

Атрымаем рашэнне ў выглядзе: $a = b * \frac{1}{p(s)} + \frac{q(s)}{p(s)}$.

Прыклад. Няхай дадзена лінейнае рознаснае раўнанне $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 1$ з пастаяннымі каэфіцыентамі з пачатковымі ўмовамі $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Тады

$$a_{n+2} = s^2 a - a_0 s^2 - a_1 s = s^2 a - s$$

$$a_{n+1} = sa - a_0 s = sa$$

$$s^2 a - s - 3sa + 2a = \{1\}$$

$$a(s^2 - 3s + 2) = \{1\} + s$$

$$a = (\{1\} + s) * \frac{I}{s^2 - 3s + 2} = (\{1\} + s) * \left(\frac{I}{s-2} - \frac{I}{s-1} \right)$$

$$\frac{I}{s-1} = h * \{1, 1, \dots, 1, \dots\}, \quad \frac{I}{s-2} = h * \{1, 2, \dots, 2^k, \dots\}, \quad (\{1\} + s) * h = \{1, 1, \dots, 1, \dots\}$$

$$a = \{1, 1, \dots, 1, \dots\} * \{1, 2, \dots, 2^k, \dots\} - \{1, 1, \dots, 1, \dots\} * \{1, 1, \dots, 1, \dots\}$$

$$a = \{1, 3, 7, \dots, \sum_{i=0}^k 2^i, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots, k, \dots\}$$

$$a = \{0, 1, 4, \dots, \sum_{i=0}^k 2^i - k, \dots\}.$$

Літаратура

1. Иосида К. Операционное исчисление: Теория гиперфункций / Пер. с англ. В.И. Машанова, Я.В. Радыно; Под ред. Я.В. Радыно. Мн., 1989. (Университетское).

РАСПОЗНАВАНИЕ УНИГРАФОВ

Р. А. Петрович

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из самых распространённых и эффективных подходов к исследованию графов является их декомпозиция. Декомпозиция графа — это

его «разделение» на части, обладающие специальными свойствами. Примером такой декомпозиции является операторная декомпозиция графа из [1], которая далее будет называться просто декомпозицией.

Униграфы, т. е. графы, однозначно определяемые своей степенной последовательностью, представляют собой один из наиболее хорошо изученных классов графов. Работа [2] содержит их полную характеристику.

Целью настоящей работы является разработка линейного алгоритма распознавания униграфов.

2. ОСНОВНАЯ ТЕРМИНОЛОГИЯ

Рассматриваются простые графы G с множеством вершин VG и множеством рёбер EG .

Граф называется *расщепляемым*, если существует разбиение

$$VG = A \cup B \quad (1)$$

его множества вершин VG на клику A и независимое множество B .

Разбиение множества VG в формуле (1) называется *биразбиением*, A – *верхней долей*, B – *нижней долей*.

Упорядоченная тройка (*триада*) (G, A, B) , где G – расщепляемый граф с биразбиением (1), называется *расщеплением* графа G или *расщеплённым графом*.

Множества расщеплённых и простых графов обозначаются через Σ и Γ соответственно.

Композиция $\circ: \Sigma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ определяется следующим образом: если $\sigma \in \Sigma$, $\sigma = (G, A, B)$, $H \in \Gamma$, то

$$\sigma \circ H = (G \cup H) + \{av : a \in A, v \in VH\} \quad (2)$$

(к дизъюнктному объединению графов G и H добавляются рёбра полного двудольного графа $K_{A, VH}$ с долями A и VH) [1].

Далее знак $\circ$ везде опускается.

Если к тому же H – расщепляемый граф с биразбиением $VH = C \cup D$, то композиция $\sigma H = F$ также является расщепляемым графом; $VF = (A \cup C) \cup (B \cup D)$ – его биразбиение.

Формула для умножения триад выглядит следующим образом:

$$(G, A, B)(H, C, D) = (F, A \cup C, B \cup D). \quad (3)$$

Элемент $\sigma \in \Sigma$ называется *разложимым*, если существуют такие $\alpha \in \Sigma$ и $\beta \in \Sigma$, что $\sigma = \alpha\beta$. В противном случае элемент σ называется *неразложимым*.

Граф G называется *разложимым*, если его можно представить в виде произведения $G = \sigma H$. В противном случае граф G называется *неразложимым*.

Важно отметить, что формулы (2), (3) превращают множество простых графов в *операторную алгебру* (Γ, Σ) с *полугруппой операторов* Σ , т. е.:

1. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$;
2. $g(\alpha\beta) = (g\alpha)\beta$ для любого $g \in \Gamma$ и любых $\alpha, \beta \in \Sigma$.

Множество неразложимых элементов в полугруппе Σ обозначается Σ^* ; а множество всех неразложимых графов – Γ^* .

3. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ГРАФА

Любое представление графа G в виде $G = \sigma_1\sigma_2...\sigma_k H$, где $\sigma_i \in \Sigma^*$, $H \in \Gamma^*$ называется *декомпозицией*.

Известно, что произвольный разложимый граф G может быть представлен в виде композиции

$$G = (G_1, A_1, B_1) \dots (G_k, A_k, B_k) G_0 \quad (4)$$

неразложимых компонент, где (G_i, A_i, B_i) – неразложимые расщеплённые графы, $1 \leq i \leq k$, G_0 – неразложимый граф ($G_0 = \emptyset$ в случае, когда граф G – расщепляемый).

В декомпозицию (4) могут входить тройки $T_i = (G_i, A_i, B_i)$ с $B_i = \emptyset$ (такая тройка называется *A-частью*) и с $A_i = \emptyset$ (такая тройка называется *B-частью*). Две A-части A_i и A_j , $i < j$, называются *неразделёнными*, если для каждого k , $i < k < j$, A_k также является A-частью. Аналогично вводится понятие неразделённой B-части. При замене в (4) всех неразделённых A-частей (B-частей) их произведениями получим *нормальную форму графа G*.

Работа [3] содержит линейный относительно числа вершин произвольного заданного графа алгоритм построения его нормальной формы.

4. СТРОЕНИЕ УНИГРАФОВ

Последовательность $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ целых неотрицательных чисел называется *n-последовательностью*.

Если существует граф, степенная последовательность которого с точностью до перестановки совпадает с d , то последовательность d называется *графической*. Этот граф называется *реализацией степенной последовательности d*.

Если все реализации графической последовательности изоморфны, то эта последовательность называется *униграфической*, а её реализация – *униграфом*.

В полугруппе Σ в [2] были введены следующие унарные операции

1. *расщепляемое дополнение* (-):

$$\overline{(G, A, B)} = (\overline{G}, B, A);$$

2. *инвертирование* (I):

$$(G, A, B)^I = (G^I, B, A).$$

Здесь $\overline{G}$ – граф, дополнительный к графу G ; а G^I получается из G после удаления множества рёбер $\{a_1 a_2 : a_1, a_2 \in A\}$ и добавления множества рёбер $\{b_1 b_2 : b_1, b_2 \in B\}$.

Работа [2] содержит описание всех разложимых, неразложимых расщепляемых и неразложимых нерасщепляемых униграфов. Все неразложимые расщепляемые и неразложимые нерасщепляемые графы описываются при помощи конечного списка специальных классов графов.

5. ОСНОВНЫЕ ПУНКТЫ АЛГОРИТМА РАСПОЗНАВАНИЯ

В результате получен алгоритм распознавания, отправными пунктами которого являются:

1. Применение алгоритма из [3] для построения нормальной формы.
2. Процесс нахождения степенных последовательностей сомножителей полученной нормальной формы.
3. Процесс построения по известной степенной последовательности произвольного графа степенных последовательностей графов, дополнительного, инвертированного и дополнительного для инвертированного графа.
4. Описание процесса проверки произвольной степенной последовательности на принадлежность спискам степенных последовательностей неразложимых нерасщепляемых униграфов и неразложимых расщеплённых униграфов.
5. Объединение действий из пунктов 1 – 4 в итоговый алгоритм.

Трудоёмкость каждого из пунктов 1 – 4 равна $O(|VG|)$, пункт 5 включает в себя действие 1, а также последовательное выполнение действий 2 – 4 для каждого элемента разложения (1); в результате получаем линейный относительно числа вершин в графе алгоритм распознавания.

Литература

1. Тышкевич Р. И. Каноническое разложение графа // Доклады АН БССР. 1980. Т. 24. № 8. С. 677–679.
2. Tyshkevich R. Decomposition of graphical sequences and unigraphs // Discrete Math. 2000. Vol. 220. P. 201–238.
3. Тышкевич Р. И., С. В. Суздаль. Декомпозиция графов // Избранные труды Белорусского Государственного Университета. 2001. Т. 6. С. 482–500.