

где $G_{U, a_{\text{ЦМ}(s,r)}}(\cdot)$ – функция нецентрального χ^2 -распределения с U степенями свободы и параметром нецентральности $a_{\text{ЦМ}(s,r)}$, определяемым (6).

Литература

1. Кнут Д. Искусство программирования. В 3 т. М.: Мир, 1992.
2. Харин Ю. С. и др. Математические и компьютерные основы криптологии. Мн.: Новое знание, 2003.
3. Иванов М. А., Чигунков И. В. Теория, применение и оценка качества генераторов псевдослучайных последовательностей. М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2003.
4. Уотермен М. С. Математические методы анализа последовательностей ДНК. М.: Мир, 1999.
5. Харин Ю. С., Ярмола А. Н., Петлицкий А. И. Методы и алгоритмы статистического тестирования генераторов случайных и псевдослучайных последовательностей в системах информационной безопасности // Искусственный Интеллект. 2006. № 3. С. 793-803.
6. Харин Ю. С. Цепи Маркова с r -частичными связями и их статистическое оценивание // Доклады НАН Беларуси. 2004. т. 48. № 1. С. 40-44.
7. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
8. Харин Ю. С., Петлицкий А. И. Об оценивании порядка цепи Маркова с частичными связями // Информационные системы и технологии. 2006. ч. 1. С. 156–161.
9. Basawa I. V. Statistical inference for stochastic processes. AP. 1980.
10. Руссас Дж. Контигуальность вероятностных мер. М.: Мир, 1975.
11. Тихомирова М. И., Чистяков В. П. О двух статистиках типа хи-квадрат, построенных по частотам цепочек состояний сложной цепи Маркова. // Дискретная математика. 2003. т. 15. № 2. С. 149–159.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ БИЛИНЕЙНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

О. Н. Радиевская

ВВЕДЕНИЕ

Большинство наблюдаемых процессов окружающего нас мира имеют нелинейную природу. Однако в настоящее время в теории и особенно на практике нелинейностью пренебрегают и исследуют эти процессы с помощью линейных моделей, структура и свойства которых просты и хорошо изучены. Но предположение о линейности процесса, как правило, является очень грубым. В этом случае встаёт вопрос количественной оценки влияния нелинейности на выводы, полученные с помощью линейной модели. Наряду с этой проблемой, важным является изучение непосредственно нелинейных моделей, которые более точно описывают реальные процессы.

В данной работе рассматривается проблема построения прогноза для билинейной модели временных рядов $BL(p,0,1,1)$. Для решения данной задачи было использовано два подхода: построение линейного авторегрессионного прогноза и исследование его устойчивости к билинейным искажениям; построение последовательности нелинейных прогнозов, сходящихся к оптимальному прогнозу в смысле минимума среднеквадратического риска.

1. ПОНЯТИЕ БИЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Говорят, что временной ряд $\{x_t\}_{t \in Z}$, определённый на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , соответствует билинейной модели $BL(p,0,1,1)$, если он удовлетворяет билинейному стохастическому разностному уравнению [1;2]:

$$x_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j x_{t-j} + \beta x_{t-1} u_{t-1} + u_t, \quad (1)$$

где $\{u_t\}_{t \in Z}$ – независимые одинаково распределённые гауссовские ошибки наблюдения с нулевым математическим ожиданием $E\{u_t\} = 0$, $t \in Z$, и конечной дисперсией $D\{u_t\} = \sigma^2 < +\infty$, $t \in Z$, $\{\alpha_j\}_{j=1}^p$ – коэффициенты авторегрессии, β – уровень билинейности. Заметим, что если $\beta = 0$, то билинейная модель превращается в обычную линейную авторегрессионную $AR(p)$. Если

$$\rho(A \otimes A + \sigma^2 B \otimes B) < 1, \quad (2)$$

где матрицы $A \in R^{p \times p}$ и $B \in R^{p \times p}$ зависят от коэффициентов авторегрессии и уровня билинейности соответственно, то билинейный временной ряд (1) является стационарным [2].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

По наблюдаемой реализации $X = \{x_1, \dots, x_T\}$ длительности T необходимо оценить будущие значения временного ряда $\{\hat{x}_{T+1}, \hat{x}_{T+2}, \dots\}$. В качестве оценки точности прогнозирования будем использовать риск как среднеквадратическую ошибку прогноза:

$$r(\tau) = E\{(x_{T+\tau} - \hat{x}_{T+\tau})^2\},$$

где τ – глубина прогноза.

3. ЛИНЕЙНЫЙ ПРОГНОЗ БИЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Для прогнозирования p будущих значений билинейного временного ряда $BL(p,0,1,1)$ будем использовать линейный авторегрессионный

прогноз в предположении, что уровень билинейных искажений β невелик.

$$\hat{x}_{T+\tau} = \sum_{j=1}^{\tau} \alpha_j \hat{x}_{t-j} + \sum_{j=\tau+1}^p \alpha_j x_{t-j}, \quad \tau = 1, \dots, p.$$

Данный прогноз является наилучшим для линейной авторегрессионной модели AR(p) [3], однако для билинейной модели он может быть использован только при некоторых ограничениях на уровень билинейности β . Исследование устойчивости прогноза к билинейным искажениям было проведено с помощью коэффициента неустойчивости и δ -критического уровня искажений [4].

4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОГНОЗОВ БИЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Последовательность нелинейных прогнозов построена на основании представления билинейного временного ряда в виде нелинейной авторегрессии бесконечного порядка. Если справедливо

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \beta^{2k} E\{x_t^2 x_{t-1}^2 \dots x_{t-k}^2 u_{t-k}^2\} = 0, \quad (3)$$

то

$$x_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j x_{t-j} + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \beta^{k-1} x_{t-1} \dots x_{t-k+1} \left(x_{t-k+1} - \sum_{j=1}^p \alpha_j x_{t-k+1-j} \right) + u_t.$$

Здесь равенство понимается в среднеквадратическом смысле. Таким образом, последовательность прогнозов на один шаг имеет вид:

$$\hat{x}_{T+1}^{(m)} = \sum_{j=1}^p \alpha_j x_{T+1-j} + \sum_{k=2}^m (-1)^k \beta^{k-1} x_T \dots x_{T-k+2} \left(x_{T-k+2} - \sum_{j=1}^p \alpha_j x_{T-k+2-j} \right).$$

Заметим, что первый член последовательности при $m=1$ совпадает с рассмотренным выше линейным прогнозом. Если выполнено условие (3), то

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E\left\{ \left(\hat{x}_{T+1}^{(m)} - E\{x_{T+1} | x_T, x_{T-1}, \dots\} \right)^2 \right\} = 0.$$

Что означает сходимость построенной последовательности к наилучшему в среднеквадратическом смысле прогнозу. При этом риски этих прогнозов сходятся к дисперсии ошибок наблюдения:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E\left\{ \left(\hat{x}_{T+1}^{(m)} - x_{T+1} \right)^2 \right\} = \sigma^2.$$

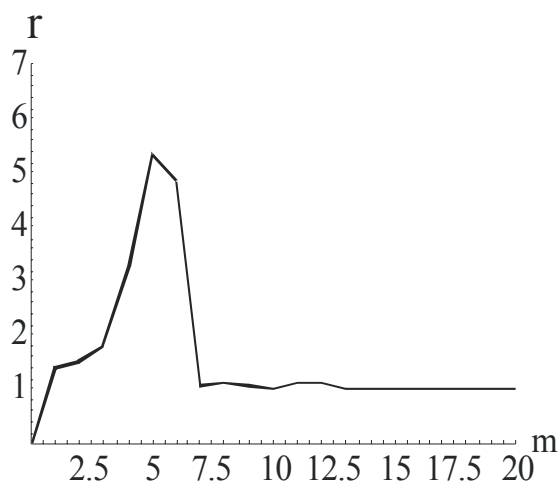


Рис. 1. Зависимость риска от порядка прогноза при $\beta = 0.3$

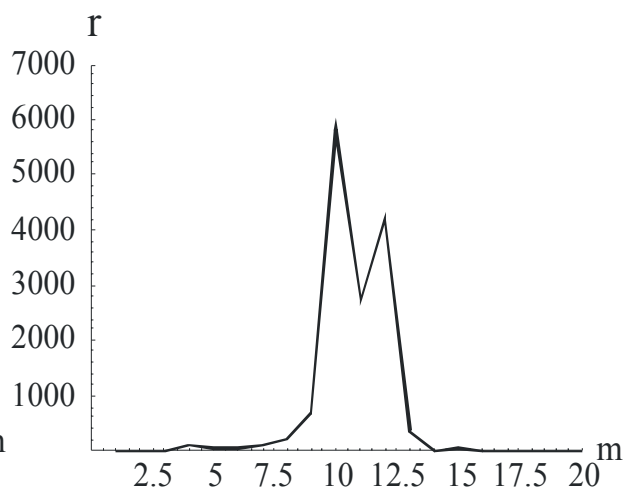


Рис. 2. Зависимость риска от порядка прогноза при $\beta = 0.4$

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для иллюстрации теоретических результатов были проведены численные эксперименты на модельных данных. Рассмотрена простейшая билинейная модель BL(1,0,1,1) вида

$$x_t = 0.5x_{t-1} + \beta x_{t-1}u_{t-1} + u_t, u_t \sim N(0,1).$$

Для $\beta = 0.3$ и $\beta = 0.4$ построены графики зависимости среднеквадратического риска нелинейного прогноза от порядка прогноза в последовательности, изображенные на рис. 1 и рис. 2 соответственно. Заметим, что риск прогноза сначала значительно растёт, а затем падает и устанавливается на своём предельном уровне, который равен риску наилучшего в среднеквадратическом смысле прогноза, т.е. дисперсии ошибок наблюдения.

Важным является значение порядка прогноза, при котором риск отличается от своего предельного оптимального значения на некоторую малую величину δ , например, $\delta = 0.1$. Для рассмотренной выше модели получены оценки этих величин, их значения приведены в таблице.

Таблица

Порядок прогноза, риск которого отличен от σ^2 не более, чем на $\delta = 0.1$						
β	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
m	1	3	10	27	62	121

Литература

1. Fan J., Yao Q. Nonlinear time series. Nonparametric and parametric methods. Springer, 2003.

2. *Terdik G.* Bilinear stochastic models and related problems of nonlinear time series analysis, Springer, 1999.
3. *Андерсен Т.* Статистический анализ временных рядов. М: Мир, 1967.
4. *Kharin Yu.* Robustness in statistical pattern recognition. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1996.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ

А. В. Сташевский

Задача построения эффективных алгоритмов триангуляции областей с динамическими границами возникает при построении пространственных моделей, например в геоинформационных системах при моделировании камер растворения ископаемых методом выщелачивания горных пород.

Задачу моделирования камер можно сформулировать как задачу эффективной триангуляции области с динамической границей. Существует множество различных алгоритмов построения триангуляций, однако все они предполагают полное перестроение треугольной сетки при изменении границ области, что является неоптимальным, если граница области изменилась незначительно.

В данной статье проводится анализ существующих алгоритмов и предлагается эффективный алгоритм ретриангуляции объектов с динамической границей, который позволит модифицировать уже построенную сетку, избегая полной ретриангуляции области.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Планарный граф – граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения рёбер.

Триангуляция – планарный граф, все внутренние области которого являются треугольниками.

Структурные ребра – набор отрезков для триангуляции, с которыми ребра триангуляции не пересекаются, а только проходят по ним.

Триангуляция с ограничениями – есть триангуляция со структурными ребрами.

Выпуклой триангуляцией называется такая триангуляция, для которой минимальный многоугольник, охватывающий все треугольники, будет выпуклым. Триангуляция, не являющаяся выпуклой, называется невыпуклой.

Триангуляция удовлетворяет условию Делоне, если внутри окружности, описанной вокруг любого построенного треугольника, не попадает ни одна из заданных точек триангуляции.