) указанная задача имеет вид

$$\begin{gathered} \alpha_0 Q^2 + \alpha_1 Q - p'x \to \max, \\ Au - x \le 0,\ d'u \le x,\ q'u - Q = 0, \\ u \ge 0,\ x \ge 0,\ Q \ge 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где $p = (p_1, ..., p_m)$ – вектор цен на используемые факторы. Исследуем эту задачу, используя ее геометрическое решение. Известно [1], что если $Q^0 > 0$, то $x^0 > 0$ и $Au^0 = x^0$. Поэтому вместо ограничения $Au - x \le 0$ будем рассматривать равенство $Au = x$. Тогда задачу (4) можно переписать следующим образом:

$$\alpha_0 Q^2 + \alpha_1 Q - p'Au \to \max,\ d'u \le \bar{x},\ q'u - Q = 0,\ u \ge 0,\ Q \ge 0. \tag{5}$$

Поскольку в целевой функции и в ограничениях задачи (5) переменные u и Q разделены, то задачу (5) можно разбить на две подзадачи. Первая – внутренняя – задача имеет вид

$$\varphi(Q) = \max(-p'Au),\ Q \ge 0,\ d'u \le \bar{x},\ q'u = Q,\ u \ge 0. \tag{6}$$

В ней оптимальный план u^0 является функцией выпуска Q: $u^0 = u(Q)$, а издержки $C(Q)$ равны $C(Q) = -\varphi(Q),\ Q \geq 0$.

Вторая – внешняя – задача в силу (5) примет форму

$$R(Q) - C(Q) \to \max,\ Q \geq 0, \tag{7}$$

где

$$R(Q) = \alpha_0 Q^2 + \alpha_1 Q = \alpha_0 \left(Q + \frac{\alpha_1}{2\alpha_0} \right)^2 - \frac{\alpha_1}{4\alpha_0}. \tag{8}$$

Решение задачи (7) Q^0 будет и решением исходной задачи (5), при этом $u^0 = u(Q^0),\ x^0 = Au^0$.

Внутренняя задача (6) является задачей ЛП с двумя ограничениями. Поэтому с помощью двойственного представления ее можно решить геометрически и найти явный вид функции $\varphi(Q), Q \geq 0$. В [1] такая задача решена. Пусть q_j/d_j упорядочены по возрастанию: $q_{j_1}/d_{j_1} < q_{j_2}/d_{j_2} < \ldots < q_{j_n}/d_{j_n}$. Тогда функция $C(Q), Q \geq 0$, имеет вид

$$C(Q) = -\varphi(Q) = -y_{\bar{x}}^{(i)} \bar{x} - y_Q^{(i)} Q,\ Q_{i-1} \leq Q \leq Q_i,\ i = \overline{1,n},\ y_{\bar{x}}^{(1)} = 0, \tag{9}$$

где $Q_i = \left(q_{j_i} / d_{j_i} \right) \bar{x},\ i = \overline{1,n},\ Q_0 = 0,\quad y_Q^{(i+1)} < y_Q^{(i)} < 0,\quad y_{\bar{x}}^{(i+1)} > y_{\bar{x}}^{(i)} > 0,$ $i = \overline{1,n-1}.$ Таким образом, внешняя задача (7), (8), а, значит, и исходная (5) примет вид:

$$\alpha_0 \left(Q + \frac{\alpha_1}{2\alpha_0} \right)^2 - \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_0} + y_Q^{(i)} Q + y_{\bar{x}}^{(i)} \bar{x} \to \max,\ Q_{i-1} \leq Q \leq Q_i,\ i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Изобразим на рисунке кривую дохода (8), представляющую собой параболу, и кривую издержек (9). Ясно, что $C(0) = -y_Q^{(1)} \cdot 0 = 0$. Кроме того, для $Q \geq Q_n$ ни доход, ни издержки не определены. В силу указанного выше свойства двойственных переменных функция издержек (9) является выпуклой функцией (кусочно-линейной, возрастающей). На рис. 1 изображены все кривые для n=4.

Очевидно, если Q^0 – оптимальный выпуск, то $MR(Q^0) = MC(Q^0)$. Таким образом, из рис. 1 и из (8) видно, что если при каком-то s выполняется неравенство

$$2\alpha_0 Q_s + \alpha_1 < -y_Q^{(s)} < 2\alpha_0 Q_{s-1} + \alpha_1, \tag{11}$$

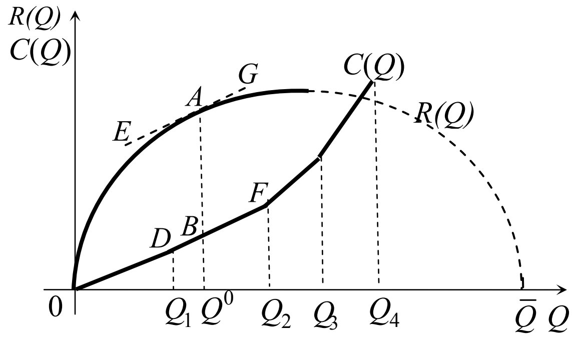

Рис. 1

то существует $Q^0 \in [Q_{s-1}, Q_s]$, что $-y_Q^{(s)} = \alpha_0 Q^0 + \alpha_1$, т. е. отрезок кривой $C(Q)$, $Q \in [Q_{s-1}, Q_s]$ параллелен касательной к кривой дохода $R(Q)$ в точке $Q^0 \in [Q_{s-1}, Q_s]$, следовательно Q^0 – оптимальный выпуск (на рис. 1 касательная *EG* к кривой дохода в точке Q^0 параллельна отрезку *DF* кривой издержек). Максимальная прибыль равна $\Pi(Q^0) = R(Q^0) - C(Q^0)$ (на рис. 1 – это длина отрезка *AB*). Заметим, что возможна ситуация, когда ни при одном $s = \overline{1,n}$ не выполняется неравенство (11), но существует номер j_0, при котором $-y_Q^{(j_0)} < \alpha_0 Q_{j_0} + \alpha_1 <$ $< -y_Q^{(j_0+1)}$. В этом случае $Q_{j_0} = Q^0$ – оптимальный выпуск, причем $-\beta y_Q^{(j_0)} - (1-\beta) y_Q^{(j_0+1)} = \alpha_0 Q_{j_0} + \alpha_1$ при некотором $0 < \beta < 1$. Обозначим $y_Q^0 = \beta y_Q^{(j_0)} + (1-\beta) y_Q^{(j_0+1)}$. Очевидно, $-y_Q^0 = M^0C(Q^0)$, где $C(Q^0)$ – оптимальные издержки, $M^0C(Q^0)$ – (оптимальные) предельные издержки, т. е. $-y_Q^0$ представляет (оптимальные) предельные издержки в точке Q^0.

Ясно, что если технология производства такая, при которой $-y_Q^{(1)} > \alpha_1$, производство будет убыточным. Поэтому монополист может всегда определить начальную цену α_1, ниже которой он будет в убытке.

Литература

1. *Альсевич В. В.* Введение в математическую экономику. М., 2008.
2. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М., 1984.
3. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М., 2002.
4. *Альсевич В. В.* Исследование задачи анализа производственной деятельности в условиях несовершенной конкуренции // X Белорусская математическая конференция. Тез. докл. Ч. 3. Мн., 2008. С. 85–86. Пер. с англ. / М.: Мир, 1991. 672с.