

5. *Lovasz L.* Problem 9 // in Beitrage zur Graphentheorie and deren Anwendungen. Vorgetragen auf dem internationalen Kolloquium in Oberhof (DDR), Mathematische Gesellschaft der DDR – Technische Hochschule Ilmenau. 1977. P. 313.
6. *Poljak S., Rodl V., Turzik D.* Complexity of representation of graphs by set systems // Discrete Appl. Math. 1981. № 3. P. 301–312.
7. *Левин А. Г., Тышкевич Р. И.* Реберные гиперграфы // Дискретная математика. 1993. Т. 5. № 1. С. 112–129.
8. *Метельский Ю. М., Щемелева К. Н.* Конечная характеризуемость реберных графов гиперграфов ограниченных ранга и кратности в классе расщепляемых графов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2008. № 1. С. 102–105.
9. *Таишкинов В. А.* Характеризация реберных графов p -графов // Тез. докл. 5-й Всесоюзной конф. по проблемам теоретической кибернетики (18-20 мая 1980 г.). Новосибирск, 1980. С. 135–137.

НЕЧЕТКИЕ РЕБЕРНЫЕ ГРАФЫ НЕЧЕТКИХ ГИПЕРГРАФОВ

Е. Н. Лобунец

Целью данной работы является построение аналога теории реберных графов гиперграфов для нечёткого случая. «Классический» вариант данной задачи рассмотрен в работе [1].

В дальнейшем множество в «классическом» понимании будем называть четким множеством.

Определение 1. Нечётким подмножеством чёткого множества X называется отображение $\mu: X \rightarrow [0, 1]$.

Определение 2. Высотой нечеткого множества μ называется величина $h(\mu) = \max \{ \mu(x) \mid \mu(x) \neq 0 \}$.

Определение 3. Пересечением (объединением) нечетких множеств μ и λ называется нечеткое множество $\mu \wedge \lambda = \min \{ \mu, \lambda \}$ $\mu \vee \lambda = \max \{ \mu, \lambda \}$.

Определение 4. Нечетким графом на четком множестве X будем называть пару $G = (X, \mu)$, где $\mu: X \times X \rightarrow [0, 1]$ такое, что для любых $x_i, x_j \in X$: $\mu(x_i, x_j) = \mu(x_j, x_i)$. Будет называть μ множеством нечетких ребер нечеткого графа G .

Определение 5. Матрицей смежности нечёткого графа $G = (X, \mu)$, $|X| = n$, называется $n \times n$ матрица $A = \{a_{ij}\}$ такая, что $a_{ij} = \mu(x_i, x_j)$, где $x_i, x_j \in X$.

Определение 6. Нечетким гиперграфом (НГ) на X будем называть пару $H = (X, \mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – семейство нечетких подмножеств множества X , называемых нечеткими ребрами НГ H ; X – (четкое) множество вершин нечеткого гиперграфа H .

Определение 7. Матрицей инцидентности НГ $H = (X, \mathcal{E})$, $|X| = n$, $|\mathcal{E}| = m$, называется $n \times m$ матрица $I = \{a_{ij}\}$ такая, что $a_{ij} = \mu_j(x_i)$, где $x_i \in X$, $\mu_j \in \mathcal{E}$.

Определение 8. Двойственным гиперграфом к НГ H называется НГ $H^*=(\mathcal{E}^*, X^*)$, где $\mathcal{E}^*=\{\mu_i^*:\mu_i\in\mathcal{E}\}$ – четкое множество вершин H^* , элементы которого биективно соответствуют нечетким ребрам НГ H ; $X^*=\{\mu_j^*:\mu_j\in\mathcal{E}\}$ – нечеткое множество ребер H^* , элементы которого биективно соответствуют вершинам H , таких, что $\mu_j^*(e_i^*)=\mu_i(x_j)$.

Определение 9. Нечетким реберным графом НГ $H=(X,\mathcal{E})$ называется нечеткий граф $L(H)=(\mathcal{E},\mu_G)$, где

$$\mu_G(\{\mu_i,\mu_j\})=h(\mu_i\wedge\mu_j)=\max_{x\in X}\{\min\{\mu_i(x),\mu_j(x)\}\}, \text{ где } \mu_i,\mu_j\in\mathcal{E}.$$

Приведённые выше определения являются устоявшимися и их можно найти, например, в [2]. Для построения дальнейшей теории введем понятие 2-секции НГ.

Определение 10. 2-секцией НГ $H=(X,\mathcal{E})$ называется нечеткий граф $(H)_{[2]}=(X,\mu_{[2]})$, где $\mu_{[2]}(x_i,x_j)=\max_{\mu_k\in\mathcal{E}}\{\min\{\mu_k(x_i),\mu_k(x_j)\}\}$, где $x_i,x_j\in X$.

Теорема 11 (нечеткий аналог теоремы Бержа). $L(H)=(H^*)_{[2]}$.

Доказательство состоит в проверке условий по определению и по причине нехватки места опускается. Таким образом, теорема Бержа для четких гиперграфов переносится на нечеткий случай.

Известно, что любой простой граф является реберным графом некоторого четкого гиперграфа. Для нечетких графов и нечетких гиперграфов имеет место аналогичная ситуация.

Теорема 12. Любой нечеткий граф является нечетким реберным графом некоторого НГ.

Доказательство: Рассмотрим нечёткий граф $G=(X,\mu)$. Построим НГ $H=(Y,\mathcal{E})$ такой, что $G=L(H)$ и $|\mathcal{E}|=\binom{n}{2}$. Пусть $I=\{z_j^i\}$ – искомая матрица

инцидентности H . Занумеруем столбцы I , поставив каждому столбцу в биективное соответствие пару (k,l) , где x_k,x_l – различные вершины G .

Элементы столбца j с меткой (k,l) определяем по следующему правилу: $z_k^j=z_l^j=\mu(x_k,x_l)$ и $z_i^j=0$, при $i\neq k,l$.

Проверка того, что $G=L(H)$ проста и из-за нехватки места опускается.

Поскольку, из теоремы 12, ясно, что любой нечеткий граф является нечетким реберным графом некоторого НГ, то перейдем к рассмотрению нечетких реберных графов НГ с предписанными свойствами.

Определение 13. Пусть α – некоторая константа. НГ $H=(X, \mathcal{E})$ называется α -линейным, если для любых $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{E}$: $\sum_{x \in X} \min \{\mu_1(x), \mu_2(x)\} \leq \alpha$.

Определение 14. Пусть β – некоторая константа. НГ $H=(X, \mathcal{E})$ называется β -смежностным, если для любых $x, y \in X$: $\sum_{\mu_i \in \mathcal{E}} \min \{\mu_i(x), \mu_i(y)\} \leq \beta$.

Определение 15. Степенью вершины x НГ $H=(X, \mathcal{E})$ будем называть число $\deg(x) = \sum_{\mu_i \in \mathcal{E}} \mu_i(x)$.

Определение 16. Пусть k – некоторая константа. НГ $H=(X, \mathcal{E})$ называется k -униформным, если $\sum_{x \in X} \mu(x) \leq k$ для любого $\mu \in \mathcal{E}$.

Определение 17. Пусть k – некоторая константа. НГ $H=(X, \mathcal{E})$ называется k -ограниченным, если степень любой из вершин НГ H не превышает k .
Из теоремы 11 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 18. G является нечетким реберным графом α -линейного b -униформного НГ тогда и только тогда, когда G является 2-секцией α -смежностного b -ограниченного НГ.

Рассмотрим задачу распознавания нечетких реберных графов α -линейных b -униформных НГ. Пусть $G=(X, \mu)$ – нечеткий граф, а $I = \{z_j^i\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ – матрица инцидентности искомого α -линейного b -униформного НГ. Пусть также $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$ – матрица смежности G . Тогда наша задача эквивалентна следующей задаче математического программирования:

$$\sum_{i=1}^m \min \{z_i^{k_1}, z_i^{k_2}\} \leq \alpha, \text{ для любых различных } k_1, k_2 \in \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^m z_k^i \leq b, \text{ для любого } i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2)$$

$$\max_{i=1, m} \{\min \{z_i^{k_1}, z_i^{k_2}\}\} = a_{k_1 k_2}, \text{ для любых различных } k_1, k_2 \in \{1, \dots, n\}. \quad (3)$$

Рассмотрим задачу распознавания нечетких реберных графов b -униформных НГ.

Утверждение 19. Если все элементы матрицы смежности нечеткого графа G одинаковы, то задача проверки, является ли G нечетким реберным графом b -униформного НГ, полиномиально разрешима.

Доказательство данного утверждения простое и оно опускается.

Однако, ситуация коренным образом меняется, если матрица смежности тестируемого нечеткого графа содержит два различных элемента.

Теорема 20. Если элементы матрицы смежности A нечеткого графа G могут принимать два различных значения, то задача распознавания, является ли G нечетким реберным графом b -униформного НГ, NP-полная.

Доказательство: Доказательство NP-полноты проведем путём сведения к нашей задаче задачи распознавания реберных графов b -униформных гиперграфов (b -UN), о которой известно, что для $b > 3$ она является NP-полной (см. [3]).

Пусть $G=(X,E)$, b – вход задачи b -UN. Поставим в соответствие G нечеткий граф $G=(X, \mu)$ такой, что

$$\mu(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i, x_j \in E, \\ 0, & \text{если } x_i, x_j \notin E. \end{cases}$$

Покажем, что G является реберным графом b -униформного гиперграфа тогда и только тогда, когда G является нечетким реберным графом b -униформного НГ. Необходимость данного утверждения очевидна. Докажем достаточность.

Воспользуемся эквивалентной формулировкой нашей задачи в виде задачи математического программирования (2)-(3). Пусть $z^i = (z_1^i, z_2^i, \dots, z_m^i)$, $i = \overline{1, n}$ – решение задачи (2)-(3). Предположим, что существует $i \in \{1, \dots, n\}$ и $s \in \{1, \dots, m\}$ такие, что $0 < z_s^i = \alpha < 1$. Покажем, что, если положить $z_s^i = 0$, то полученные вектора тоже будут решением системы (2)-(3). Действительно, условия (2) очевидным образом будут удовлетворяться. Зафиксируем $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$. Для доказательства того, что для пары (i, j) будет удовлетворяться условие (3), рассмотрим следующие случаи:

Пусть $z_s^j = 0$. В этом случае $\min\{z_s^i, z_s^j\} = 0$. Поэтому, если мы положим $z_s^i = 0$, то (2) очевидным образом выполняется.

Пусть $z_s^j = \beta$, где $0 < \beta \leq 1$. Тогда $\min\{z_s^i, z_s^j\} = \min\{\alpha, \beta\} > 0$. Поскольку $a_{ij} \in \{0, 1\}$, то $\max_{t=1, n} \{\min\{z_t^i, z_t^j\}\} = 1$, причем максимум достигается на неко-

торой координате $t_0 \neq s$. Следовательно, если мы положим $z_s^i = 0$, то (2) снова будет выполняться.

Таким образом, показано, что если существует какое-то решение системы (2)-(3), то всегда будет существовать решение системы (2)-(3) состоящее только из 0 и 1. Легко можно проверить, что в этом случае матрица (z_s^i) , где $i \in \{1, \dots, n\}$ и $s \in \{1, \dots, m\}$, будет матрицей инцидентности гиперграфа H такого, что $G=L(H)$. Теорема доказана.

Литература

1. Berge C. Hypergraphs: Combinatorics of Finite Sets / North-Holland, 1973.
2. Mordeson J. N., Nair P. Fuzzy graphs and fuzzy hypergraphs / Heidelberg: Physica-Verl., 2000.
3. Rodl V., Poljak S., Turzik D. Complexity of representation of graphs by set systems // Discrete Appl. Math. 1981. Vol. 3. No. 4. P. 301–312.

АПЕРАЦЫЙНАЕ ЗЛІЧЕННЕ НА МНОСТВЕ ПАСЛЯДОЎНАСЦЕЙ

Д. А. Навічкова

Разгледзім мноства K паслядоўнасцей над полем $\mathbb{C}$:

$$a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_0, a_1, \dots\} \in K, \quad b = \{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{b_0, b_1, \dots\} \in K.$$

На K увядзем аперацыі: складанне, множанне на скаляр і множанне ў выглядзе згорткі:

$$a + b = \{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \alpha \cdot a = \{\alpha \cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad a * b = \left\{ \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

У K ёсць нуль $0 = \{0, 0, 0, \dots\}$ адносна складання і адзінка $I = \{1, 0, 0, \dots\}$ адносна множання. K з'яўляецца камутатыўным кольцам адносна ўведзеных аперацый. Няхай $h = \{0, 1, 0, 0, \dots\} \in K$. Тады для кожнага $a \in K$

$$\text{маем} \quad h * a = a * h = \left\{ \sum_{k=0}^n h_{n-k} a_k \right\}_{n=0}^{\infty} = \{0, a_0, a_1, a_2, \dots\}. \quad \text{Такім чынам, } h$$

адпавядае зруху ўправа. Назавем яго інтэграваннем. Увядзем n -ую

$$\text{ступень аператара } h: \quad h^n = \underbrace{h * h * \dots * h}_n = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 0, \dots \right\}.$$

У K няма адваротнага элемента да h . Для яго пабудовы пашырым кольца K . Разгледзім мноства K' паслядоўнасцей з канечнай колькасцю элементаў на месцах з адмоўнымі нумарамі: $a = \{a_{-m}, a_{-m+1}, \dots, \underline{a_0}, a_1, \dots\} \in K'$. Адносна звычайнага складання і множання ў выглядзе згорткі