

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВОЗНИКАЮЩИЕ В МОДЕЛИ КОКСА-ИНГЕРСОЛЛА-РОССА

В. В. Киевич, А. К. Хмызов

В последнее десятилетие развитие стохастического анализа ускоряется в связи с его активным применением в области финансовой математики. Для успешной работы на финансовом рынке, кроме опыта, необходимо обладать соответствующими знаниями, чтобы принимать обоснованные решения. Импульсом для активного применения стохастической теории в финансовой математике стало появление в 1973 году работ Майрона Шоулса и Фишера Блэка по вопросам определения цен финансовых инструментов.

Рыночные цены являются одними из важнейших характеристик финансовых активов, доступных для анализа всем участникам рынка. Динамика рыночных цен, вообще говоря, имеет случайный характер, что приводит к неопределенности последствий принимаемых финансовых решений. Для уменьшения риска, связанного с возможными финансовыми потерями, необходимы математические модели, которые описывают соответствующие процессы.

Большинство моделей рынка ценных бумаг описывается стохастическими дифференциальными уравнениями. Целью работы являлось нахождение динамики поведения цены облигации, при условии, что краткосрочная процентная описывается стохастическим уравнением известным как модель Кокса Ингерсолла Росса. Напомним некоторые основные понятия.

Облигация – долговое обязательство на фиксированную сумму денег, которая должна быть доставлена в заданную дату в будущем. Они выпускаются государством, банками, корпорациями, с целью аккумуляции капитала. Каждую облигацию в начальный момент времени характеризуют следующие параметры:

- момент погашения.
- номинальная стоимость – сумма, выплачиваемая владельцу в момент погашения.
- текущая (краткосрочная) процентная ставка.

В этой работе мы рассматриваем дисконтированные облигации, т.е. облигации с единичной стоимостью погашения. Пусть $P(t, T)$ обозначает цену, наблюдаемую в момент времени $t, t \leq T$, дисконтированной облигации, погашаемой в момент времени T , с единичной стоимостью погашения

$$P(T, T) = 1.$$

Доходность до погашения $y(t, T)$ является внутренней нормой отдачи в момент времени t на облигацию с датой погашения T :

$$y(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T), \quad t < T$$

Определим краткосрочную процентную ставку $r(t)$ как мгновенную спот-ставку (или ставку непрерывного конвертирования банковского счета):

$$r(t) = y(t, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} y(t, t + \tau).$$

Предполагаем, что процентная ставка – марковский процесс, т.е. будущее развитие краткосрочной процентной ставки определяется ее настоящей стоимостью и не зависит от прошлого поведения, которое привело ее к настоящему значению.

Эмпирические исследования показывают, что одним из наилучших приближений поведения краткосрочной процентной ставки $r(t)$, является модель Кокса-Ингерсолла-Росса [1], согласно которой $r(t)$ – решение следующего уравнения:

$$dr(t) = \beta(r(t))^{3/2} dW(t),$$

где параметр $\beta \in \mathbb{R}$, $W(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Так как $r(t)$ – марковский процесс, $P(t, T)$ можно представить в виде неслучайной функции $G(t, r, T)$, вычисленной в $t, r(t), T$, то есть

$$P(t, T) = G(t, r(t), T).$$

В силу того, что на рынке отсутствует возможность арбитража, из общей теории финансовой математики [2] можно записать уравнение в частных производных, которому удовлетворяет неизвестная функция $G(t, r, T)$:

$$-rG(t, r, T) + \frac{1}{2} G_{rr}(t, r, T) \beta^2(r)^3 + G_t(t, r, T) = 0. \quad (1)$$

Из экономических соображений на функцию $G(t, r, T)$ следует наложить следующие условия:

$$\begin{cases} G(T, r, T) = 1 \\ G(t, r, T) \geq 0 \\ G(t, r, T) - \text{ограниченная функция} \end{cases} \quad (2)$$

Чтобы решить уравнение (1), произведем следующую замену

$$G(r, t) = f((t - T)r).$$

Тогда уравнение (1) приобретет вид

$$\frac{1}{2}\beta^2((t - T)r)^2 f''((t - T)r) + f'((t - T)r) - f((t - T)r) = 0. \quad (3)$$

Положим $(t - T)r = a$. Тогда уравнение (3) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2}\beta^2(a)^2 f''(a) + f'(a) - f(a) = 0. \quad (4)$$

Заметим, что т.к. $t \leq T$, то $a \leq 0$.

Условия (2) перейдут в следующие условия

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(a) \geq 0 \\ f(a) - \text{ограниченная функция} \end{cases}$$

Общее решение уравнения (4) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(a) = & 2 \frac{-\beta - \sqrt{8 + \beta^2}}{2\beta} (-a)^{\frac{\beta + \sqrt{8 + \beta^2}}{2\beta}} \beta^{\frac{\beta + \sqrt{8 + \beta^2}}{\beta}} C[2] \cdot {}_1F_1\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{8 + \beta^2}}{2\beta}, 1 - \frac{\sqrt{8 + \beta^2}}{\beta}, \frac{2}{\beta^2 a}\right] + \\ & + 2 \frac{-\beta + \sqrt{8 + \beta^2}}{2\beta} (-a)^{\frac{\beta - \sqrt{8 + \beta^2}}{2\beta}} \beta^{\frac{\beta - \sqrt{8 + \beta^2}}{\beta}} C[1] \cdot {}_1F_1\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8 + \beta^2}}{2\beta}, 1 + \frac{\sqrt{8 + \beta^2}}{\beta}, \frac{2}{\beta^2 a}\right], \end{aligned}$$

где ${}_1F_1(u, v, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u)_k z^k}{(v)_k k!}$, – вырожденная гипергеометрическая функция, здесь $(u)_k = u(u + 1) \dots (u + k - 1)$.

Так как $1 - \frac{\sqrt{8 + \beta^2}}{\beta} < 0$, то при $a \rightarrow -\infty$ по свойствам ${}_1F_1(u, v, z)$ (см., напр., [3]) получим

$$(-a)^{\frac{\beta + \sqrt{8 + \beta^2}}{2\beta}} {}_1F_1\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{8 + \beta^2}}{2\beta}, 1 - \frac{\sqrt{8 + \beta^2}}{\beta}, \frac{2}{\beta^2 a}\right] \rightarrow \infty,$$

поэтому, чтобы решение $f(a)$ было ограниченным, полагаем $C[2] = 0$. Тогда решение приобретет вид:

$$f(a) = 2 \frac{-\beta + \sqrt{8 + \beta^2}}{2\beta} (-a)^{\frac{\beta - \sqrt{8 + \beta^2}}{2\beta}} \beta^{\frac{\beta - \sqrt{8 + \beta^2}}{\beta}} C[1] \cdot {}_1F_1\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8 + \beta^2}}{2\beta}, 1 + \frac{\sqrt{8 + \beta^2}}{\beta}, \frac{2}{\beta^2 a}\right].$$

Обозначив $v = \frac{\sqrt{8 + \beta^2}}{\beta}$ решение можно преобразовать к виду:

$$f(a) = \left(\frac{v^2 - 1}{4a}\right)^{\frac{v-1}{2}} \cdot C[1] \cdot {}_1F_1\left[\frac{1}{2}(v-1), 1+v, \frac{v^2 - 1}{4a}\right]. \quad (4)$$

Значение константы $C[1]$ можно найти из условия $f(0) = 1$.

$$1 = C[1] \cdot \lim_{a \rightarrow -0} \left[\left(\frac{v^2 - 1}{4a}\right)^{\frac{v-1}{2}} \cdot {}_1F_1\left[\frac{v-1}{2}, 1+v, \frac{v^2 - 1}{4a}\right] \right]. \quad (5)$$

В силу того, что при $a \rightarrow -0$, получаем $\frac{v^2 - 1}{4a} \rightarrow -\infty$. Воспользуемся асимптотическим представлением вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1(a, b, z)$ при $z \rightarrow \infty$, которое имеет следующий вид (см., напр., [3]):

$${}_1F_1(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right] + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

где $\Gamma(a)$ – гамма функция.

Используя его в (5) получим, что $C[1] = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(1+v)}$.

Подставляя $C[1]$ в (4) и окончательно получаем, что решение (1) с условиями (2) имеет вид:

$$G(t, r, T) = \frac{\Gamma(\frac{v+3}{2})}{\Gamma(1+v)} \cdot \left(\frac{v^2 - 1}{4(T-t)r}\right)^{\frac{v-1}{2}} \cdot {}_1F_1\left(\frac{v-1}{2}, v+1, \frac{v^2 - 1}{4(t-T)r}\right),$$

где $v = \frac{\sqrt{8 + \beta^2}}{\beta}$, ${}_1F_1(u, v, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u)_k z^k}{(v)_k k!}$, $(u)_k = u(u+1) \dots (u+k-1)$.

Таким образом, $P(t, T) = G(t, r(t), T)$ и цена, при сделанных в работе предположениях о финансовом рынке имеет вид

$$G(t, r(t), T) = \frac{\Gamma(\frac{v+3}{2})}{\Gamma(1+v)} \cdot \left(\frac{v^2 - 1}{4(T-t)r(t)}\right)^{\frac{v-1}{2}} \cdot {}_1F_1\left(\frac{v-1}{2}, v+1, \frac{v^2 - 1}{4(t-T)r(t)}\right).$$

Литература

1. John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Jr.; Stephen A. Ross An analysis of variable rate loan contracts. // The Journal of Finance, Vol. 35, 1980.

2. *Ширяев А.Н.* Основы финансовой стохастической математики. В 2 т. / Фазис М., 1998. Т. 1: Факты. Модели.
3. *Никифоров А.Ф., Уваров В.В.* Основы теории специальных функций. / М.: Наука, 1974.

ДВУХКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА СРАВНЕНИЯ СТРУКТУР БЕЛКОВ

Т. В. Кирис

Все биологические процессы осуществляются при непременном участии белков. Белок состоит из линейной полипептидной цепи, которую можно изобразить линейной последовательностью аминокислотных остатков. Вторичной структурой белка называют пространственное расположение атомов главной цепи молекулы на отдельных ее участках. К основным регулярным вторичным структурам относятся α -спирали и β -складки (рис. 1, б). Третичной структурой называют распределение в пространстве всех атомов белковой молекулы (рис. 1, а).

Несмотря на наличие различных алгоритмов [1-4] сравнения белков, остается открытым вопрос об определении лучшего сравнения, так как нет корректного стандартного сравнения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть два белка представлены координатами C_α -атомов в пространстве и известны их элементы вторичной структуры. Задача состоит в нахождении евклидова совмещения белков как множеств точек в пространстве, которое минимизирует среднеквадратичное отклонение. Первичная структура белка при этом не учитывается.

Предлагаемый в докладе алгоритм IPA состоит из двух шагов. На первом шаге находятся начальные приближения на основе элементов вторичной структуре, которые улучшаются на втором шаге с помощью алгоритма поиска ближайшей точки (FICP)[5]. Алгоритм поиска ближайшей точки состоит из трех шагов: каждой точке из одного множества ставят в соответствие ближайшую точку из другого множества; вычисляют движение, минимизирующее среднеквадратичное отклонение; применяют это движение к первому множеству. Эти три шага повторяются. В зависимости от преследуемых целей, результатом может быть не одно, а несколько совмещений белков.

Процедура повторяется для различных начальных приближений. Далее формируется множество решений, более предпочтительных относительно среднеквадратичного отклонения и количества совмещенных точек.

Данный алгоритм был реализован на C++ с использованием программного пакета MATLAB под управлением Windows.