

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ В АЛГЕБРЕ МНЕМОФУНКЦИЙ

Н. В. Бедюк

ВВЕДЕНИЕ

В статье изучается следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))\dot{L}(t) \quad (1)$$

где $\dot{L}(t)$ – обобщенная производная функции ограниченной вариации. Данное уравнение, вообще говоря, определено некорректно, так как оно содержит произведение обобщенных функций. В зависимости от трактовки уравнения, получаются различные его решения. Предпочесть ту или иную трактовку можно только при изучении конкретной практической задачи. Данная работа посвящена исследованию этого уравнения с позиций алгебр мнемифункций, которое позволяет охватить все существующие подходы к интерпретации рассматриваемого уравнения.

Напомним некоторые подходы к решению данного уравнения. Первый подход связан с попытками формализации такой задачи в рамках теории обобщенных функций. Он упирается в проблему умножения разрывных функций на обобщенные, которая возникает в выражении $f(x(t))\dot{L}(t)$. В [1, гл.1, §8 с. 41] и [2] вводится определение произведения разрывной функции на обобщенную, а затем ищется решение дифференциального уравнения. Решения, понимаемые в смысле работ [2], отличаются от решений, рассматриваемых в [1]. Второй подход предполагает формальный переход к интегральному уравнению:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\xi))dL(\xi),$$

в котором интеграл понимается в том или ином смысле [3],[4]. Однако при таком толковании скачки решения будут зависеть от определения интегрируемой функции в точках разрыва функции $L(t)$, что является недостатком данного подхода. Третий подход восходит к работе [5] и опирается на идею аппроксимации искомого решения уравнения (1) классическими, порожденными гладкими приближениями функции $L(t)$. Отметим, что решения, полученные в [1] с помощью первого и последнего подхода совпадают.

В настоящее время активно разрабатывается подход, связанный с рассмотрением уравнения (1) в алгебре мнемифункций. Отметим в этом направлении работу [6].

В данной работе уравнение (1) рассматривается как уравнение в дифференциалах в алгебре мнемофункций и предлагаются необходимые и достаточные условия, при которых полученная в качестве решения мнемофункция ассоциирует обычной, которую естественно назвать решением (1). Также показывается, что решение (1) в смысле всех описанных выше подходов может быть получено из уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть функция $f: R \rightarrow R$ является липшицевой:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < C|x_1 - x_2|, \quad (2)$$

где C – константа не зависящая от x .

Рассмотрим непрерывную справа функцию $L: T \rightarrow R$, где $T = [a, b]$, имеющую ограниченную вариацию, причем $L(a) = 0$.

Уравнению (1) в алгебре мнемообобщенных функций можно поставить в соответствие уравнение в дифференциалах, которое на уровне представителей имеет вид:

$$\begin{cases} x_n(t + h_n) - x_n(t) = f_n(x_n(t))(L(t + h_n) - L(t)) \\ x_n(t)|_{[a, a+h_n]} = x_n^0(t) \end{cases} \quad (4)$$

где $h_n > 0$, $L_n(t) = (L * \rho_n)(t) = \int_0^{1/n} L(t+s)\rho_n(s)ds$, $f_n(t) = (f * \tilde{\rho}_n)(u) =$
 $= \int_0^{1/n} f(u+s)\tilde{\rho}_n(s)ds$ где ρ_n и $\tilde{\rho}_n$ – «шапочки», то есть

$$\rho_n, \tilde{\rho}_n \in C^\infty(R), \rho_n, \tilde{\rho}_n \geq 0, \text{supp } \rho_n, \tilde{\rho}_n \subseteq [0, \frac{1}{n}], \int_0^{1/n} \rho_n(s)ds = \int_0^{1/n} \tilde{\rho}_n(s)ds = 1.$$

Для любого $t \in T$ справедливо следующее представление: $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [a, a + h_n]$, $m_t \in N$.

В данной работе исследуется предельное поведение решения x_n задачи (4).

Чтобы описать предел последовательности x_n , рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = x^0 + \int_a^t f(x(s))dL^c(s) + \sum_{a < s \leq t} (\varphi(\Delta L(s)f, x(s-), 1) - x(s-)) \quad (5)$$

где L^c – непрерывная часть L , $\Delta L(s) = L(s+) - L(s-)$ – величина скачка в точке s , а φ – решение следующего интегрального уравнения:

$$\varphi(z, x, u) = x + \int_{[0, u)} z(\varphi(z, x, v)) \mu(dv) \quad (6)$$

где z – липшицева функция, x – начальное условие, а $\mu(dv)$ – вероятностная мера, определенная на борелевских подмножествах отрезка $[0, 1]$. Интеграл понимается в смысле Лебега-Стилтьеса.

В дальнейшем будем рассматривать меры, порожденные функциями $\sigma: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такими, что найдется множество попарно непересекающихся интервалов $(a_i, b_i] \subset [0, 1], i \in I$, что

$$\sigma(u) = \begin{cases} b_i, u \in (a_i, b_i] \\ u, u \notin \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i] \end{cases}$$

Обозначим через G множество всех функций такого вида.

Введем в рассмотрение функцию $F_n: R \rightarrow [0, 1], F_n(x) = \int_x^{1/n} \rho_n(s) ds$ и обратную к ней $F_n^{-1}(u) = \sup \{x: F_n(x) = u\}$.

Теорема Пусть функции f удовлетворяет условию Липшица, функция $L: T \rightarrow R$ – непрерывна справа, имеет ограниченную вариацию и

$$L(a) = 0, \int_{t \in T} |x_n^0(\tau_t) - x^0| dt \rightarrow 0,$$

$$F_n(F_n^{-1}(u) - \delta h_n) \rightarrow \sigma(u)$$

при $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$, $\forall \delta \in (0, 1)$ и $\forall u \in [0, 1]$ – точки непрерывности функции σ .

Тогда $\sigma \in G$ и

$$\int_{t \in T} |x_n(t) - x(t)| dt \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$, где x_n – решение задачи (4), а x – решение уравнения (5) с мерой μ порожденной σ .

Обратно, если для любой Липшицевой функции f , последовательность функций x_n сходится в $L_1(T)$, то существует функция $\sigma \in G$ такая что $F_n(F_n^{-1}(u) - \delta h_n) \rightarrow \sigma(u)$ при $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$, $\forall \delta \in (0, 1)$ и $\forall u \in [0, 1]$ –

точки непрерывности функции σ , и предел последовательности x_n является решением уравнения (5) с мерой μ порожденной σ .

Замечание Таким образом, выбирая различные «шапочки» ρ_n , мы получаем различные меры μ , в зависимости от которых получаются различные решения уравнения (1). В частности, при соответствующем выборе «шапочки» ρ_n могут быть получены решения уравнения (1) в смысле всех описанных во введении подходов.

Литература

1. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы. модели и приложения. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
2. Antosik P., Liegza J. Products of measure and functions of finite variations // Generalized functions and operational calculus: Proc. Conf. – Varna, 1979. – P. 20-26.
3. Das P.C., Sharma R.R. Existence and stability of measure differential equations // Czech. Math. J. –1972–V.22.–№1–P.145-158.
4. Pandit S.G., Deo S.G. Differential systems involving impulses // Lect. Notes. Math.–1982. V.954.
5. Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations // Czech. Math. J. –1958.–V.8.–№1.–P.360-388
6. Yablonski A. Differential equations with generalized coefficients // Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171-197.

О ГЛАДКОСТИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

К. В. Василевский

В данной работе исследована гладкость слабых решений задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений первого порядка с переменными областями определения гладких неограниченных операторов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $|\cdot|$ рассмотрим задачу Коши

$$du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in J =]0, T[; \quad u(0) = u_0 \in H, \quad (1)$$

где u и f – функции переменной t со значениями в H и $A(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$, $t \in [0, T]$.

Предполагаем, что операторы $A(t)$ удовлетворяют условиям:

I. Операторы $A(t)$ замкнуты в H и при каждом $t \in [0, T]$