1. Используя ортогонализацию векторов b_i , $i=\overline{1,n}$ по Шмидту, приводим граничное условие (2) к виду $Uy(b)=\gamma$, где $\gamma=z-T\cdot y(a)$ и $U^*U=E$.

2. Решаем задачу Коши для уравнения

$$\Psi'(t)+\Psi(t)P(t)=0, \quad b>t\geq a$$

с начальным условием $\Psi(b)=U$ и находим тем самым на отрезке [*a,b*] квадратную матрицу $\Psi(t)$.

3. Находим вектор-функцию $\gamma(t)$ как решение уравнения

$$\gamma'(t)-\Gamma(t)P(t)\Gamma^*(t)\gamma(t)=\Gamma(t)f(t), \; a<t\leq b,$$

в предположении, что $\Gamma(t)\equiv U$, с начальным условием

$$\gamma(a)=U\cdot(\Psi(a)+T\ \ )^{-1}\cdot(z-\int\limits_a^b\Psi(t)f(t)\ dt)$$

4. Искомое решение граничной задачи (1), (2) находим по формуле $y(t)=U^*\cdot\gamma(t)$.

Замечание 2. Из формулы $y(t)=U^*\cdot\gamma(t)$ в силу унитарности матрицы U следует $\|y(t)\|^2=\|\gamma(t)\|^2$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Таким образом, имеет место благоприятное в вычислительном отношении свойство: компоненты вектор-функции $\gamma(t)$ имеют тот же порядок роста, что и компоненты вектор-функции $y(t)$ – искомого решения граничной задачи (1), (2).

Литература

1. *Самарский А. А., Гулин А. В.* / Численные методы. М., 1989.
2. *Бахвалов Н. С., Жидков Е. П., Кобельников Г. М.* / Численные методы. М., 1987.
3. *Абрамов А. А.* / Журнал вычислительной математики и математической физики. Т 1, №3, 1961. С. 542.
4. *Монастырный П. И.* / Журнал вычислительной математики и математической физики.Т11, № 4, 1971. С. 925.
5. *Монастырный П. И., Метельский Н. Н.* / ДАН БССР. 1972. Т. XVI, №1. С 982.
6. *Монастырный П. И., Кремень Е. В.* / ДНАН Беларуси. 2004. Т. 48, №2. С 5.

О ГИБРИДНЫХ МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. Н. Стельмах

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ряд задач, основанных на математических моделях, использующих различные типы уравнений в отдельных частях расчетной области, приводятся к сеточным уравнениям, которые на различных участках сеточной области имеют различные свойства коэффициентов. Такие задачи нецелесообразно решать классическими методами вычислительной математики[1–3],так как различные свойства коэффициентов вынуждают к использованию более универсальных методов, требующих, как правило, выполнения значительно большего объема вычислительной работы во всей области. Тем самым упускается возможность использовать все преимущества экономичных методов, реализация которых невозможна на всей сеточной области, хотя их реализация была бы эффективной на некоторых из ее подобластей. В работе [4] был предложен гибридный метод решения трехточечных сеточных уравнений, основанный на соединении алгоритмов, соотнесенных к соответствующему интервалу расчетной области. В работе [5] была более полно приведена схема вычислительного алгоритма указанного выше метода и исследованы основные свойства предложенного в [4] алгоритма.

Настоящая работа продолжает исследования начатые в [4,5] и посвящена построению и исследованию алгоритма, основанного на компромиссном соединении методов марш-алгоритма[1], матричной прогонки[2] и редукции[3].

Рассмотрим систему трехточечных сеточных уравнений с разделенными граничными условиями вида:

$$G_0 y_0 + G_1 y_1 = \mu_0, \tag{1}$$

$$A_i^{(s)} y_{i-1} - C_i^{(s)} y_i + B_i^{(s)} y_{i+1} = -F_i^{(s)}, \; i \in I_{(k;t)}^{(s)}, \tag{2}$$

$$G_{N-1} y_{N-1} + G_N y_N = \mu_N, \tag{3}$$

где $A_i^{(s)}, C_i^{(s)}, B_i^{(s)}, G_s, H_s$ – заданные квадратные матрицы порядка M; $I_{(k;t)}^{(s)} = \{i \mid k \le i \le t\}$ – множество индексов $((k,t) = (1,p),(p,q),(q+1,N-1))$, $s = \overline{1,3}$; $F_i^{(s)}, \mu_0, \mu_N$ – известные векторы размерности M; y_i – векторы, подлежащие определению. В совокупности векторы y_i, $i = \overline{0,N}$, образуют решение задачи (1)–(3). Предполагаем, что $\det A_i B_i \ne 0$, $i = \overline{1,N-1}$, $rang[G_0 \mid G_1] = rang[H_{N-1} \mid H_N] = M$ и решение y_i^*, $i = \overline{0,N}$, задачи (1)–(3) существует и единственно. При этом на параметры исходной системы налагается ряд условий(Σ), соотнесенных к соответствующим подинтервалам. Предполагается, что: $B_i^{(1)} = A_i^{(1)} = E$, $C_i^{(1)} = C_1 = const$, при $i \in I_{(1;p)}^{(1)}$ и на данном подинтервале допускается эффективная реализация марш-алгоритма(МА); на подинтревале $I_{(p;q)}^{(2)}$ корректна реализация метода матричной прогонки(МП); при $i \in I^{(3)}_{(q+1;N-1)}$ на (2) возможна реализация метода редукции(МР), т.е. $B^{(3)}_i = A^{(3)}_i = E, \quad C^{(3)}_i = C_2 = const$ при $i \in I^{(3)}_{(q+1,N-1)}$.

Для упрощения дальнейших выкладок предполагаем также, что $G_0 = H_N = E, \quad G_1 = H_{N-1} = 0$.

Описанный здесь гибридный алгоритм будем в соответсвии с введенной в [4] классификацией называть МАПР-VI(по аббревиатуре используемых в алгоритме методов).

2. ФОРМАЛИЗОВАННАЯ СХЕМА ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРЯМОГО ХОДА МЕТОДА МАПР-VI

Применяя формулы прямого хода метода марш-алгоритма, можно выписать условие, связывающие решение задачи (1)–(3) в узлах $p-1$ и p:

$$-C_{p-1}y_{p-1} + B_{p-1}y_p = -F_{p-1}, \tag{4}$$

где значения $C_{p-1}, B_{p-1}, F_{p-1}$ определяются в [1].

Далее переносим граничное условие (4), выполняя прямой ход метода прогонки, в точки $q, q+1$:

$$-C^{(*)}_q y_q + B^{(*)}_q y_{q+1} = -F^{(*)}_q, \tag{5}$$

где $C^{(*)}_q = E, B^{(*)}_q = \alpha_{q+1}, F^{(*)}_q = \beta_{q+1}$.Коэффициенты $\alpha_{q+1}, \beta_{q+1}$ определяются по известному правилу изложенному в [2].

Таким образом, на заключительном подинтервале мы получили сеточную граничную задачу с разделенными условиями, для решения которой, при сделанных предположениях Σ(см.п.1), можно эффективно применить метод редукции.

3. ОБРАТНЫЙ ХОД МЕТОДА МАПР-VI

1. В обратном ходе метода редукции[3] находим $y_i, \quad i \in I^{(3)}_{(q+1,N-1)}$.

2. Далее, используя известные уже значения y_q, y_{q+1}, находим решения задачи (1)–(3) на $I^{(2)}_{(p,q)}$ по формуле[2]:

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1},\ i = q-1, q-2..., p. \tag{9}$$

3. Поскольку на подинтервале $I^{(1)}_{(1,p)}$ известны $y_{p-1} = y^*_{p-1}, \quad y_p = y^*_p$, то оставшиеся значения $y_i, \quad i = 1,2,..., p-2$, вычисляем по формуле[1]:

$$y_{i-1} = K_i y_{p-1} + L_i y_p + M_i, \quad i \le p. \tag{10}$$

4. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕТОДА МАПР-VI

Реализация гибридного метода МАПР-VI особенно эффективна для сеточных задач (1)–(3), в которых имеет место следующее соотношение между длинами подинтервалов $I^{(1)}_{(1,p)}, I^{(2)}_{(p,q)}$ и $I^{(3)}_{(q,N-1)}$: $p >> q-p \ge N-q$.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_i(C_1)$ *– собственные значения матрицы* C_1. *Если* $|\lambda_i(C_1)|\le 2$ *и* $\lambda_j \ne 2\cos\frac{l\pi}{p-2}$, $l=1,2,...,p-3$, $i=1,...,M$, *то марш-алгоритм для задачи (2) на подинтервале* $I^{(1)}_{(1;p)}$ *численно устойчив. При* $|\lambda_i(C_1)|>2$ *алгоритму характерен экспоненциальный по числу неизвестных рост погрешности.*

Теорема 2. *Пусть решение сеточной граничной задачи (1)–(3) существует и единственно, выполняются условия* Σ *и выполняются неравенства* $\|C_i^{-1}A_i\|+\|C_i^{-1}B_i\|\le 1$, $i=p,p+1,...,q$, *тогда гибридный метод МАПР-VI для задачи (1)–(3) устойчив.*

Теорема 3. *Если исходная задача (1)–(3) однозначно разрешима, то и МАПР-VI однозначно разрешим.*

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В целях апробации и характеристики вычислительных свойств разработанных алгоритмов был выполнен ряд вычислительных экспериментов по решению прикладных и калибровочных сеточных граничных задач. Ниже в целях иллюстрации приведены некоторые результаты численного решения типичной сеточный задачи вида (1)–(3) методом МАПР-VI(*табл.* 1). В *табл.* 2 приводится сравнение методов МАПР-VI и метода матричной прогонки. Полученные результаты позволяют сделать вывод об эффективности предложенного в работе метода для решения указанного класса задач.

Таблица 1

Сравнительная характеристика значений точного и приближенного решения(МАПР-VI)

Номер узла	Приближенное решение	Точное решение	Абсолютная погрешность
0	1,00000	1,00000	0,00000
10	1,09222	1,10000	0,00778
20	1,18647	1,20000	0,01353
30	1,28839	1,30000	0,01161
40	1,38905	1,40000	0,01095
50	1,48936	1,50000	0,01064
60	1,58953	1,60000	0,01047
70	1,68964	1,70000	0,01036
80	1,78971	1,80000	0,01029
90	1,90000	1,90000	0,00000

Таблица 2

Сравнительная характеристика абсолютной погрешности решения на подинтервале $I_{(1;p)}^{(1)}$ получаемого по методу матричной прогонки и МАПР-VI

Номер узла	Погрешность(МАПР-VI)	Погрешность(матричная прогонка)
0	0,00000	0,00000
2	0,04940	0,23649
4	0,02766	0,07484
6	0,03391	0,30979
8	0,04665	0,42112
10	0,00778	0,15644

Литература

1. *Самарский А. А.* //Введение в численные методы.-М.:Наука,1982.
2. *Самарский А. А., Гулин А. В.* //Численные методы.-М.:Наука,1989.
3. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* //Методы решения сеточных уравнений.-М.:Наука, 1978.
4. *Монастырный П. И.* //Доклады НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 1. С. 35--37.
5. *Монастырный П. И., Стельмах С. Н.* //Деп. ВИНИТИ №495–В2005 13.04.05. С.20.
6. *Ланкастер П.* //Теория матриц.-М.Наука,1978.
7. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* //Функциональный анализ и интегральные уравнения.-Минск,БГУ, 2003.
8. *Монастырный П. И., Кремень Ю. А., Болотько Л. Л.* //Доклады АН Беларуси. 1995. Т.39. №1 - С.14–18.
9. *Монастырный П. И., Азаров А. И., Артюгин В. Г.* //Доклады АН Беларуси. 1991.Т.35. №12. С.1065–1068.

О ПЛОТНОСТИ МНОЖЕСТВА ЗНАЧЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Н. А. Хатимцов

В настоящей работе доказана плотность множества значений нелокальной задачи Коши для гиперболического дифференциального уравнения второго порядка с переменными областями определения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На ограниченном интервале $]0,T[$ задается дифференциально-операторное уравнение

$$\mathsf{L}(t)u \equiv \left(d^2u/dt^2\right) + A(t)u(t) = f(t),\ t \in]0,T[, \qquad (1)$$

при нелокальных начальных условиях