6. Davis A // Communication of the ACM. Vol. 31. №9. P.1098.

7. Железко Б.А. // Проблемы переходной экономики и механизм ее функционирования в Республике Беларусь. Мн., 1997. С.414.

8. Калянов Г. // СУБД. 1997. №2. С.61.

9. Чен П. // Там же. 1995. №3. С.137.

10. Morozevich A.N., Zhelezko B.A. Computer system for the analysis of infrared spectra: Тез. докл. VII Белорусской математической конф. Мн., 18–22 ноябр. 1996. Мн., 1996. Ч.3. С.210.

11. Штрик А.А. // CASE-технология: Мат. семинара. М., 1993. С.10.

12. Горин С.В., Тандоев А.Ю. // СУБД. 1995. №3. С.20.

13. Аджиев В. // Открытые системы. 1996. №6. С.40.

14. Железко Б.А., Морозевич А.Н. // Новые информационные технологии в образовании. Мн., 12–13 нояб. 1996. Мн., 1996. С.84.

15. Функциональное моделирование. Методология IDEF0. М., 1993.

16. Козлинский А. // Компьютерное обозрение. 1993. №1. С.29.

17. Железко Б.А., Панасик Г.А., Пихун В.Н., Шелешкевич В.И. // УСиМ. 1990. №4. С.96.

18. Макетирование, проектирование и реализация диалоговых информационных систем / Л.И. Гуков. У.И. Ломако, А.В. Морозова и др. М., 1993.

19. Jarke M., Jeusfeld M., Rose T. // Information systems. 1990. Vol.15. №1. P.86.

20. Железко Б.А. Системы поддержки принятия решений: вопросы создания и примеры использования / Под ред. А.Н.Морозевича. Мн., 1998.

Поступила в редакцию 04.02.99

УДК 519.10

В.А.ЕМЕЛИЧЕВ, В.Г.ПОХИЛЬКО

РАДИУС КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ НА МНОЖЕСТВЕ ПОДСТАНОВОК

For a linear vector optimization problem over a subset of the permutation group, we give a formula for the quasistability radius.

Пусть $A=\{a_{ij}\}_{n\times m}$ и $B=\{b_{ij}\}_{n\times m}$ – пара вещественных матриц, $n\geq 1$, $m\geq 2$; S_m – симметрическая группа подстановок, действующая на множестве $N_m=\{1,2,\dots,m\}$; $t\in S_m$. На множестве подстановок $T\subseteq S_m$, $|T|>1$, зададим векторную целевую функцию

$$f(t,A,B)=(f_1(t,A,B),f_2(t,A,B),\dots,f_n(t,A,B))$$

с частными критериями

$$f_i(t,A,B)=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{it(j)}\to\min_{t\in T},\ i\in N_n.$$

В этом контексте под векторной (n-критериальной) задачей $Z^n(A,B)$ будем понимать задачу поиска множества эффективных подстановок (множества Парето) $P(A,B)$, которое определим традиционным образом [1]:

$$t^\circ\in P(A,B)\Leftrightarrow t^\circ\in T\ \&\ \overline{\exists}\, t\in T\ (\tau(t,t^\circ,A,B)\leq 0\ \&\ \tau(t,t^\circ,A,B)\neq 0),$$

где $\tau(t,t^\circ,A,B)=(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n)$, $\tau_i=\tau_i(t,t^\circ,A,B)=f_i(t,A,B)-f_i(t^\circ,A,B)$, $i\in N_n$, $0=(0,0,\dots,0)\in\mathbf{R}^n$.

Очевидно, что частным случаем нашей задачи (при $n=1$) является широко известная задача минимизации линейной формы на множестве подстановок (см., например, обзор [2]).

Как обычно [3–6], под квазиустойчивостью векторной задачи $Z^n(A,B)$ будем понимать свойство сохранения эффективности всех оптимальных по Парето подстановок при "малых" возмущениях параметров векторной целевой функции. В терминах точечно-множественных отображений квазиустойчивость эквивалентна полунепрерывности снизу по Хаусдорфу отображения, характеризующего зависимость множества Парето от исходных данных [7]. В данном случае будем возмущать лишь элементы матрицы A. Поэтому радиусом квазиустойчивости задачи $Z^n(A,B)$ назовем предел таких возмущений, т.е. величину

$$\rho^n(A,B)=\begin{cases}\sup\ Q, & \text{если}\quad Q\neq\varnothing,\\ 0, & \text{если}\quad Q=\varnothing,\end{cases}$$

где $Q=\{\varepsilon>0:\ \forall C\in\mathfrak{R}(\varepsilon)\ \ (P(A,B)\subseteq P(A+C,B))\}$, $\mathfrak{R}(\varepsilon)=\{C\in\mathbf{R}^{nm}:\ \|C\|<\varepsilon\}$, $\|C\|=\max\{|c_{ij}|:\ (i,j)\in N_n\times N_m\}$–чебышевская норма матрицы $C=\{c_{ij}\}_{n\times m}$ в пространстве $\mathbf{R}^{nm}$.

Теорема. Пусть в каждой строке матрицы B элементы попарно различны. Тогда для радиуса квазиустойчивости задачи $Z^n(A,B)$, $n\geq 1$, справедлива формула

$$\rho^n(A,B)=\min_{t^\circ\in P(A,B)}\ \min_{t\in T\setminus\{t^\circ\}}\ \max_{i\in N_n}\Gamma_i(t,t^\circ,A,B),\tag{1}$$

где $\Gamma_i(t,t^\circ,A,B)=\dfrac{\tau_i(t,t^\circ,A,B)}{\Delta_i(t,t^\circ,B)}$, $\Delta_i(t,t^\circ,B)=\sum\limits_{j=1}^{m}|b_{it(j)}-b_{it^\circ(j)}|$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что при выполнении условия теоремы справедливы неравенства

$$\Delta_i(t,t^\circ,B)>0\ \forall i\in N_n\ \forall t\neq t^\circ.$$

Поэтому величина φ, стоящая в правой части формулы (1), всегда определена. Сначала докажем неравенство $\rho^n(A,B)\geq\varphi$. Если $\varphi=0$, это неравенство очевидно.

Пусть $\varphi>0$. Тогда для любых двух различных подстановок $t^\circ\in P(A,B)$ и $t\in T$ выполняется условие

$$\max\{\Gamma_i(t,t^\circ,A,B):\ i\in N_n\}\geq\varphi.$$

Пусть $p\in\operatorname{argmax}\{\Gamma_i(t,t^\circ,A,B):\ i\in N_n\}$. Тогда имеем

$$\Gamma_p(t,t^\circ,A,B)\geq\varphi>\|C\|\ \forall C\in\mathfrak{R}(\varphi).$$

Отсюда получаем

$$\tau_p(t,t^\circ,A+C,B)=\tau_p(t,t^\circ,A,B)+\tau_p(t,t^\circ,C,B)\geq\tau_p(t,t^\circ,A,B)-\Delta_p(t,t^\circ,B)\max\{|c_{pj}|:j\in N_m\}\geq$$
$$\geq\tau_p(t,t^\circ,A,B)-\Delta_p(t,t^\circ,B)\|C\|>0\ \forall C\in\mathfrak{R}(\varphi).$$

Следовательно, $P(A,B)\subseteq P(A+C,B)\ \forall C\in\mathfrak{R}(\varphi)$, т.е. $\rho^n(A,B)\geq\varphi$.

Далее покажем, что $\rho^n(A,B)\leq\varphi$. Для этого достаточно убедиться в существовании для любого числа $\varepsilon>\varphi$ двух различных подстановок $t^\circ\in P(A,B)$, $t\in T$ и матрицы $C\in\mathfrak{R}(\varepsilon)$ таких, что выполняются соотношения

$$\tau(t,t^\circ,A+C,B)\leq\mathbf{0},\quad \tau(t,t^\circ,A+C,B)\neq\mathbf{0}.$$

Пусть $\varepsilon>\varphi$. Тогда, согласно определению числа φ, найдутся такие различные подстановки $t^\circ\in P(A,B)$ и $t\in T$, что

$$\gamma=\max\{\Gamma_i(t,t^\circ,A,B):\ i\in N_n\}<\varepsilon.$$

Поэтому если в качестве возмущающей матрицы $C\in\Re(\varepsilon)$ возьмем матрицу с элементами

$$c_{ij}=-c\cdot\mathrm{sign}(b_{it(j)}-b_{it^{o}(j)}),\ i\in N_n,\ j\in N_m,$$

где $\gamma<c<\varepsilon$, то получим

$$\tau_i(t,t^o,A+C,B)=\tau_i(t,t^o,A,B)+\tau_i(t,t^o,C,B)=\tau_i(t,t^o,A,B)-$$
$$-c\Delta_i(t,t^o,B)<\Delta_i(t,t^o,B)(\Gamma_i(t,t^o,A,B)-\gamma)\leq 0\ \forall i\in N_n.$$

Теорема доказана.

Напомним [1], что множество строго эффективных решений (множество Смейла) задачи $Z^n(A,B)$ определяется следующим образом:

$$S(A,B)=\{t\in T\colon \forall t^o\in T\backslash\{t\}\ \exists i\in N_n\ (\tau_i(t,t^o,A,B)<0)\}.$$

Очевидно, что $S(A,B)\subseteq P(A,B)$.

Следствие 1. При выполнении условия теоремы задача $Z^n(A,B)$ квазиустойчива ($\rho^n(A,B)>0$) тогда и только тогда, когда

$$P(A,B)=S(A,B).$$

Следствие 2. Если все компоненты вектора $b=(b_1,b_2,...,b_m)$ попарно различны, то задача минимизации линейной формы

$$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{t(j)} \to \min_{t\in T}$$

на множестве подстановок $T\subseteq S_m$, $|T|>1$, квазиустойчива при возмущении компонент вектора $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ тогда и только тогда, когда оптимальная подстановка единственна.

В заключение отметим, что формула (1) радиуса квазиустойчивости векторной задачи минимизации линейных форм на множестве подстановок имеет тот же вид, что и формула радиуса квазиустойчивости линейной траекторной задачи векторной оптимизации (следствие 2[5]). Отличие состоит лишь в значении величины $\Delta_i(\cdot)$, в то время как величина $\tau_i(\cdot)$ и в том, и в другом случаях представляет собой разность значений i-го частного критерия двух аргументов.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект №Ф97-266).

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
2. Емеличев В.А., Супруненко Д.А., Танаев В.С. // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1982. №6. С.25.
3. Емеличев В.А., Кравцов М.К. // Кибернетика и системный анализ. 1995. №4. С.137.
4. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1997. №3. С.39.
5. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. // Мат. заметки. 1998. Т.63. Вып.1. С.21.
6. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. // ЖВМ и МФ. 1998. Т.38. №11. С.1801.
7. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев, 1995.

Поступила в редакцию 24.03.98.