ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

О. А. Конопелько

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время разработана достаточно полная теория корректно поставленных задач для уравнений гиперболического, эллиптического и параболического типов. Между тем в приложениях возникают задачи для уравнений, не принадлежащих ни к одному из вышеперечисленных типов.

Уравнением составного типа будем называть уравнение с оператором, характеристический многочлен которого имеет как действительные, так и комплекснозначные характеристики. Впервые уравнения такого типа $\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = 0$ и $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Delta u = 0$, где Δ – оператор Лапласа, были рассмотрены Ж. Адамаром (J. Hadamard) в [1] и [2]. Уравнения составного типа рассматривались также О. Сестрандом (O. Sjöstrand) [3], Л. Каттабриджа (L. Cattabriga) [4], Р. Девисом (R. B. Davis) [5], В. И. Корзюком и В. В. Дайняком [6–8] и др.

В данной работе доказывается корректность граничной задачи для уравнения четвертого порядка составного типа.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим область $Q = (0,T)\times\Omega$, $\Omega \subset R^n$ $(n+1)$-мерного евклидова пространства R^{n+1} независимых переменных (t,x), $t \in (0,T)$, $x = (x_1,...,x_n) \in \Omega$. Для функции $u:(t,x) \to u(t,x) \in R$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с оператором составного типа

$$Lu \equiv L^{(0)}u + A^{(3)}u = f(x), \tag{1}$$

где $L^{(0)} = \frac{\partial^4}{\partial t^4} + (b^2 - a^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta - a^2 b^2 \Delta^2$, a и b – произвольные вещественные постоянные, удовлетворяющие неравенству $b^2 > a^2$, $\Delta = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, $A^{(3)}u = \sum_{|\alpha|\le 3} a^{(\alpha)}(x) D^{\alpha} u$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i$,

α_i, $i=\overline{0,n}$ – целые неотрицательные числа, $D^{\alpha}u=\dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial t^{\alpha_0}\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, $a^{(\alpha)}(x)$, $f(x)$ – заданные в Q функции.

На границе ∂Q области Q заданы граничные условия вида:

$$l_0 u\equiv u\,|_{t=0}=\varphi(x), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=T}=u\,|_{\Gamma}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_{\Gamma}=0, \tag{3}$$

где $\varphi: x\to\varphi(x)\in R$ – произвольная функция из гильбертова пространства Соболева $H^3(\Omega)$, $\Gamma=\{(t,x)\in\partial Q\,|\,0<t<T\}$ – боковая поверхность области Q, $\nu=(\nu_0(t,x),\nu_1(t,x),...,\nu_n(t,x))$ – единичная внешняя относительно области Q нормаль в точке $(t,x)\in\Gamma$.

Запишем задачу (1)–(3) в операторном виде:

$\boldsymbol{L}u=\boldsymbol{F}$,(4)

где оператор $\boldsymbol{L}=(L,l_0)$, правая часть операторного уравнения (4) $\boldsymbol{F}=(f,\varphi)$. В качестве области определения $D(\boldsymbol{L})$ оператора $\boldsymbol{L}$ возьмем множество непрерывно дифференцируемых в замыкании $\overline{Q}$ области Q до четвертого порядка включительно функций, которые удовлетворяют граничным условиям (3), т.е.

$$D(\boldsymbol{L})=\left\{u\in C^4(\overline{Q})\left|\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=T}=u\,|_{\Gamma}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_{\Gamma}=0\right.\right\}.$$

Обозначим через B банахово пространство, получаемое замыканием множества $D(\boldsymbol{L})$ по норме

$$\|u\|_B=\left\|\sqrt{T-t}\,\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right\|_{L_2(Q)}+\sum_{\substack{|\alpha|\le 3\\ \alpha_0\ne 3}}\|D^{\alpha}u\|_{L_2(Q)},$$

где $\|\cdot\|_{L_2(Q)}$ – норма пространства $L_2(Q)$ квадратично суммируемых функций, заданных в области Q.

Обозначим через H гильбертово пространство правых частей операторного уравнения (4), т.е. $H=L_2(Q)\times H^3(\Omega)$, $H^3(\Omega)$ – гильбертово пространство Соболева, т.е. пространство функций, заданных в области Q, квадратично суммируемых и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до третьего порядка включительно в области Q, $\|\boldsymbol{F}\|_H = \| f \|_{L_2(Q)} + \| \varphi \|_{L_2(Q)} = \| f \|_{L_2(Q)} + \sum\limits_{|\alpha'|\le 3} \| D^{\alpha} u \|_{L_2(Q)}$, где $\alpha' = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Далее уравнение (4) рассматриваем в пределах только что введенных пространств B и H, оператор $\boldsymbol{L}: u \to \boldsymbol{L} u \in H$.

Можно показать, что для доказательства корректности задачи (1)–(3) (операторного уравнения (4)), т.е. существования и единственности сильного решения и его непрерывной зависимости от данных, необходимо доказать энергетическое неравенство для оператора $\boldsymbol{L}$, замыкаемость оператора $\boldsymbol{L}$ и плотность множества значений $R(\boldsymbol{L})$ в пространстве H.

Верна следующая теорема.

Теорема 1 (**энергетическое неравенство**). Для оператора $\boldsymbol{L}$ операторного уравнения (4) в области Q справедливо энергетическое неравенство, т.е.

$$\| u \|_B \le c \, \| \boldsymbol{L} u \|_H , \tag{5}$$

$\forall u \in D(\boldsymbol{L})$, где c – некоторая положительная постоянная, не зависящая от u.

Лемма 1. Оператор $\boldsymbol{L}$ операторного уравнения (4), как оператор из B в H, допускает замыкание.

Лемма 2. Пусть коэффициенты $a^{(\alpha)}(x)$ уравнения (1) непрерывны в $\overline{Q}$. Если для некоторого элемента $v \in L_2(Q)$ выполняется равенство $(L^{(0)} u, v)_{L_2(Q)} = 0$ для любого $u \in D^{(0)}(\boldsymbol{L})$, где $D^{(0)}(\boldsymbol{L}) = \{u \in D(\boldsymbol{L}) \mid l_0 u = 0\}$, то $v = 0$ по норме пространства $L_2(Q)$.

Доказательство леммы 2 является наряду с энергетическим неравенством одним из важных этапов доказательства корректности исходной задачи в целом. Для доказательства леммы оператор $L^{(0)}$ рассматриваем как произведение двух операторов $L^{(1)} L^{(2)}$, где $L^{(1)} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + b^2 \Delta$, $L^{(2)} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$. Показывается, что множество значений $R(L^{(2)})$ оператора $L^{(2)}$ с областью определения $D(L^{(2)}) = D^{(0)}(\boldsymbol{L})$ плотно в $L_2(Q)$ [9], а затем доказывается плотность множества значений $R(L^{(1)} - k)$ в $L_2(Q)$ для оператора $L^{(1)} - k$ с областью определения $D(L^{(1)} - k) = R(L^{(2)})$, где k достаточно большое [10].

Теорема 2. Пусть выполняются условия леммы 2 относительно непрерывности коэффициентов уравнения (1). Для любых функций $f \in L_2(Q)$, $\varphi \in H^3(\Omega)$ существует и единственно сильное решение $u \in B$ граничной задачи (1)–(3) и справедлива оценка

$$\| u \|_B \leq c(\| f \|_{L_2(Q)} + \| \varphi \|_{H^3(\Omega)}), \qquad (6)$$

где постоянная c та же, что и в неравенстве (5).

Теорема 2 доказывается сначала для случая $L = L^{(0)} - kL^{(2)}$. Для общего случая доказательство завершается методом продолжения по параметру [11].

Литература

1. *Hadamard J.* Proprietes d'une equation lineaire aux derivees partielles du quatrieme ordre // The Tohoku Mathematical Journal. V. 37. 1933. P. 133.
2. *Hadamard J.* Equation aux derivees partielles. L'enseignement mathematique. V. 35. 1936. P. 5.
3. *Sjöstrand O.* Sur une equation aux derivees partielles du type composite. Arkiv f. M. A. O. F. Bd 26A. № 1. 1937. P. 1.
4. *Cattabriga L.* Su alcuni problemi per equazioni differenziali di tipo composito. Rendiconti Sem. Mat. Universita Podova. Vol. XXVII. 1957.
5. *Davis R. B.* A boundary value problem for third-order linear partial differential equations of composite type // Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 3. 1952. P. 751.
6. *Дайняк В. В., Корзюк В. И.* Задача типа Дирихле для линейного дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1987. 23. № 5. С. 867–872.
7. *Корзюк В. И., Дайняк В. В.* О слабом решении задачи типа Дирихле для линейного дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1992. 28. № 6. С. 1056–1066.
8. *Корзюк В. И., Дайняк В. В.* О разрешимости смешанных задач для нестационарных уравнений третьего порядка // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2005. № 3. С. 54–60.
9. *Korzyuk V. I.* 10. Mollifiers with Variable Step in the Theory of Boundary Problem for Partial Differential Equations // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2003 (A. A. Kilbas and S. V. Rogosin eds.). Cottenham, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2006. P. 135–154.
10. *Корзюк В. И.* Операторы осреднения с переменным шагом в теории разрешимости эллиптических задач // Доклады НАН Беларуси. 2005. 49. № 6. С. 25–28.
11. *Корзюк В. И.* Смешанная задача для некоторых нестационарных уравнений с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1970. 6. №2. 1970. С. 343–357.