УДК 519.10

М. К. КРАВЦОВ, Е. В. ЛУКШИН

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТОЧЕК МНОГОИНДЕКСНОГО АКСИАЛЬНОГО ТРАНСПОРТНОГО МНОГОГРАННИКА*

Sufficiently exact upper bound for the number of integer points of the multi-index axial transportation polyhedron determined by integer vectors is obtained. Reachability of this bound is proved in some particular cases.

В [1] предложены критерии принадлежности p-индексного ($p\geq 2$) аксиального транспортного многогранника (p-АТМ) $M(a^1, a^2, ..., a^p)=$
$$= \{x=\left\|x_{i_1 i_2 \dots i_p}\right\|: \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_{s-1}=1}^{n_{s-1}} \sum_{i_{s+1}=1}^{n_{s+1}} \dots \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1 i_2 \dots i_p} = a^s_{i_s} \qquad \forall i_s \in N_{n_s}, \qquad s\in N_p,$$
$x_{i_1 i_2 \dots i_p} \geq 0 \ \ \forall (i_1, i_2, ..., i_p) \in N_{n_1} \times N_{n_2} \times ... \times N_{n_p}$ } порядка $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$, $n_s>1$ $\forall s\in N_p$, и веса k к классам многогранников с минимальным и максимальным числом целочисленных точек (ЦТ). Будем считать, что $N_t=\{1,\ 2,\ ...,\ t\}$, а векторы $a^s=(a^s_1, a^s_2, ..., a^s_{n_s})$, $s\in N_p$, имеют целые положительные компоненты, причем $\sum_{i_s=1}^{n_s} a^s_{i_s} = k \quad \forall s\in N_p$. Очевидно, что $k\geq \max\{n_s: s\in N_p\}$.

Заметим, что в [1] была также выведена рекуррентная формула для определения минимального числа ЦТ p-АТМ заданного порядка и веса.

Отыскание максимального числа $\psi(n_1, n_2, ..., n_p, k)$ ЦТ p-АТМ порядка $n_1\times n_2\times ... \times n_p$ и веса k представляет собой трудную задачу. Найти явную формулу даже для максимального числа $\psi(n_1, n_2, k)$ ЦТ 2-АТМ (классического транспортного многогранника) порядка $n_1\times n_2$ и веса k до сих пор не удалось. В связи с этим особое значение приобретают как нижние, так и верхние оценки числа $\psi(n_1, n_2, ..., n_p, k)$.

Целью данной статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Для числа $z(a^1, a^2, ..., a^p, k)$ ЦТ p-АТМ $M(a^1, a^2, ..., a^p)$ порядка $n_1\times n_2\times ... \times n_p$ и веса k и любого числа $t\in N_p$ справедлива оценка сверху
$$z(a^1, a^2, ..., a^p, k) \leq \frac{(k!)^{p-1}}{\prod\limits_{\substack{s=1\\ s\neq t}}^{p} \prod\limits_{i_s=1}^{n_s} (a^s_{i_s})!}, \tag{1}$$
достижимая при $k=n_t$.

Доказательство. Докажем теорему, применив индукцию по числу p.

Сначала покажем, что неравенство (1) верно для любого $t\in N_p$ при $p=2$. Не ограничивая общности, будем считать, что $t=2$. Наряду с 2-АТМ $M(a^1, a^2)$ порядка $n_1\times n_2$ и веса k рассмотрим многогранник $M(a^1, e)$ порядка $n_1\times k$, где $e=\underbrace{(1,\ 1,\ ...,\ 1)}_{k}$.

Так как $a^1_1, a^1_2, ..., a^1_{n_1}$ — целые положительные числа и $\sum_{i_1=1}^{n_1} a^1_{i_1} = k$, то число ЦТ многогранника $M(a^1, e)$ равно числу способов, посредством которых k элементов могут быть распределены на n_1 групп, из которых первая содержит a^1_1 элементов, вторая — a^1_2 элементов и т. д., n_1-я группа содержит $a^1_{n_1}$ элементов. Формула, дающая число таких способов, совпадает с формулой (см., напр., [2, 3])

*Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект НФ 97–266).

$$z(a^1, e, k) = \frac{k!}{\prod_{i_1=1}^{n_1}(a^1_{i_1})!}. \qquad (2)$$

Множество всех целочисленных матриц (точек) многогранника $M(a, b)$ будем обозначать через $Z(a, b)$.

Оценим величину $z(a^1, a^2, k)$ сверху. Пусть $y = \left\|y_{i_1 q}\right\|_{n_1 \times k}$ — некоторая матрица из множества $Z(a^1, e)$. По матрице y построим матрицу $x = \left\|x_{i_1 i_2}\right\|_{n_1 \times n_2}$ согласно формуле

$$x_{i_1 i_2} = \sum_{q \in Q_{i_2}} y_{i_1 q} \quad \forall (i_1, i_2) \in N_{n_1} \times N_{n_2}, \qquad (3)$$

где $Q_{i_2} = \left\{q \in N_k : \sum_{l=1}^{i_2-1} a^2_l + 1 \le q \le \sum_{l=1}^{i_2} a^2_l\right\}$, $\sum_{l=1}^{0}(\cdot) = 0$.

Очевидно, что матрица x определяется единственным образом по заданной матрице y. Также легко видеть, что $x \in Z(a^1, a^2)$.

Пусть $x = \left\|x_{i_1 i_2}\right\|_{n_1 \times n_2}$ — некоторая матрица из множества $Z(a^1, a^2)$. По матрице x построим матрицу $y(x) = \left\|y^x_{i_1 q}\right\|_{n_1 \times k}$ согласно формуле

$$y^x_{i_1 q} = \begin{cases} 1, \text{если} \quad q \in Q^{i_1}_{i_2}(x_{i_1 i_2}),\ i_1 \in \mathcal{K}_{i_2}(x),\ i_2 \in N_{n_2}, \\ 0 \ \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $\mathcal{K}_{i_2}(x) = \{i_1 \in N_{n_1} : x_{i_1 i_2} > 0\}$, а множества $Q^{i_1}_{i_2}(x_{i_1 i_2}),\ i_1 \in \mathcal{K}_{i_2}(x)$, $i_2 \in N_{n_2}$, удовлетворяют условиям:

$Q_{i_2} = \bigcup_{i_1 \in \mathcal{K}_{i_2}(x)} Q^{i_1}_{i_2}(x_{i_1 i_2}) \forall i_2 \in N_{n_2}$, $Q^{i'_1}_{i_2}(x_{i'_1 i_2}) \cap Q^{i''_1}_{i_2}(x_{i''_1 i_2}) = \varnothing \quad \forall i'_1$, $i''_1 \in \mathcal{K}_{i_2}(x)$, $i'_1 \ne i''_1$, $\forall i_2 \in N_{n_2}$, $\left|Q^{i_1}_{i_2}(x_{i_1 i_2})\right| = x_{i_1 i_2} \quad \forall i_1 \in \mathcal{K}_{i_2}(x)$. Нетрудно убедиться, что $y(x) \in Z(a^1, e)$.

Заметим, что если $x' \ne x''$, $x', x'' \in Z(a^1, a^2)$, то $y(x') \ne y(x'')$. Действительно, если предположить, что $y(x') = y(x'')$, то на основании формулы (3) выполнено равенство $x' = x''$, которое противоречит условию $x' \ne x''$.

Таким образом, формула (3) определяет отображение множества $Z(a^1, e)$ на множество $Z(a^1, a^2)$. Следовательно, $z(a^1, a^2, k) \le z(a^1, e, k)$. Отсюда и из (2) получаем неравенство

$$z(a^1, a^2, k) \le \frac{k!}{\prod_{i_1=1}^{n_1}(a^1_{i_1})!}, \qquad (4)$$

которое при $k = n_2$ превращается в равенство.

Пусть теперь $p \ge 3$, $l \in N_p$, $l \ne t$. Рассмотрим $(p$-$1)$-индексную матрицу $y = \left\|y_{i_1 \ldots i_{l-1} i_{l+1} \ldots i_p}\right\|$, принадлежащую многограннику $M(a^1, a^2, \ldots, a^{l-1}, a^{l+1}, \ldots, a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_{l-1} \times n_{l+1} \times \ldots \times n_p$. Запишем эту матрицу в виде $(n_1 n_2 \ldots n_{l-1} n_{l+1} \ldots n_p)$-мерного вектора $z(y) = (y_{11\ldots1*11\ldots1}, y_{11\ldots1*11\ldots2}, \ldots, y_{n_1 n_2 \ldots n_{l-1} * n_{l+1} \ldots n_p})$, где * обозначает отсутствие l-го индекса. Удалив в векторе $z(y)$ нулевые компоненты, получим вектор $z^+(y)$, число компонент которого равно числу $t(y)$ положительных элементов матрицы y. Отметим, что компоненты вектора $z^+(y)$ занумерованы тем же способом, что и компоненты вектора $z(y)$. Поскольку сумма компонент вектора $z^+(y)$ равна k, то пара векторов a^l и $z^+(y)$ определяет 2-АТМ $M(a^l, z^+(y))$ порядка $n_l \times t(y)$.

Пусть $u(y) = \left\| u_{i_l j}^{y} \right\|_{n_l \times t(y)}$ — некоторая матрица многогранника $M(a^l, z^+(y))$, где индекс j представляет собой совокупность индексов $(i_1 i_2 \ldots i_{l-1} * i_{l+1} \ldots i_p)$, задаваемую номерами компонент вектора $z^+(y)$. По этой матрице определим матрицу $x(u(y)) = \left\| x_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{u(y)} \right\|$ согласно правилу:

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{u(y)} = \begin{cases} u_{i_l j}^{y}, & \text{если } (i_1 i_2 \ldots i_{l-1} * i_{l+1} \ldots i_p) = j, \\ 0 & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Очевидно, что построенная таким образом матрица $x(u(y)) \in M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$. Легко также заметить, что любая матрица многогранника $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ может быть построена по этому правилу. Следовательно, многогранник $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ можно представить в виде:

$$M(a^1, a^2, \ldots, a^p) = \{x(u(y)) \colon y \in M(a^1, a^2, \ldots, a^{l-1}, a^{l+1}, \ldots, a^p),\ u(y) \in M(a^l, z^+(y))\}. \quad (5)$$

Отсюда вытекает формула

$$z(a^1, a^2, \ldots, a^p, k) = \sum_{y \in M(a^1, a^2, \ldots, a^{l-1}, a^{l+1}, \ldots, a^p)} z(a^l, z^+(y), k),$$

где суммирование проводится по всем ЦТ многогранника $M(a^1, a^2, \ldots, a^{l-1}, a^{l+1}, \ldots, a^p)$.

Теперь, воспользовавшись оценкой

$$z(a^l, z^+(y), k) \le \frac{k!}{\prod_{i_l=1}^{n_l} (a_{i_l}^l)!}, \quad (6)$$

полученной на основании неравенства (4), находим

$$z(a^1, a^2, \ldots, a^p, k) \le \frac{k!}{\prod_{i_l=1}^{n_l} (a_{i_l}^l)!} z(a^1, a^2, \ldots, a^{l-1}, a^{l+1}, \ldots, a^p, k).$$

Достижимость этой оценки при $k = n_l$ следует из достижимости оценки (6). Отсюда получаем утверждение теоремы 1, поскольку, по предположению индукции, для любого числа $t \in N_p \setminus \{l\}$ справедливо неравенство

$$z(a^1, a^2, \ldots, a^{l-1}, a^{l+1}, \ldots, a^p, k) \le \frac{(k!)^{p-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \ne l, t}}^{p} \prod_{i_s=1}^{n_s} (a_{i_s}^s)!},$$

которое превращается в равенство при $k = n_t$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекают два следствия.

Следствие 1. Справедливо неравенство

$$z(a^1, a^2, \ldots, a^p, k) \le \frac{(k!)^{p-1}}{\max\left\{\prod_{\substack{s=1 \\ s \ne t}}^{p} \prod_{i_s=1}^{n_s} (a_{i_s}^s)! \,:\, t \in N_p\right\}}.$$

Следствие 2. Пусть $k = \max\{n_s \colon s \in N_p\}$. Тогда

$$z(a^1, a^2, \ldots, a^p, k) = f_0^z(M(a^1, a^2, \ldots, a^p)) = \frac{(k!)^{p-1}}{\prod_{s=1}^{p} \prod_{i_s=1}^{n_s} (a_{i_s}^s)!},$$

где $f_0^z(M)$ — число целочисленных вершин (ЦВ) многогранника M.

Отсюда вытекает следующий известный результат [4, с. 309]: число планов p-индексной аксиальной проблемы выбора порядка $k \times k \times \ldots \times k$ равно числу $(k!)^{p-1}$.

Так как p-АТМ $M(a^1, a^2, ..., a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$ и веса k имеет максимальное число $\psi(n_1, n_2, ..., n_p, k)$ ЦТ тогда и только тогда, когда для любого $s \in N_p$ вектор a^s есть перестановка чисел $\underbrace{\left[\frac{k}{n_s}\right]+1, \ldots, \left[\frac{k}{n_s}\right]+1}_{r(k,n_s)}, \underbrace{\left[\frac{k}{n_s}\right], \ldots, \left[\frac{k}{n_s}\right]}_{n_s - r(k,n_s)}$, где $r(u, v)$ — остаток от деления числа u на число v, $[h]$ — максимальное целое число, не превосходящее числа h (см. [1]), то на основании следствия 2 получаем следующий результат.

Следствие 3. Пусть $k = \max\{n_s: s \in N_p\}$. Тогда максимальное число ЦТ в классе p-АТМ порядка $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$ и веса k совпадает с максимальным числом ЦВ в том же классе и равно числу

$$\frac{(k!)^{p-1}}{\prod_{s=1}^{p}\left(\left(\left[\frac{k}{n_s}\right]+1\right)!\right)^{r(k,n_s)}\left(\left[\frac{k}{n_s}\right]!\right)^{n_s-r(k,n_s)}}.$$

Как известно [1], p-АТМ $M(a^1, a^2, ..., a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$ и веса k имеет минимальное число ЦТ тогда и только тогда, когда для любого $s \in N_p$ вектор a^s является перестановкой чисел $k - n_s + 1, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n_s - 1}$. Отсюда и из следствия 2 вытекает утверждение (см. [5]): минимальное число ЦТ в классе p-АТМ порядка $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$ и веса k, $k = \max\{n_s: s \in N_p\}$, совпадает с минимальным числом ЦВ в том же классе и равно числу $\frac{(k!)^{p-1}}{\prod_{s=1}^{p}(k - n_s + 1)!}$.

Зная, как устроены p-АТМ порядка $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$ и веса k с максимальным числом ЦТ, и используя следствие 1, легко установить, что справедливо

Следствие 4. Справедливо неравенство

$$\psi(n_1, n_2, ..., n_p, k) \le \frac{(k!)^{p-1}}{\max\left\{\prod_{\substack{s=1\\ s\ne t}}^{p}\left(\left(\left[\frac{k}{n_s}\right]+1\right)!\right)^{r(k,n_s)}\left(\left[\frac{k}{n_s}\right]!\right)^{n_s-r(k,n_s)} : t \in N_p\right\}}.$$

Множество всех ЦТ (ЦВ) p-АТМ $M(a^1, a^2, ..., a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$ будем обозначать через $Z(a^1, a^2, ..., a^p)$ ($Z_0(a^1, a^2, ..., a^p)$). Связь между этими множествами устанавливает

Теорема 2. Для того чтобы выполнялось равенство $Z(a^1, a^2, ..., a^p) = Z_0(a^1, a^2, ..., a^p)$, достаточно, а в случае, когда $p=2$, и необходимо, чтобы существовало подмножество $N_0 \subseteq N_p$, $|N_0| \ge p-1$, такое, что для любого индекса $s \in N_0$ среди компонент вектора a^s имеется по крайней мере $n_s - 1$ компонент, равных 1.

В достаточности этих условий можно убедиться непосредственно, используя формулу (5), а необходимость легко доказать от противного.

Отметим, что равенство $Z(a^1, a^2) = Z_0(a^1, a^2)$ впервые было получено в [1].

1. Кравцов М.К., Галактионова Е.С. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. №4. С.39.

2. Холл М. Комбинаторика. М., 1970.

3. Кравцов М.К. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. №6. С.122.

4. Емеличев В.А., Ковалёв М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.
5. Емеличев В.А., Кравцов М.К. // Дискретная математика. 1991. Т.3. Вып.2. С.3.

Поступила в редакцию 14.04.98.

УДК 519.24

Н.Н.ДЕМЕШ, М.А.АКИНФИНА

О КОВАРИАЦИИ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ УЭЛЧА ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ ПРОЦЕССОВ

In the present paper the modified periodogram of Welch as the estimate of spectral density of symmetric stationary α-stable process is being studied, the former being combined by crossing intervals of observation. The formula for the covariation of the estimate involved have been obtained.

Рассмотрим устойчивый симметричный стационарный случайный процесс [1] $X(t)$, $t\in Z=\{0, \pm1, \pm2,...\}$, с показателем α, $0<\alpha<2$, допускающий спектральное представление вида

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dz(\lambda), \tag{1}$$

где $z(\lambda)$ – процесс с независимыми приращениями и такой, что

$$\{\mathrm{M}\, |dz(\lambda)^p\}^{\alpha/p} = \mathrm{const}\,(p,\alpha)\, f(\lambda) d\lambda,\ 0<p<\alpha\le 2,\ \lambda\in[-\pi,\pi],$$

где const (p, α) – некоторая положительная константа, зависящая только от p и α, а $f(\lambda)$ по аналогии с работой [1] будем называть спектральной плотностью.

В качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda)$ исследуем статистику

$$\overline{f_T}(\lambda) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} I_M^l(\lambda), \tag{2}$$

построенную по $T=(L-1)S+M$ последовательным наблюдениям

$$x(1), x(2),..., x(T) \tag{3}$$

за процессом (1), которые разбиты на L равных отрезков длины M, со сдвигом $S(0\le S\le M)$ отсчетов между соседними отрезками, где $I_M^l(\lambda)$ – модифицированная периодограмма, определяемая формулой

$$I_M^l(\lambda) = C_{p,\alpha}\left|d_M^l(\lambda)\right|^p,\ 0< p< \alpha< 2,\ \lambda\in[-\pi,\pi],\ l=\overline{1,L},$$

где $$C_{p,\alpha} = \frac{D_p}{F_{p,\alpha}(c_\alpha)^{p/\alpha}},\ D_p = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos u}{|u|^{1+p}}du,\ F_{p,\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-|u|^\alpha}}{|u|^{1+p}}du,$$

$$d_M^l(\lambda) = A_M \operatorname{Re}\sum_{t=1}^{M} x(t+(l-1)S)e^{-i\lambda t}h_M(t),\ A_M = \frac{1}{\left[B_{\alpha,M}\right]^{1/\alpha}},$$

$$B_{\alpha,M} = \int_{-\pi}^{\pi}\left|H^{(M)}(\upsilon)\right|^\alpha d\upsilon,\ H^{(M)}(\upsilon) = \sum_{t=1}^{M} h_M(t)e^{-i\upsilon t}.$$

а $h_M(t)$– окно просмотра данных. Статистику (2) будем называть модифицированной периодограммой Уэлча [6].