ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ МАЗУРКЕВИЧА-МУРА

З. Н. Силаева

Будем рассматривать упорядоченные метрические пространства, база топологии которых – множество всех интервалов. (Понятие упорядоченного множества, интервала в упорядоченном множестве см. [1]).

Определение. Пусть *X*, *Y* – упорядоченные метрические пространства. Отображение $f: X \to Y$ называется изотонным отображением, если для любых $a < a'$ ($a, a' \in X$) выполняется $f(a) < f(a')$.

Определение. Наименьшим (наибольшим) элементом в упорядоченном множестве *X* называется элемент x_0, такой что для всех $x \in X$ выполняется $x \ge x_0$ (соответственно, $x \le x_0$).

Ясно, что наименьший (наибольший) элемент единственен.

Лемма. В упорядоченном метрическом компакте *X* существуют наибольший и наименьший элементы.

Предложение 1. Пусть *X*, *Y* – линейно упорядоченные метрические компакты, в которых любой интервал непуст. Тогда для любых счетных всюду плотных множеств $A \subset X$, $B \subset Y$ таких, что *A* и *B* не содержат наибольшего и наименьшего элементов компактов *X* и *Y*, существует биекция $f: A \to B$, сохраняющая порядок.

Доказательство. Занумеруем элементы множеств *A* и *B* каким-либо образом: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$.

Шаг 1. Элементу $a_1 \in A$ поставим в соответствие $b_1 \in B$. Из *X* образуем два компакта: $\Delta_1^{(1)} = \{x \in X \mid x \le a_1\}$ и $\Delta_2^{(1)} = \{x \in X \mid x \ge a_1\}$, из *Y* образуем компакты $\delta_1^{(1)} = \{y \in Y \mid y \le b_1\}$ и $\delta_2^{(1)} = \{y \in Y \mid y \ge b_1\}$. Т.к. множество *A* не содержит наибольшего и наименьшего элементов компакта *X*, а множество *B* не содержит наибольшего и наименьшего элементов компакта *Y*, то каждый из компактов $\Delta_i^{(1)}$, $\delta_i^{(1)}$ ($i = 1,2$) состоит более чем из одной точки. Точки a_1, b_1 будем называть выбранными, остальные точки множества $A \cup B$ – невыбранными. $\Delta_i^{(1)}$ и $\delta_i^{(1)}$ ($i = 1,2$) назовем соответствующими компактами 1-го ранга.

Шаг 2. Точке $b_2 \in B$ поставим в соответствие невыбранную точку $a_{i2} \in A$ так, чтобы точки b_2 и a_{i2} принадлежали соответствующим компактам первого ранга. Элементы a_1, a_{i2} образуют разбиение *X* на компакты $\Delta_i^{(2)}$, элементы b_1, b_2 – разбиение *Y* на компакты $\delta_i^{(2)}$ ($i = \overline{1,3}$). Будем называть $\Delta_i^{(2)}$ и $\delta_i^{(2)}$ ($i = \overline{1,3}$) соответствующими компактами 2-го ранга, а точки a_{i2} и b_2 – выбранными. Каждый из компактов второго ранга состоит при этом более чем из одной точки.

Шаг 3. Пусть точка a_2 – невыбранная. Поставим ей в соответствие невыбранную точку $b_{i3} \in B$ так, чтобы a_2 и b_{i3} принадлежали соответствующим компактам второго ранга. Из X по аналогии с предыдущим шагом построим компакты $\Delta_i^{(3)}$, из Y – $\delta_i^{(3)}$ ($i = \overline{1,4}$) – компакты 3-го ранга, каждый из которых состоит более чем из одной точки. Точки a_2, b_{i3} будем теперь считать выбранными.

Если после второго шага точка a_2 оказалась уже выбранной, то вместо a_2 на третьем шаге возьмём невыбранную точку множества A с наименьшим индексом. Теперь ясно, как продолжить процесс построений.

В результате получим отображение $f : A \to B$. Для любого $i \in N$ a_i и b_i будут выбраны либо по порядку следования индексов, либо путём соответствия. Отображение f является взаимно-однозначным и изотонным в силу способа построения.

Предложение 2. Пусть X – упорядоченный метрический компакт, любой интервал которого непуст. Тогда X гомеоморфен отрезку I=[0,1].

Доказательство. Компакт X является сепарабельным множеством. Значит, существует $A \subset X$, A – счётное всюду плотное множество, не содержащее наибольшего и наименьшего элементов компакта X. Множество $B = Q \setminus \{0,1\}$ – счётное всюду плотное множество отрезка I. По предложению 1, существует $f : A \to B$ – изотонная биекция. Построим на основе f гомеоморфизм $\hat{f} : X \to I$.

Т.к. A – всюду плотное в X множество, то для любого $x \in X$ существует последовательность $\{a_i\} \subset A$, такая что $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ и $x = \lim_{i\to\infty} a_i$. Тогда $f(a_1) < f(a_2) < \ldots < f(a_n) < \ldots$ и т.к. $\{f(a_i)\} \subset I$ (I – компакт), то $\lim_{i\to\infty} f(a_i) = r \in I$. Будем полагать точку r образом точки x при отображении $\hat{f}$. Докажем, что $\hat{f}$ корректно определено.

Лемма. Для другой возрастающей последовательности $\{b_i\}$ элементов множества A, такой что $x = \lim_{i\to\infty} b_i$, следует, что $\lim_{i\to\infty} f(b_i) = r$.

Доказательство. Пусть $\lim_{i\to\infty} f(b_i) = r'$. Проверим, что $r = r'$.

Выберем произвольно $a_{n_1} \in \{a_i\}$. Для $\delta_1 = \rho(a_{n_1}, x)$ существует $n_2 \in N$ такое, что $b_{n_2} \in U_{\delta_1}(x)$, поэтому $b_{n_2} > a_{n_1}$. Для $\delta_2 = \rho(b_{n_2}, x)$ существует $n_3 \in N$ такое, что $a_{n_3} \in U_{\delta_2}(x)$, поэтому $a_{n_3} > b_{n_2}$. Т.к. f изотонно, $f(a_{n_1}) < f(b_{n_2}) < f(a_{n_3})$. Поскольку $f(a_{n_3}) < r$, то $f(b_{n_2}) < r$. Переходя к пределу при $n_2 \to \infty$, получаем $r' \le r$. Т.к. $f(b_{n_2}) < r'$, то $f(a_{n_1}) < r'$. Переходя к пределу при $n_1 \to \infty$, получаем $r \le r'$. Следовательно, $r = r'$.

Нетрудно доказать, что $\hat{f}$ – изотонная биекция, а также что изотонная биекция компактов является непрерывным отображением. Отсюда следует, что *X* гомеоморфно *I*. Предложение 2 доказано.

Теорема Мазуркевича-Мура [2]**.** Для любых двух различных точек *x* и *y* связного, локально связного полного пространства *X* существует вложение $h: I \to X$ единичного интервала в пространство *X* такое, что $h(0) = x$, $h(1) = y$.

Докажем более общую теорему.

Теорема. Пусть X – метрическое пространство, $f: I \to X$ – непрерывное отображение, такое что $f(0) \ne f(1)$. Тогда существует вложение $i: I \to X$, такое что $i(0) = f(0)$, $i(1) = f(1)$.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. Существуют $\alpha_1, \alpha_2 \in I$, такие что $\alpha_1 \le \alpha_2$, $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$ и разность $\alpha_2 - \alpha_1$ максимальна.

Доказательство. На множестве $\{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1 \le \alpha_2, f(\alpha_1) = f(\alpha_2)\} \subset I^2$ функция $\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$ достигает своего наибольшего значения, т.к. рассматриваемое подмножество компакта I^2 замкнуто, следовательно, само является компактом, а функция $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ непрерывна на I^2.

Доказательство теоремы. Будем называть *I* отрезком нулевого ранга. Найдём $\alpha_1, \alpha_2 \in I$, удовлетворяющие лемме.

При $\alpha_1 = \alpha_2$ заключаем, что на *I* нет точек α_1, α_2 таких, что $\alpha_1 < \alpha_2$ и $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$, поэтому исходно *f* – вложение. При $\alpha_1 < \alpha_2$ удалим из *I* интервал (α_1, α_2), называемый интервалом 1-го ранга, и получим сумму отрезков $\Delta_0 \cup \Delta_1$, которые будем называть отрезками 1-го ранга.

С каждым из отрезков Δ_0 и Δ_1 поступим так же, как с отрезком *I*. Сначала найдём $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta_0$, удовлетворяющие лемме. При $\alpha_1 = \alpha_2$ делаем вывод, что $f|_{Int\,\Delta_0}$ – вложение и Δ_0 теперь считаем отрезком 2-го ранга, а интервалом 2-го ранга – пустой интервал. При $\alpha_1 < \alpha_2$ удалим из Δ_0 интервал (α_1, α_2) (интервал 2-го ранга) и получим объединение отрезков $\Delta_{00} \cup \Delta_{01}$ 2-го ранга. Аналогично для Δ_1: либо убеждаемся, что $f|_{Int\,\Delta_1}$ – вложение и Δ_1 считаем отрезком 2-го ранга, а интервалом 2-го ранга пустой интервал, либо получаем из Δ_1 объединение отрезков $\Delta_{10} \cup \Delta_{11}$ 2-го ранга, удаляя из него непустой интервал 2-го ранга.

Если в результате выполнения второго шага образовались непустые интервалы 2-го ранга, то продолжаем процесс, обрабатывая каждый из полученных отрезков описанным способом. Процесс построений либо будет продолжаться безгранично, либо прекратится, когда все интервалы k-го ранга окажутся пустыми множествами.

Пусть C_n – сумма всех отрезков n-го ранга. Это замкнутое множество, дополнение к которому в I состоит из всех интервалов ранга $\leq n$. Поэтому $C = \bigcap_n C_n$ – замкнутое множество, дополнение которого есть сумма всех интервалов всевозможных рангов. Множество C – компакт, как замкнутое подмножество компакта I. Из способа построения следует

Лемма. Для любых $c_1, c_2 \in C$ условие $f(c_1) = f(c_2)$ выполняется тогда и только тогда, когда между c_1 и c_2 нет точек множества C.

Элементы $a, b \in C$ назовем эквивалентными ($a \sim b$), если между a и b нет точек C. Введем на фактормножестве $C/\sim$ фактортопологию. Нетрудно доказать, что пространство $C/\sim$ хаусдорфово. Факторотображение p компакта C на факторпространство $C/\sim$ является непрерывным. Так как C компактно, а $C/\sim$ хаусдорфово, то $C/\sim$ компактно и поэтому p замкнуто. Из замкнутости p следует, что многозначное отображение p^{-1} полунепрерывно сверху [3,4]. Рассмотрим композицию $g = f \circ p^{-1}$, которая является однозначным отображением, т.к. для любого x из $C/\sim$, $p^{-1}(x)$ – либо одна точка, либо 2 точки $c_1, c_2 \in C$, такие что $f(c_1) = f(c_2)$. Так как p^{-1} полунепрерывно сверху, то g непрерывно. Докажем, что $f \circ p^{-1}$ инъективно. Для любых $[x_1],[x_2] \in (C/\sim)$ из $[x_1] \neq [x_2]$ следует, что x_1 и x_2 не эквивалентны, поэтому между x_1 и x_2 есть точки из C, значит $f(x_1) \neq f(x_2)$ и $f(p^{-1}([x_1])) \neq f(p^{-1}([x_2]))$.

Итак, $f \circ p^{-1}$ – вложение $C/\sim$ в X. Но $C/\sim$ – упорядоченный метрический компакт, не содержащий пустых интервалов (они ликвидировались после факторизации C). По предложению 2 множество C гомеоморфно I. Тогда $i(x) = f(p^{-1}(x))$ – искомое вложение множества I во множество X.

Литература

1. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.
2. *Engelking R., Sieklucki K.* Topology. A Geometric Approach. Berlin, 1992.
3. *Масси У., Столлингс Дж.* Алгебраическая топология. Введение. М., 1977.
4. *Борисович Ю. Г*. Введение в многозначные отображения. Воронеж, 1986.