2. *Terdik G.* Bilinear stochastic models and related problems of nonlinear time series analysis, Springer, 1999.
3. *Андерсен Т.* Статистический анализ временных рядов. М: Мир, 1967.
4. *Kharin Yu.* Robustness in statistical pattern recognition. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1996.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ

А. В. Сташевский

Задача построения эффективных алгоритмов триангуляции областей с динамическими границами возникает при построении пространственных моделей, например в геоинформационных системах при моделированиии камер растворения ископаемых методом выщелачивания горных пород.

Задачу моделирования камер можно сформулировать как задачу эффективной триангуляции области с динамической границей. Существует множество различных алгоритмов построения триангуляций, однако все они предполагают полное перестроение треугольной сетки при изменении границ области, что является неоптимальным, если граница области изменилась незначительно.

В данной статье проводится анализ существующих алгоритмов и предлагается эффективный алгоритм ретриангуляции объектов с динамической границей, который позволит модифицировать уже построенную сетку, избегая полной ретриангуляции области.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Планарный граф – граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения рёбер.

Триангуляция – планарный граф, все внутренние области которого являются треугольниками.

Структурные ребра – набор отрезков для триангуляции, с которыми ребра триангуляции не пересекаются, а только проходят по ним.

Триангуляция с ограничениями – есть триангуляция со структурными ребрами.

Выпуклой триангуляцией называется такая триангуляция, для которой минимальный многоугольник, охватывающий все треугольники, будет выпуклым. Триангуляция, не являющаяся выпуклой, называется невыпуклой.

Триангуляция удовлетворяет условию Делоне, если внутрь окружности, описанной вокруг любого построенного треугольника, не попадает ни одна из заданных точек триангуляции.

Триангуляция называется *триангуляцией Делоне*, если она является выпуклой и удовлетворяет условию Делоне (*рис. 1*).

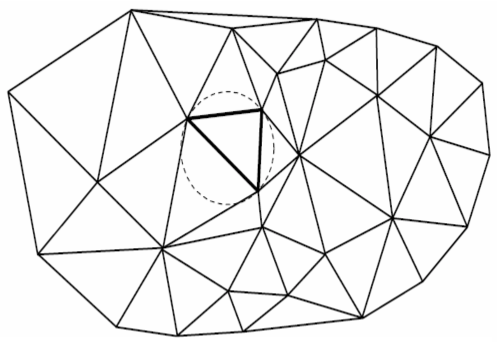

Рис. 1. Триангуляция Делоне

Триангуляция называется *триангуляцией Делоне с ограничениями*, если условие Делоне выполняется для любой пары смежных треугольников, которые не разделяются структурными ребрами.

Граница называется *связной*, если для любых двух ее точек существует хотя бы один соединяющий их путь.

Односвязная область - есть область, обладающая тем свойством, что для любой замкнутой непрерывной кривой, принадлежащей области, часть плоскости, ограниченная этой кривой, принадлежит области.

Замкнутая кривая *не содержит самопересечений*, если она описывает односвязную область.

Недопустимым является изменение точек границы, которое приводит к ее к самопересечениям.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задана некоторая двумерная ограниченная область с границей G. Предполагается, что граница области связна и не содержит самопересечений. Пусть G зависит от t и меняется на каждой временной итерации:

$$G(t_i) \to G(t_i + \Delta t)$$

Обозначим начальный момент времени через t_0.

Для данной области в начальный момент времени $G(t_0)$ построена триангуляция Делоне T_0 с ограничениями.

Необходимо:

Построить триангуляцию T_{i+1} для области с измененной границей $G(t_i + \Delta t)$ с сохранением свойства Делоне. Предполагается также, что граница области после модификации обладает также свойством связности и отсутствием самопересечений.

СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИЙ

- Итеративные алгоритмы
- Алгоритмы слияния
- Алгоритмы прямого построения
- Двухпроходные алгоритмы
- Пузырьковая упаковка (Bubble packing)

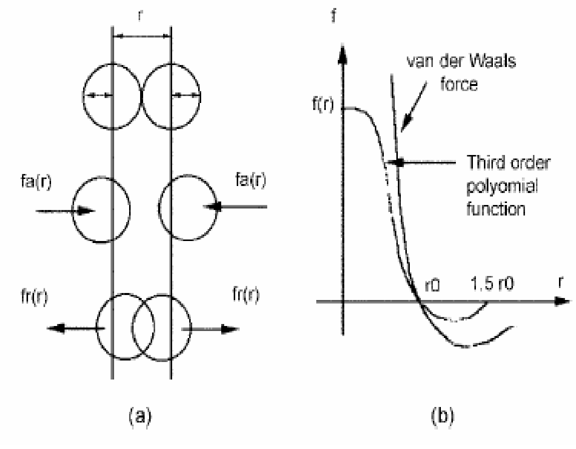

Рис. 2. Силы взаимодействия пузырьков

Приведенные алгоритмы позволяют решать задачу построения триангуляции путем полной ретриангуляции области, что может быть весьма неэффективным в случае, если граница изменилась незначительно. Предлагаемый алгоритм построения триангуляции для областей с динамической границей основан на алгоритме триангуляции области путем пузырьковой упаковки.[1,2]

BUBBLE MESHING: ПОСТРОЕНИЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ ПУТЕМ ПУЗЫРЬКОВОЙ УПАКОВКИ

Bubble packing метод может быть представлен в виде двух основных шагов:

1) упаковка сфер (пузырьков) в заданной области,

2) соединение центров сфер с помощью триангуляции Делоне.

При этом узлы соответствующей триангуляции рассматриваются как центры пузырьков и задаются силы взаимодействия между ними, аналогичные силам взаимодействия Ван Дер Вальса (*рис. 2*).

В качестве аналога силы взаимодействия двух пузырьков предлагается использовать Безье сплайн:

$$f(l)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{4} c_i \times B_i^4\left(\dfrac{l}{1.25\times l_0}\right), 0\le l\le 1.25\times l\\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad l_0\times 1.25\le l\end{cases} \tag{1}$$

где B_i^4 – полиномы Бернштейна[3, 4].

АЛГОРИТМ ЛОКАЛЬНОЙ МОДИФИКАЦИИ ПОКРЫТИЯ

Предлагаемый алгоритм модификации триангуляции основанный на bubble packing имеет порядок сложности $N^{1/2}$. Алгоритм состоит из следующих этапов:

1. Применение bubble packing метод на начальном этапе
2. Расчет фонового значением силы взаимодействия *f*~
3. Модификация границы

4. Расчет сил взаимодействия только для вершин свободной границы и их ближайших соседей
5. Обработка вершин, сила взаимодействия которых превышает фоновую f~

Представим формальное описание алгоритма. T(t) – триангуляция на момент времени t, f~– фоновое значение силы взаимодействия, X(t) – множество вершин триангуляции принадлежащих свободной границе, NX(t) – множество соседних со свободной границей вершин, Q(t) – множество обрабатываемых вершин.

```
while Q(t) не пусто do
   for для всех pi из Q(t) do
      вычислим силы взаимодействия узла fi
      if  fi > f~  then
         выполним смещение узла pi
         добавим в Q(t) соседей узла pi
      else
         удалим узел pi из Q(t)
      end if
   end for
end while
```

Литература

1. *Скворцов А. В* – «Триангуляция Делоне и ее применения», Томск. 2002
2. *Скворцов А. В* – «Особенности реализации алгоритмов построения триангуляции Делоне с ограничениями», с90-94. 2001
3. *Коновалов О. Л.* «Эффективное построение конечно-элементных покрытий динамических областей», БГУ, 2006
4. *Shimada, K.*, «Physically-Based Mesh Generation: Automated Triangulation of Surfaces and Volumes via Bubble Packing,» Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1993