6. Володько Л.В., Турецкая Е.А. //Журн. прикл. спектроскопии. 1966. Т.4. №4. С. 327.
7. Турецкая Е.А. //Там же. 1971. Т.15. №3. С. 547.
8. Moriyasu M., Yokoyama Y., Ikeda S. //J. Inorg. and Nucl. Chem. 1977. Vol.39. P.2199.
9. Казаков В.П., Коробейникова В.Н., Чувилин Ю.Н. и др. //Оптика и спектроскопия. 1973. Т.35. С.991.
10. Володько Л.В., Комяк А.И., Умрейко Д.С.Ураниловые соединения. Мн., 1981. Т.1.

УДК 517.926

Л.А. АЛЬСЕВИЧ, В.И.БУЛАТОВ

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ

It is showed that every solution of linear homogeneous regular differential system is limiting for corresponding exponential solution of the system with small parameter.

Рассмотрим стационарную систему, не разрешенную относительно производной

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{1}$$

где x — n-вектор; A_0 и A — веществениные $n\times n$-матрицы.

Под решением системы (1), соответствующим начальному условию

$$x(0)=x_0, \tag{2}$$

где x_0 — постоянный n-вектор, будем подразумевать дифференцируемую n-вектор-функцию $x(t)$, $t\in[0;+\infty[$, удовлетворяющую (1)-(2).

Известно [1], что система (1), у которой $\det A_0\neq 0$, всегда имеет единственное решение

$$x(t) = e^{A_0^{-1}At}x_0,$$

соответствующее начальному условию (2). Целью данной работы является обобщение такого представления решений для случая регулярных систем (1).

Систему (1) считаем регулярной, если найдется такое число λ_0, что

$$\det(\lambda_0 A_0 - A)\neq 0. \tag{3}$$

Для регулярной системы (1) положим

$$\begin{cases} y(t) = e^{-\lambda_0 t}x(t), \\ G = (A-\lambda_0 A_0)^{-1}A_0, \end{cases} \tag{4}$$

где число λ_0 удовлетворяет условию (3). В силу (1)-(4) имеем

$$\begin{cases} G\dot{y}(t) = y(t), \\ y(0) = x_0 \end{cases}. \tag{5}$$

Очевидно, что регулярная система (1) тогда и только тогда будет иметь решение, соответствующее начальному условию (2), когда разрешима система (5), т.е. когда [2]

$$x_0\in L(G^n), \tag{6}$$

где $L(G^n)$ означает линейное пространство, натянутое на вектор-столбцы матрицы G^n.

Наряду с системой (5) при условии (6) рассмотрим систему

$$\begin{cases} (G+pE)\dot{y}_p(t) = y_p(t), \\ y_p(0) = x_0, \end{cases} \tag{7}$$

где число p играет роль малого параметра. Для всех достаточно малых $p\neq 0$ система (7) будет системой с $\det(G+pE)\neq 0$, и, значит, имеет решение

$$y_p(t) = e^{(G+pE)^{-1}t} x_0, \tag{8}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма. Для произвольной $n \times n$-матрицы G существует предельная матричная функция

$$F(t) = \lim_{p \to 0} (e^{t(G+pE)^{-1}} G^n), \tag{9}$$

являющаяся квазиполиномом от t и удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} G\dot{F}(t) = F(t), \\ F(0) = G^n. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. С помощью подходящей невырожденной $n \times n$-матрицы S матрицу G можно привести к блочно-диагональному виду [3]

$$S^{-1} G S = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где Q — соответствующая нильпотентная $m \times m$-матрица, H — некоторая невырожденная $(n-m)\times(n-m)$–матрица. Учитывая, что $Q^m=0$, из (11), во-первых, имеем [3]

$$G^n = \left(S \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} S^{-1} \right)^n = S \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^n \end{bmatrix} S^{-1}, \tag{12}$$

и, во-вторых, получаем [3]

$$e^{t(G+pE)^{-1}} \cdot G^n = S \begin{bmatrix} e^{t(Q+pE)^{-1}} & 0 \\ 0 & e^{t(H+pE)^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^n \end{bmatrix} S^{-1} = S \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{t(H+pE)^{-1}} H^n \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Отсюда для матричной функции (9) следует

$$F(t) = S \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{tH^{-1}} H^n \end{bmatrix} S^{-1}. \tag{13}$$

Поэтому, во-первых, элементами $F(t)$ будут квазиполиномы от t, и, во-вторых,

$$G\dot{F}(t) = S \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^{-1} e^{tH^{-1}} H^n \end{bmatrix} S^{-1} = F(t),$$

причем, в силу (12), (13) имеем

$$F(0) = S \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^n \end{bmatrix} S^{-1} = G^n,$$

т.е. получаем (10).

Доказанная лемма позволяет легко обосновать следующий основной результат.

Теорема. При условии (6) для решения (8) соответствующей системы (7) существует предельная функция

$$y(t) = \lim_{p \to 0} y_p(t), \tag{14}$$

удовлетворяющая (5).

Доказательство. Из (6) следует, что найдется такой n–вектор y_0, что $x_0 = G^n y_0$.

Поэтому, для решения (8) системы (7) имеем

$$y_p(t) = e^{t(G+pE)^{-1}} G^n y_0.$$

Отсюда, в силу предыдущей леммы для предельной функции (14), во-первых, получаем

$$y(t) = \lim_{p \to 0} (e^{t(G+pE)^{-1}} G^n) y_0 = F(t) y_0, \tag{15}$$

где $F(t)$ определяется соотношением (9), и, во-вторых, на основании (10) непосредственно проверяется, что функция (15) удовлетворяет системе (5).

Следствие. Любое решение $x(t)$ регулярной системы (1), соответствующее начальному условию (2), представимо в виде

$$x(t) = \lim_{p\to 0}(e^{t(\lambda_0 E+(G+pE)^{-1})}x_0), \tag{16}$$

где число λ_0 определяется соотношением (3), а $G=(A-\lambda_0 A_0)^{-1}A_0$.

Действительно, в силу (3)-(5) из (8),(14) для (1)-(2) имеем

$$x(t) = e^{\lambda_0 t}y(t) = e^{\lambda_0 t}\lim_{p\to 0}(e^{t(G+pE)^{-1}}x_0) = \lim_{p\to 0}(e^{t(\lambda_0 E+(G+pE)^{-1})}x_0).$$

Замечание. Хотя в представлении (16) решения $x(t)$ регулярной системы (1)-(2) фигурирует произвольное число λ_0, удовлетворяющее (3), можно показать, что предельная функция $x(t)$ в (16) не зависит от λ_0, и, например, может быть найдена также по формуле [4]

$$x(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}(e^{t(A_0+\varepsilon A)^{-1}A}x_0).$$

1. Л.А.Альсевич, Л.П.Черенкова // Практикум по дифференциальным уравнениям. Минск.»Вышэйшая школа», 1990
2. Bulatov V // Sur les solutions d'un systčme différentiel non resoluble par rapport ŕ la dérivée. Cahiers mathématiques. Université d'Oran. Fascicule ą1 Annee 1988. ORAN — ALGÉRIE.
3. Гантмахер Ф.Р.//Теория матриц. М., 1988.
4. В.И.Булатов //Об одном предельном представлении решений линейных регулярных систем. Тез. докл. междунар. матем.конф. «Еругинские чтения – У», 26-28 мая 1998г. Могилев, 1998г.

Поступила в редакцию 04.06.98

УДК 532.135: 539.374

М.Д.МАРТЫНЕНКО, С.М.БОСЯКОВ

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ПОЛУМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ АСИММЕТРИЧНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

The system of equations of the asymmetrical theory of viscous liquid medium is reduced and on its base the equation of characteristics is received.

Рассмотрим асимметричную теорию вязких жидких сред, в которой поворот локального трехгранника равен среднему повороту поля перемещений:

$$\omega = 1/2\,\mathrm{rot}\,\upsilon,\ \omega=(\omega_1, \omega_2, \omega_3),\ \upsilon=(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3), \tag{1}$$

где ω – вектор углового поворота, υ – вектор скорости.

Уравнения движения могут быть записаны в таком виде:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ji,j} + X_i = \rho\dfrac{d\upsilon_i}{dt}, \\ \sum_{j=1}^{3}\mu_{ji,j} + \sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + Y_i = j\dfrac{d\varpi_i}{dt}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь компоненты силовых и моментных напряжений образуют несимметричные тензоры [1–3], причем

$$\sigma_{ij} = \mu(\partial_i\upsilon_j + \partial_j\upsilon_i) + \alpha(\partial_j\upsilon_i - \partial_i\upsilon_j) - 2\alpha\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\omega_k + \left(\lambda\sum_{k=1}^{3}\partial_k\upsilon_k - p\right)\delta_{ij},$$

$$\mu_{ij} = \gamma(\partial_j\omega_i + \partial_i\omega_j) + \beta(\partial_j\omega_i - \partial_i\omega_j).$$