• дебит жидкости на скважине может быть получен, используя трехмерное поле давления по формуле

$$Q = -\frac{k}{\mu} \lim_{\gamma \to 0} \oint_{\gamma} \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma , \qquad (2)$$

где γ – поверхность, охватывающая перфорированную часть скважины, n – внутренняя нормаль к поверхности γ.

Для апробации представленных подходов были созданы программные средства расчета потенциальных дебитов и визуализации полученных результатов.

Проведенные расчеты по обеим методикам сопоставлялись с реальными промысловыми данными и показали удовлетворительную согласованность.

Литература

1. *Миннуллин Р. М., Мирсаитов Р. Г.* Обоснование выбора участков для уплотняющего бурения. Нефтяное хозяйство. №5. 2007, С.39–42.
2. *Закревский К. Е.* Геологическое 3D-моделирование. М, 2009.

ФАКТОРИЗАЦИЯ ИЗМЕРИМЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Д. И. Шкадрецов

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определение. Факторизацией в L_p ($1<p<\infty$) матрицы функции G есть представление в виде [1, с.56]:

$$G(t) = G_+(t)\Lambda(t)G_-(t) , \qquad (1)$$

где $G_+(t) \in L_p^+$, $G_-(t) \in L_q^-$, $G_+^{-1}(t) \in L_q^+$, $G_-^{-1}(t) \in L_p^-$ $1/p + 1/q = 1$, $\Lambda(t) = diag\left[t^{\chi_1},...,t^{\chi_n}\right]$, и χ_i - целые.

Пример [2, с.107]

$G(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix}$. представление $G(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ есть решение задачи факторизации для матрицы G. Соответственно частные индексы для данной матрицы равны ±1.

ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Факторизация треугольных матриц-функций порядка n×n

Рассмотрим треугольную матриц-функцию порядка n×n. Без ограничения общности можем рассматривать верхнюю треугольную матриц-функцию вида:

$$G[t]=\begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & a_{1,3}(t) & \dots & a_{1,N}(t) \\ 0 & a_{2,2}(t) & a_{2,3}(t) & \dots & a_{2,N}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1,N}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N}(t) \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Ее элементами являются произвольные полиномы над полем комплексных чисел. Ставится задача факторизовать ее в общем случае для полиномиальных элементов.

Рассмотрим матрицу Y[t] вида:

$$Y[t]=\begin{bmatrix} \mathrm{a}^{\mathrm{e}}_{1,1}(t) & \mathrm{Y}_{1,2}(t) & Y_{1,3}(t) & \dots & \mathrm{Y}_{1,\mathrm{n}}(t) \\ 0 & \mathrm{a}^{\mathrm{e}}_{2,2}(t) & Y_{2,3}(t) & \dots & Y_{2,n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Y_{n-1,n}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathrm{a}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{n,n}}(t) \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Здесь $Y_{i,j}(t)$ некоторые неизвестные полиномы, которые будут найдены в процессе построения факторизации, диагональные элементы, это полиномы вида:

$a^e_{i,j}=\prod(t-t_\alpha)$, t_α – корни полинома $a_{i,j}(t)$, лежащие вне единичного круга.

Рассмотрим матриц функциюX[t] вида:

$$X[t]=\begin{bmatrix} \mathrm{a}^{\mathrm{i}}_{1,1}(t)/t^{n_1} & \mathrm{X}_{1,2}(t)/t^{n_1} & X_{1,3}(t)/t^{n_1} & \dots & \mathrm{X}_{1,\mathrm{n}}(t)/t^{n_1} \\ 0 & \mathrm{a}^{\mathrm{i}}_{2,2}(t)/t^{n_2} & X_{2,3}(t)/t^{n_2} & \dots & X_{2,n}(t)/t^{n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X_{n-1,n}(t)/t^{n_{N-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathrm{a}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{n,n}}(t)/t^{n_N} \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Здесь $X_{i,j}(t)$ некоторые неизвестные полиномы, которые будут найдены в процессе построения факторизации, диагональные элементы, это полиномы вида:

$a^i_{i,j}=\prod(t-t_\alpha)$, t_α – корни полинома $a_{i,j}(t)$, лежащие внутри единичного круга.

Также рассмотрим диагональную матриц-функцию:

$$\Lambda[t]=\begin{bmatrix} t^{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{n_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t^{n_N} \end{bmatrix}.$$

Факторизацию будем искать в виде:

$$G[t]=Y[t]\times\Lambda[t]\times X[t].$$

Перемножив матрицы X[t], $\Lambda[t], Y[t]$ мы получим следующую матрицу:

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c:c} \mathrm{a}^{\mathrm{i}}_{1,1}(t)\cdot\mathrm{a}^{\mathrm{e}}_{1,1}(t) & \begin{array}{c}\mathrm{a}^{\mathrm{e}}_{1,1}(t)\cdot X_{1,2}(t)+\\ +\mathrm{a}^{\mathrm{i}}_{2,2}(t)\cdot Y_{1,2}(t)\end{array} & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline 0 & \mathrm{a}^{\mathrm{i}}_{2,2}(t)\cdot\mathrm{a}^{\mathrm{e}}_{2,2}(t) & \begin{array}{c}\mathrm{a}^{\mathrm{e}}_{2,2}(t)\cdot X_{2,3}(t)+\\ +\mathrm{a}^{\mathrm{i}}_{3,3}(t)\cdot Y_{2,3}(t)\end{array} & \dots & \dots \\ \hdashline 0 & 0 & \mathrm{a}^{\mathrm{i}}_{3,3}(t)\cdot\mathrm{a}^{\mathrm{e}}_{3,3}(t) & \dots & \dots \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \dots & \mathrm{a}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{n,n}}(t)\cdot\mathrm{a}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{n,n}}(t) \end{array}\right].$$

Обозначим данную матрицу $G^{'}[t]$. $G^{'}_{i,j}[t]$ может быть вычислено по следующей формуле:

$$G^{'}_{i,j}[t]=\begin{cases} 0, i>j \\ a^{e}_{i,j}(t)\cdot a^{i}_{i,j}(t), i=j \\ a^{e}_{i,i}(t)\cdot X_{i,j}(t)+a^{i}_{j,j}(t)\cdot Y_{i,j}(t), i=j-1 \\ a^{e}_{i,i}(t)\cdot X_{i,j}(t)+a^{i}_{j,j}(t)\cdot Y_{i,j}(t)+\sum\limits_{k=i+1,m=j+1}^{n} X_{i,k}(t)\cdot Y_{m,j}(t), i<j-1 \end{cases}.$$

Откуда из равенств $a^{e}_{i,i}(t)\cdot X_{i,j}(t)+a^{i}_{j,j}(t)\cdot Y_{i,j}(t)=a_{i,j}(t)$ находим неизвестные функции $X_{i,j}(t), Y_{i,j}(t)$ [3, с.209], причем делается это для каждого элемента диагонали выше главной. Затем смещаемся на диагональ выше, причем $\sum\limits_{k=i+1,m=j+1}^{n} X_{i,k}(t)\cdot Y_{m,j}(t)$ уже известна, поскольку была вычислена во время предыдущей итерации, аналогичные действия проводим для $a^{e}_{i,i}(t)\cdot X_{i,j}(t)+a^{i}_{j,j}(t)\cdot Y_{i,j}(t)$, и поднимаемся на диагональ выше. Таким образом, будут найдены все неизвестные элементы матриц-функций X[t], Y[t]. Затем находятся частные индексы задачи факторизации по формуле:

$$n_i = \max_{j=1,n}\{a^i_{i,i}(t), X_{i,j}(t)\} \quad (5)$$

Данные соображения могут быть сформулированы в следующей теореме:

Теорема. Матриц-функция с полиномиальными элементами вида (2), допускает факторизацию, причем множители ищутся в виде матриц-функций (3) (левый множитель) и (4) (правый множитель), а частные индексы вычисляются по формуле (5).

Алгоритм, рассмотренный выше, был реализован в пакете Mathematica.

Один специальный вид матриц-функций порядка 2×2

Рассмотрим матриц-функцию следующего вида:

$$G(t) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \cdot b_2 \\ c_1 \cdot c_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь $b_1 \cdot b_2$, $c_1 \cdot c_2$,$d_1 \cdot d_2$ - произвольные полиномы, разложенные на два множителя, где первый множитель это полином, все корни которого находятся внутри единичного круга, а второй множитель- полинома все корни которого находятся вне единичного круга, a_1 -это полином корни которого находятся в единичном круге. То есть один из элементов матрицы полином специального вида, остальные - произвольные полиномы. Построим факторизацию для данного класса матриц, сведя факторизацию к уже рассмотренному случаю факторизации треугольных полиномиальных матриц-функций. Для этого рассмотрим матрицу $S(t) = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \cdot b_2 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix}$, тогда $S^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b_1 \cdot b_2}{a1} \\ 0 & -\dfrac{1}{a_1} \end{bmatrix}$. Как легко видеть определитель матрицы S(t), не обращается в нуль вне единичного круга (все нули определителя лежат внутри единичного круга).

Помножим матрицу G(t) на матрицу S(t) справа. Получим матрицу $H(t) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 \cdot c_2 & b_1 \cdot b_2 \cdot c_1 \cdot c_2 - a_1 \cdot d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix}$. Данная матрица треугольная, и ее можно факторизовать по алгоритму факторизации треугольных матриц-функций [3, с.210].

ВЫВОДЫ

Были построены алгоритмы факторизации для некоторых специальных видов матриц. В частности для факторизации треугольных матриц-функций порядка n×n, а также специального класса матриц-функций порядка 2×2.

Нерешенные задачи:

1. Обобщение способа факторизации треугольных матриц-функций порядка n×n с полиномиальными элементами на случай рациональных функций.
2. Нахождение других специальных классов матриц-функций для которых возможна факторизация.
3. Получения алгоритма факторизации для матриц-функций порядка 2×2 в общем случае.

Литература

1. *Georgii S. Litvinchuk, Ilia M. Spitkovskii* Factorization of Measurable Matrix Functions // Basel Boston. 1987. C. 372.
2. *Эрхардт Т., Спитковский И. М.* Факторизация кусочно-постоянных матриц-функций и системы линейных дифференциальных уравнений // Алгебра и анализ. Том 13 (2001). Вып. 6. С. 56–123.
3. *Шкадрецов Д. И.* Факторизация измеримых матриц-функций // Сборник работ 64-ой научной конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета: В 3 ч., ч. 1. Минск, БГУ. 2007. С. 209–212.