

ВЛИЯНИЕ УГЛА НАМОТКИ СТЕКЛОВОЛОКНА НА ДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ АРМИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК

Ван Чживэй

Вопросы динамической потери устойчивости анизотропных армированных оболочек из стекловолокна под действием вибрационных нагрузок обсуждались в работе [1, с.261]. В частности, для случая, когда направление намотки стекловолокна совпадает с основными направлениями упругости ортотропного материала, получены выражения для критического значения осевой нагрузки и найдены критические частоты, ограничивающие области неустойчивости. Настоящая работа развивает это направление и содержит результаты анализа динамической устойчивости армированных оболочек в осесимметричном случае для произвольного угла намотки стекловолокна.

Если основные направления упругости составляют угол φ с координатными линиями, закон Гука имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= B_{1111}\varepsilon_{11} + B_{1122}\varepsilon_{22} + 2B_{2111}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} &= B_{1122}\varepsilon_{11} + B_{2222}\varepsilon_{22} + 2B_{1222}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{12} &= B_{2111}\varepsilon_{11} + B_{1222}\varepsilon_{22} + 2B_{1212}\varepsilon_{12}.\end{aligned}\tag{1}$$

Модули упругости B_{iknm} через основные константы упругости b_{1111} , b_{2222} , b_{1122} и b_{1212} выражаются следующим образом [1, с.263]:

$$\begin{aligned}B_{1111} &= b_{1111} \cos^4 \varphi + b_{2222} \sin^4 \varphi + \left(b_{1212} + \frac{1}{2} b_{1122} \right) \sin^2 2\varphi, \\ B_{2222} &= b_{1111} \sin^4 \varphi + b_{2222} \cos^4 \varphi + \left(b_{1212} + \frac{1}{2} b_{1122} \right) \sin 2\varphi, \\ B_{1122} &= (b_{1111} + b_{2222} - 2b_{1212}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{1122} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi), \\ B_{1212} &= (b_{1111} + b_{2222} - 2b_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{1212} \cos^2 2\varphi, \\ B_{1222} &= \frac{1}{2} (b_{2222} \cos^2 \varphi - b_{1111} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{4} (b_{1122} + 2b_{1212}) \sin 4\varphi,\end{aligned}\tag{2}$$

$$B_{2111} = \frac{1}{2}(b_{2222} \sin^2 \varphi - b_{1111} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{4}(b_{1122} + 2b_{1212}) \sin 4\varphi.$$

где φ – угол намотки стекловолокна (угол между основными линиями упругости ортотропного материала и нитью стекловолокна).

С помощью операторного метода соответствующую систему уравнений движения можно свести к одному разрешающему дифференциальному уравнению восьмого порядка относительно некоторой функции $\Phi(\alpha, \theta, t)$ [1, с.283]:

$$\nabla_1^4 \nabla_2^4 \Phi + \frac{c}{K} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} - \frac{P(t)}{KB_{1111}h} \frac{\partial^2 (\nabla_1^4 \Phi)}{\partial \alpha^2} + \frac{\rho r^2}{KB_{1111}} \frac{\partial^2 (\nabla_1^4 \Phi)}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Здесь r – радиус срединной поверхности оболочки, ρ – плотность, h – толщина оболочки, $K = h^2 / (12r^2)$, $P(t) = P_0 + P_1 \cos(\Omega t)$. Дифференциальные операторы ∇_1^4 и ∇_2^4 определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \nabla_1^4 &= a_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + a_2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \theta^2} + a_3 \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + a_4 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \theta} + a_5 \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \theta^3}, \\ \nabla_2^4 &= \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + a_6 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \theta^2} + a_7 \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + a_8 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \theta} + a_9 \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \theta^3}. \end{aligned}$$

Коэффициенты a_i , $i = \overline{1, 9}$ и c имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{B_{2111}^2}{B_{1111}B_{1212}}, \quad a_2 = \frac{B_{2222}}{B_{1212}} + \frac{2B_{1222}B_{2111}}{B_{1111}B_{1212}} - \frac{2B_{1122}}{B_{1111}} - \frac{B_{1122}^2}{B_{1111}B_{1212}}, \\ a_3 &= \frac{B_{2222}}{B_{1212}} - \frac{B_{1122}^2}{B_{1111}B_{1212}}, \quad a_4 = 2 \frac{B_{1222}}{B_{1212}} \left(1 - \frac{B_{1122}}{B_{1111}} \right), \quad a_8 = \frac{5B_{2111}}{B_{1111}}, \quad a_9 = \frac{5B_{1222}}{B_{1111}}, \\ a_5 &= 2 \left(\frac{B_{2222}B_{2111}}{B_{1111}B_{1212}} - \frac{B_{1122}B_{1222}}{B_{1111}B_{1212}} \right), \quad a_6 = \frac{2(B_{1122} + 2B_{1212})}{B_{1111}}, \quad a_7 = \frac{B_{2222}}{B_{1111}}, \\ c &= \frac{B_{2222}}{B_{1111}} - \left(\frac{B_{1122}}{B_{1111}} \right)^2 + \frac{2B_{1122}B_{1222}B_{2111} - B_{1111}B_{1222}^2 - B_{2222}B_{2111}^2}{B_{1111}^2B_{1212}}. \end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения (3) будем искать в виде, удовлетворяющем краевым условиям Навье (концы оболочки свободно оперты на жесткие круговые диаграммы):

$$\Phi(\alpha, \theta, t) = T(t) \sin(\lambda \alpha), \lambda = \frac{m\pi r}{l}, \quad (4)$$

где l – длина оболочки, m – натуральное число.

Подставляя выражение (4) в уравнение (3), получим

$$\left(hr^2 \rho a_1 \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \left(hB_{1111} \left(c + a_1 K \lambda^4 \right) - \lambda^2 a_1 P(t) \right) T(t) \right) \lambda^4 \sin(\lambda \alpha) = 0. \quad (5)$$

Поскольку уравнение (5) должно удовлетворяться при любом α , будем иметь

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \frac{B_{1111}}{r^2 \rho a_1} \left(c + a_1 K \lambda^4 - \frac{\lambda^2 a_1 P(t)}{hB_{1111}} \right) T(t) = 0. \quad (6)$$

При $T(t) = \text{const}$ из уравнения (6) найдём критическое значение осевой нагрузки для рассматриваемой оболочки

$$P^* = \frac{hB_{1111}}{\lambda^2 a_1} \left(c + K \lambda^4 a_1 \right).$$

Выражение для частоты свободных колебаний получим, подставляя $P(t) = c \cos(\omega t)$. После преобразований будем иметь:

$$\omega^2 = \frac{B_{1111}}{\rho r^2 a_1} \left(c + K \lambda^4 a_1 + \frac{a_1 P_0 \lambda^2}{hB_{1111}} \right).$$

Введем обозначения:

$$\tau = \frac{\Omega t}{2}, \quad \mu = \frac{P_1}{2(P^* - P_0)}.$$

С учетом этого уравнение (6) принимает вид уравнения Матье:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \frac{4\omega^2}{\Omega^2} (1 - 2\mu \cos(2\tau)) T(t) = 0. \quad (7)$$

Отсюда следует, что при данных μ , $2\omega/\Omega$ и $\tau \rightarrow \infty$ решение уравнения (7) будет неограниченно возрастать в областях неустойчивости, ограниченных следующими тремя значениями критических частот [2, с.240]:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{2\omega}{\sqrt{1 \pm \mu + \frac{7}{8}\mu^2 \pm \frac{117}{192}\mu^3}}, \\ \Omega_2 &= \frac{2\omega}{\sqrt{4 - \frac{4}{3}\mu^2}}, \quad \Omega_2 = \frac{2\omega}{\sqrt{4 + \frac{20}{3}\mu^2}}, \\ \Omega_3 &= \frac{2\omega}{\sqrt{9 + \frac{81}{16}\mu^2 \pm \frac{729}{64}\mu^3}}.\end{aligned}\tag{8}$$

Расчет критических частот и построение областей неустойчивости выполнены для оболочки, изготовленной из стеклопластика, который описывается основными модулями упругости $b_{1111} = 1.8$ ГПа, $b_{2222} = 2.47$, $b_{1212} = 0.34$, $b_{1122} = 0.27$ МПа. Геометрические размеры оболочки характеризуются параметрами $\lambda = 0.1$, $h = 0.01$, $\rho = 1850$ кг/м³, $P_0/P_1 = 4.5 \cdot 10^{-5}$. Параметрически заданная кривая $4\omega(\varphi)^2/\Omega(\varphi)^2$ и $\mu(\varphi)$, построенная для различных значений угла намотки стекловолокна φ частично находится во второй области неустойчивости. Предельные значения угла намотки, при которых возникают параметрические колебания, составляют $20^\circ \leq \varphi \leq 25^\circ$ и $83^\circ \leq \varphi \leq 89^\circ$. Также отметим, что размеры области устойчивости возрастают при увеличении отношения $4\omega^2/\Omega^2$.

Литература

1. Соппротивление стеклопластиков / Под ред. И. И. Гольденבלата М., 1968.
2. Zhou Jiqing. Nonlinear vibration. Xi'an, 1998.

КОНЕЧНАЯ ХАРАКТЕРИЗУЕМОСТЬ РЕБЕРНЫХ ГРАФОВ ГИПЕРГРАФОВ ОГРАНИЧЕННЫХ РАНГА И КРАТНОСТИ В КЛАССЕ $(\infty, 1)$ -ПОЛЯРНЫХ ГРАФОВ

О. В. Глебова

В работе рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер, а также гиперграфы без изолированных вершин. Множество вершин и множество (семейство) ребер графа (гиперграфа) H обозначаются через VH и EH соответственно.

Кликкой называется множество попарно смежных вершин графа; максимальная клика максимальна относительно включения.