```
(* Function deletes all the vectors from ListPlotVectorField,
  which start point doesn't strictly lay inside of the border listBorder *)
(* Returns cleared ListPlotVectorField *)
deleteVectorsOutsideBorder[listPlotVectorField_, listBorder_] :=
   Module[{temp}, temp = listPlotVectorField;
      len = Length[listPlotVectorField[[1, 2]]];
      For[i = len, i >= 1, i--,
         x = listPlotVectorField[[1, 2, i, 1, 1, 1]];
         y = listPlotVectorField[[1, 2, i, 1, 1, 2]];
         If[True == IsOutsideOfPolygon[listBorder, x, y],
            temp[[1, 2, i]] = {}
         ];
      ];
      Return[temp];
   ];
```

Рис. 3 Описание программного кода функции *deleteVectorsOutsideBorder*

xi, yi – координаты проверяемой точки; isConvex – необязательный параметр, принимающий значения True или False (по умолчанию), указывающий является ли многоугольник выпуклым; в случае True, используется более быстрый алгоритм проверки.

deleteVectorsOutsideBorder[vectorFieldPlot, borderList] удаляет из графического объекта vectorFieldPlot, все вектора, которые не попадают в область визуализации borderList. На рис. 3 приведен программный код ее реализации:

Литература

1. Гришин А. М. Общие математические модели лесных и торфяных пожаров и их приложения // Успехи механики. 2002. № 4. С. 41–89.
2. Кулешов А. А. Математическое моделирование в задачах промышленной безопасности и экологии // Информационные технологии и вычислительные системы. 2003. № 4. С. 56–70.
3. Морозов А. А., Таранчук В. Б. Программирование задач численного анализа в системе Mathematica: Учеб. пособие. Мн.: БГПУ, 2005. 145 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ КОРРЕКЦИИ ПРОГНОЗОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ СО СТРУКТУРНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ В ПРОГНОЗНОМ ПЕРИОДЕ

А. В. Бояр

ВВЕДЕНИЕ

Структурные изменения – один из типовых признаков макроэкономических временных рядов, особенно для переходных экономик [2]. Структурные изменения в периоде оценивания модели обычно учитываются, за счет включения в эконометрическую модель фиктивных переменных. Этот метод, к сожалению, не может быть использован, если структурное изменение произошло в конце периода оценивания (или в прогнозном периоде). В данном случае разумным будет использовать специальные методы.

В данной работе используется подход Клементса – Хендри [1] для модели VAR(1) применительно к более общему типу моделей: модели VAR(p) и VECM.

1. МОДЕЛИ СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ И АЛГОРИТМЫ КОРРЕКЦИИ ПРОГНОЗОВ

Первый вид моделей, который мы рассмотрим, это стационарная модель VAR(p) для векторного временного ряда $y_t = (y_{1t}, y_{2t},...y_{nt})' \in R^n$:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{p} A_i y_{t-i} + Bz_t + \xi_t,\ t = 1,...,T-1, \tag{1}$$

где $\{A_i\}$ – фиксированные (n × n) матрицы авторегрессионных коэффициентов, $c = (c_1, c_2,...c_n)' \in R^n$ – фиксированный вектор констант, $z_t = (z_{1t}, z_{2t},...z_{mt})' \in R^m$ – вектор экзогенных детерминированных переменных, B – фиксированная (n × m) матрица регрессионных коэффициентов, $\xi_t = (\xi_{1t}, \xi_{2t},...\xi_{nt})' \in R^n$ – векторный процесс «белого шума» с невырожденной ковариационной матрицей Ψ.

Вторая модель это векторная модель коррекции ошибок VECM []. Модель строится по интегрированным первого порядка временным рядам $x_{1t}, x_{2t},...x_{nt}$, которые являются коинтегрированные с рангом коинтеграции r ($1 \le r \le (n-1)$):

$$\Delta x_t = \alpha\beta' x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta x_{t-i} + Bz_t + \eta_t, t = 1,...,T-1, \tag{2}$$

где $\{\Gamma_i\}$ – фиксированные (n×n) матрицы коэффициентов, $z_t = (z_{1t}, z_{2t},...z_{mt})' \in R^m$ – вектор экзогенных детерминированных переменных, B – фиксированная (n × m) матрица регрессионных коэффициентов. β и α – фиксированные (n×r) матрицы с рангом r и $\beta' x_t = \varsigma_t \in R^r$ – стационарный и обратимый процесс. И $\eta_t = (\eta_{1t}, \eta_{2t},...\eta_{nt})' \in R^n$ – процесс «белого шума» с невырожденной ковариационной матрицей Ψ.

Для модели VAR(p) предположим, что структурное изменение произошло между периодом T–1 и нынешним периодом T во всех параметрах моделей. Следовательно, «истинные» значения параметров $c^*, \{A^*{}_i\}, B^*$ соответствуют значениям в период от T до T+h (h = 1, . . . ,H), где H – горизонт прогнозирования:

$$y_{T+h} = c^* + \sum_{i=1}^{p} A^*{}_i y_{T+h-i} + B^* z_{T+h} + \xi_{T+h}\,,\ h = 0,...,H, \tag{3}$$

Соответствующие предположения относительно структурного изменения сделаны и для модели VECM. С новыми параметрами $\alpha^*, \beta^*, \{\Gamma^*{}_i\}, B^*$ модель (2) примет вид:

$$\Delta x_{T+h} = \alpha^* \beta^{*\prime} x_{T+h-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma^*{}_i \Delta x_{T+h-i} + B^* z_{T+h} + \eta_{T+h}, h = 0,...,H. \tag{4}$$

Обобщая подход Клементса и Хендри [1] мы предложили алгоритмы прогнозирования для моделей VAR(p) и VECM. Алгоритмы для модели VAR(p) описываются следующими уравнениями:

$$\hat{y}_{T+h} = c + \sum_{i=1}^{p} A_i \hat{y}_{T+h-i} + B z_{T+h}\,,\ h = 1,...,H; \tag{5}$$

$$\tilde{y}_{T+h} = c + \sum_{i=1}^{p} A_i \tilde{y}_{T+h-i} + B z_{T+h} + \hat{e}_T\,,\ h = 1,...,H; \tag{6}$$

$$\vec{y}_{T+h} = c + \sum_{i=1}^{p} A_i \vec{y}_{T+h-i} + B z_{T+h}, \vec{y}_{T+1} = \tilde{y}_{T+1}\,,\ h = 2,...,H; \tag{7}$$

$$\bar{y}_{T+h} = \hat{y}_{T+h} + \hat{e}_T \tag{8}$$

если $\{z_t\} \in R^1$ и текущий период времени (T+1) тогда

$$\breve{y}_{T+h} = e_T + c - \tilde{e}_{T+1} \frac{z_T}{\Delta z_{T+1}} + A \breve{y}_{T+h-1} + (B + \tilde{e}_{T+1} \frac{1}{\Delta z_{T+1}}) z_{T+h}, h = 2,...,H \tag{9}$$

где $\hat{e}_T = y_T - (c + \sum_{i=1}^{p} A_i y_{T-i} + B z_T)$ – ошибка прогноза (5), которая наблюдалась в период времени T ($\hat{E}_T = (\hat{e}_T, 0,...,0)'$), и $\tilde{e}_{T+1} = y_{T+1} - \tilde{y}_{T+1}$ – ошибка прогноза (6), которая наблюдалась в период времени (T + 1).

Аналогичные алгоритмы построены и для модели VECM.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ ОШИБОК ПРОГНОЗОВ

Для определения точности прогнозов использовалось условное математическое ожидание и условная дисперсия

$$E\{e_{T+h} \mid Y_T\} = E\{Y_{T+h} - Y^{forecast}{}_{T+h} \mid Y_T\}, V\{e_{T+h} \mid Y_T\}, \qquad (10)$$

для ошибки прогноза e_{T+h} при известном векторе $Y_T = \{y_t, y_{t-1}, \ldots y_{t-p+1}\}'$.

Представления для изложенных характеристик точности вычислены для алгоритмов прогнозирования (5)-(9) для моделей VAR(p) и VECM. Представим вычисленные формулы для алгоритма прогнозирования (5) для модели VAR(p) (соответствующие формулы получены также для алгоритмов прогнозирования (6)-(9), а также для модели VECM).

3. Экспериментальные результаты

Проведем результаты экспериментального исследования построенных алгоритмов и покажем преимущество алгоритмов (6)-(9), учитывающих структурное изменение, над алгоритмом (5), который не учитывает структурное изменение.

Рассмотрим модель (1) где размерность n=2. модель до структурного изменения имела вид:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \xi_{1t} \\ \xi_{2t} \end{pmatrix}, t = 1, \ldots, 299.$$

после структурного изменения модель с новыми параметрами имеет вид:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \xi_{1t} \\ \xi_{2t} \end{pmatrix}, t = 300, \ldots, 310,$$

где $L\{\xi\} = N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.625 & 0 \\ 0 & 0.625 \end{pmatrix} \right)$.

Результаты вычисленных условного математического ожидания и условной дисперсии ошибок прогнозов представлены в *таблице* 1.

Результаты экспериментов показывают, что использование прогнозов учитывающих структурное изменение позволяет повысить точность прогнозов по отношению к прогнозу не учитывающего структурное изменение. Прогнозы $\tilde{y}_t$ и $\breve{y}_t$ показали наилучшие результаты. Прогноз $\vec{y}_t$ показал хорошие результаты только для h=1, а прогноз $\overleftarrow{y}_t$ только для h<5.

Таблица 1

Ошибки прогнозов

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E\{\hat{e}_{1300+h}\}$	60.4	66.5	62.4	56.8	51.1	46.1	41.6	37.5	33.9	30.5
$E\{\hat{e}_{2300+h}\}$	–60	–79	–88	–95	–101	–107	–112	–117	–121	–125
$E\{\widetilde{e}_{1300+h}\}$	0.2	0.3	0.6	0.8	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3
$E\{\widetilde{e}_{2300+h}\}$	–0.3	–0.6	–0.9	–1.2	–1.6	–2	–2.4	–2.7	–3.2	–3.4
$E\{\vec{e}_{1300+h}\}$	0.2	60.5	66.7	62.6	56.8	51.2	46.2	41.7	37.7	33.9
$E\{\vec{e}_{2300+h}\}$	–0.3	–61	–79	–89	–96	–102	–107	–112	–117	–121
$E\{\overleftarrow{e}_{1300+h}\}$	0.2	6.3	2.2	–3.3	–8.9	–14	–18.5	–22.6	–26.2	–29.5
$E\{\overleftarrow{e}_{2300+h}\}$	–0.3	–18.8	–28.2	–35.4	–41.5	–47.1	–52.1	–56.7	–60.9	–64.5
$E\{\breve{e}_{1300+h}\}$	0	–0.05	–0.04	–0.05	–0.2	–0.3	–0.5	–0.6	–0.6	–0.8
$E\{\breve{e}_{2300+h}\}$	0	0.06	0.07	0.04	0.04	–0.03	–0.1	–0.1	–0.2	–0.1

Литература

1. Clements, M. P. and Hendry, D. F. Forecasting Economic Time series. Cambridge: Cambridge University Press. 1998
2. Malugin V. I., Bosko A. A., Kovzel E. I. On the testing for integration and cointegration of macroeconomic time series under structural breaks //Belarusian economy: analysis, forecasting, regulation. No. 11, p. 45–56. 2004

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА РЫНКЕ НЕСКОЛЬКИХ КОНКУРЕНТОВ И ТОВАРОВ

Е. С. Гаврош, Е. А. Пристрем, О. В. Панфиленко

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрена математическая модель экономики, описывающая динамику развития рыночных цен во времени с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Основная цель представленной работы – исследование устойчивости равновесия цен товаров или услуг на рынке. Участниками, вступающими в рыночные отношения, являются внешние структуры, покупатели, а также продавцы, способствующие появлению конкуренции на рынке.

Будем оценивать действие конкурентов друг на друга с помощью понятия экономических сил, способных изменить цену каждого их товара. Для описания этих сил заметим, что наличие конкуренции оказывает влияние одновременно и на цены своих партнеров по рынку, и на объемы их продаж.