весь список $N(i)$ на множестве индивидуальных непересекающихся списков $N_1(i)$, ..., $N_p(i)$, $p < \deg(i)$, и далее для каждого из списков $N_k(i)$, $k=1, \ldots, p$, выполнять описанные действия. Таким образом, верно

Утверждение 1. *При равномерной нагрузке и отсутствии отказов узлов, входящих в кластер, структуру данных S можно создать по спискам смежности графа* $G=(V,E)$ *за время* $(n+m)/k$, *где* $m = |E|$, $n=|V|$, k *- количество машин в динамическом кластере.*

Операция удаления вершины в структуре данных S реализована с помощью прохождения всех связей соответствующего «столбца» структуры данных и удаления всех связей этой вершины в каждом из соответствующих «строк» – списков смежностей. Создав дополнительные массивы и предоставив специальные Map- и Reduce- алгоритмы можно показать, что справедливо следующее

Утверждение 2. *При равномерной нагрузке и отсутствии отказов узлов, входящих в кластер, удаление вершины v из графа G можно реализовать за время* d/k, *где* $d = \deg(v)$, k *– количество машин в динамическом кластере.*

Если граф имеет значительные размеры, то невыгодно заново пересылать необходимые данные каждому из Map-алгоритмов и лучше с помощью некоторого сервиса автоматически предоставлять алгоритмам доступ ко всему графу или какой-либо его части. Можно показать, что хранение структуры данных S допускает такую организацию, что возможны как репликация графа на множество машин кластера, так и эффективный доступ каждого из алгоритмов к необходимым данным.

Литература

1. *Dean J., Chemawat S.,* MapReduce: Simplified Data Processing on Large Clusters // OSDI'04: Sixth Symposium on Operating System Design and Implementation, San Francisco, CA, December, 2004, p. 137–150.
2. *Суздаль С. В., Перез Чернов А. Х,* Специальные структуры данных для задач на графах, связанных с понятиям клики или с модульными декомпозициями // Вестник БГУ, Сер. 1, 2007. С. 103–108.

ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫ *F*-СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВАХ ПОРЯДКА 6 ПСЕВДООРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП *O*(2, *K*)

А. С. Самсонов

Геометрия однородных пространств в значительной степени характеризуется инвариантными аффинорными структурами, образующими алгебру. Известно [1], что в случае однородных регулярных Ф-пространств эта алгебра содержит коммутативную подалгебру $A(\theta)$ канонических аффинорных структур. Свойства указанных объектов представляют интерес для Ф-пространств некомпактных групп Ли, в частности, псевдоортогональной группы $O(p, q)$.

В данной работе рассматривается серия однородных Ф-пространств групп Ли $O(2, k)$ ($k \geq 2$) порядка 6. Установлено, какие из возникающих инвариантных аффинорных f-структур ($f^3 + f = 0, f \neq 0$) принадлежат такому классу обобщенной эрмитовой геометрии [2] как приближенно келеровы f-структуры (NKf-структуры), а какие не попадают в него.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть G – связная группа Ли с заданным автоморфизмом Ф, G^{Φ} – подгруппа его неподвижных точек, G_o^{Φ} – компонента единицы подгруппы G^{Φ}. Пространство G/H называется однородным Ф-пространством [3], если H – замкнутая подгруппа в G и $G_o^{\Phi} \subset H \subset G^{\Phi}$.

Пусть G/H – однородное Ф-пространство порядка n ($\Phi^n = \mathrm{id}$), $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ – соответствующие алгебры Ли, $\varphi = d\Phi_{\mathrm{e}}$ – автоморфизм алгебры $\boldsymbol{g}$. Пространство G/H *редуктивно* [4] с каноническим редуктивным разложеним $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h} \oplus \boldsymbol{m}$. Обозначим $\theta = \varphi|_{\boldsymbol{m}}$.

Напомним, что *аффинорной структурой* на многообразии называется тензорное поле типа (1, 1). Для однородного многообразия G/H множество A всех инвариантных аффинорных структур является алгеброй над $\boldsymbol{R}$. Пусть F – инвариантный аффинор на G/H. Тогда F полностью определяется значением F_o в точке $p_o = H$, где структура F_o инвариантна относительно $\mathrm{Ad}(H)$ (поэтому будем применять одни и те же обозначения для F и F_o). Инвариантная аффинорная структура F на регулярном Ф-пространстве G/H называется *канонической* [1], если ее значение F_o является полиномом от θ. Легко видеть, что алгебра $A(\theta)$ канонических аффинорных структур является коммутативной подалгеброй в A.

Классические примеры аффинорных структур: f-структуры ($f^3 + f = 0$, $f \neq 0$); f-структуры гиперболического типа (или h-структуры, $h^3 - h = 0$, $h \neq 0$). Частными случаями являются почти комплексные структуры J ($J^2 = -1$) и структуры почти произведения P ($P^2 = 1$) соответственно.

Будем использовать обозначение $u = \begin{cases} l, & \text{\textit{если} } n = 2l+1 \\ l-1, & \text{\textit{если} } n = 2l \end{cases}$ в следующей теореме для нахождения f-структур.

Теорема 1 [1] Пусть G/H – Ф-пространство порядка n ($n \geq 3$). Все нетривиальные канонические f-структуры на G/H могут быть заданы операторами

$$f=\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{u}\left(\sum_{j=1}^{u}\zeta_j \sin\frac{2\pi mj}{n}\right)\left(\theta^m-\theta^{n-m}\right),$$

где $\zeta_j \in \{-1, 0, 1\}$, $j = 1, 2, \ldots u$, причем среди чисел ζ_j есть отличные от нуля.

В данной работе также будет рассматриваться принадлежность f-структур следующему классу обобщенной эрмитовой геометрии: метрическая f-структура называется *приближенно келеровой* f-структурой (или *NKf-структурой*: nearly Kähler f-structure) [5], если выполняется условие $\nabla_{fX}(f)fX = 0$ для связности Леви-Чивита ∇ (псевдо-)риманова многообразия (M, g) и любого гладкого векторного поля X на M. Заметим, что критерием принадлежности инвариантной метрической f-структуры классу NKf (для естественно редуктивных однородных пространств) является условие (см. [5]):

$$[fY, f^2Y] \in \boldsymbol{h} \text{ для } \forall\ Y \in \boldsymbol{m}. \tag{1}$$

ПРОСТРАНСТВА $M_K = O_+^{\uparrow}(2, K)/O_+^{\uparrow}(2, K)^{\Phi}$ И КАНОНИЧЕСКИЕ F-СТРУКТУРЫ

Рассмотрим связную компоненту единицы (см. [6]) $G = O_+^{\uparrow}(2, k)$ псевдоортогональной группы $O(2, k)$, $k \geq 2$. Рассмотрим также внутренний автоморфизм группы G:

$$\Phi\colon G \to G,\ g \to sgs^{-1}, \tag{2}$$

где $s=\begin{pmatrix} J & 0\\ 0 & I_{1,(k-1)}\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$, $I_{1,(k-1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -E_{k-1}\end{pmatrix}$.

Легко показать, что автоморфизм Φ имеет порядок 6. Тогда соответствующий автоморфизм $\varphi = d\Phi_e$ алгебры Ли $\boldsymbol{o}(2, k)$ также имеет порядок 6, при этом $\varphi(X) = sXs^{-1}$, где $X \in \boldsymbol{o}(2, k)$. Обозначим через M_k однородное Φ-пространство $O_+^{\uparrow}(2, k)/O_+^{\uparrow}(2, k)^{\Phi}$ порядка 6.

Для дальнейших вычислений будем использовать запись элемента $X \in \boldsymbol{o}(2, k)$ в блочном виде, в соответствии со строением алгебры Ли $\boldsymbol{o}(p, q)$ (см. [6]):

$$X=\begin{pmatrix} A_{2\times 2} & B_{2\times k}\\ B^t_{2\times k} & C_{k\times k}\end{pmatrix}, \text{ где } A^t_{2\times 2} = -A_{2\times 2},\ C^t_{k\times k} = -C_{k\times k}.$$

Обозначим $A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$, $B_{2\times k}=\begin{pmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,k}\\ b_{2,1} & \ldots & b_{2,k}\end{pmatrix}$, $C_{k\times k}=\begin{pmatrix} 0 & C_{1\times(k-1)}\\ -C^t_{1\times(k-1)} & C_{(k-1)\times(k-1)}\end{pmatrix}$,

где $C^t_{(k-1)\times(k-1)} = -C_{(k-1)\times(k-1)}$, $C_{1\times(k-1)}$ произвольная строка.

Отображение φ каждому X ставит в соответствие

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} A_{2\times 2} & B'_{2\times k} \\ \left(B'_{2\times k}\right)^t & C'_{k\times k} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $B'_{2\times k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(b_{1,1}+\sqrt{3}b_{2,1}\right) & -\frac{1}{2}\left(b_{1,2}-\sqrt{3}b_{2,2}\right) & \ldots & -\frac{1}{2}\left(b_{1,k}-\sqrt{3}b_{2,k}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}b_{1,1}+b_{2,1}\right) & \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}b_{1,2}-b_{2,2}\right) & \ldots & \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}b_{1,k}-b_{2,k}\right) \end{pmatrix}$,

$C'_{k\times k} = \begin{pmatrix} 0 & -C_{1\times(k-1)} \\ C^t_{1\times(k-1)} & C_{(k-1)\times(k-1)} \end{pmatrix}$.

Определим вид подалгебры $\boldsymbol{h}$ неподвижных точек: $\boldsymbol{h} = \{X \in \boldsymbol{g} \mid sXs^{-1} = X\}$.

Имеем: $\boldsymbol{h} = \left\{ \begin{pmatrix} A_{2\times 2} & 0_{2\times k} \\ 0_{k\times 2} & C''_{k\times k} \end{pmatrix} \middle| C''_{k\times k} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times(k-1)} \\ 0_{(k-1)\times 1} & C_{(k-1)\times(k-1)} \end{pmatrix} \right\}$.

Вычислим теперь каноническое редуктивное дополнение (см. [4]) $\boldsymbol{m}$ = $(\varphi - id)\,\boldsymbol{g}$:

$$\boldsymbol{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B_{2\times k} \\ B^t_{2\times k} & C'''_{k\times k} \end{pmatrix} \middle| C'''_{k\times k} = \begin{pmatrix} 0 & C_{1\times k} \\ -C^t_{1\times k} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пусть $Y = \begin{pmatrix} 0 & B_{2\times k} \\ B^t_{2\times k} & C'''_{k\times k} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{m}$. Учитывая действие оператора φ (см. (3)) и полученный вид подпространства $\boldsymbol{m}$, запишем действие оператора $\theta = \varphi|_{\boldsymbol{m}}$:

$$\theta(Y) = \begin{pmatrix} 0 & B'_{2\times k} \\ \left(B'_{2\times k}\right)^t & C^{(4)}_{k\times k} \end{pmatrix},$$

где $B'_{2\times k}$ такое же, как и в (3), $C^{(4)}_{k\times k} = \begin{pmatrix} 0 & -C_{1\times(k-1)} \\ C^t_{1\times(k-1)} & 0_{(k-1)\times(k-1)} \end{pmatrix}$.

Запишем теперь формулы для всех канонических f-структур, используя теорему 1:

$f_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\theta + \theta^2 - \theta^4 - \theta^5)$; $f_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\theta - \theta^2 + \theta^4 - \theta^5)$; $f_3 = f_1 + f_2$; $f_4 = f_1 - f_2$.

Перейдем к однородным Ф-пространствам M_k. Возьмем $Y = \begin{pmatrix} 0 & B_{2\times k} \\ B_{2\times k}^t & C_{k\times k} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{m}$, где $B_{2\times k} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & \dots & b_{2,k} \end{pmatrix}$, $C_{k\times k} = \begin{pmatrix} 0 & C_{1\times(k-1)} \\ -C_{1\times(k-1)}^t & 0_{(k-1)\times(k-1)} \end{pmatrix}$.

Запишем действие указанных структур на однородных Ф-пространствах M_k:

$$f_1(Y) = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & B_1 \\ B_1^t & 0_{k\times k} \end{pmatrix}, \text{ где } B_1 = \begin{pmatrix} b_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ -b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

$$f_2(Y) = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & B_2 \\ B_2^t & 0_{k\times k} \end{pmatrix}, \text{ где } B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b_{2,2} & \dots & -b_{2,k} \\ 0 & b_{1,2} & \dots & b_{1,k} \end{pmatrix};$$

Проверим условие (1) для каждой f-структуры:

$[f_1(Y),\ f_1^2(Y)] = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{2\times k} \\ 0_{k\times 2} & 0_{k\times k} \end{pmatrix}$, где $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -b_{1,1}^2 - b_{2,1}^2 \\ b_{1,1}^2 + b_{2,1}^2 & 0 \end{pmatrix}$, поэтому $[f_1(Y),\ f_1^2(Y)] \in \boldsymbol{h}$ для $\forall Y \in \boldsymbol{m}$.

Аналогично получаем: $[f_2(Y),\ f_2^2(Y)] \in \boldsymbol{h}$, $[f_3(Y),\ f_3^2(Y)] \in \boldsymbol{h}$, $[f_4(Y),\ f_4^2(Y)] \notin \boldsymbol{h}$. Итак, получен следующий результат:

Теорема 2 Для псевдоримановых многообразий $M_k = G/G^{\Phi}$ групп Ли $G = O_{+}^{\uparrow}(2, k)$, $k \geq 2$ с естественно редуктивной метрикой g канонические f-структуры f_1, f_2, f_3 являются NKf-структурами, структура f_4 не принадлежит классу NKf.

Литература

1. *Балащенко В. В., Степанов Н.А.* // Мат. Сб. 1995. Т. 186. № 11. С. 3 – 34.
2. *Кириченко В. Ф.* // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. 1986. Т. 18. С. 25 – 71.
3. *Феденко А. С.* Пространства с симметриями. Мн., 1977.
4. *Степанов Н. А.* // Изв. ВУЗов. Математика. 1967. № 3. С. 88 – 95.
5. *Balashchenko V. V.* // Contemporary Mathematics. 2001. V. 288. P. 263 – 267.
6. *Постников М. М.* Линейная алгебра. Лекции по геометрии. Семестр II. М., 1986.