

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОТРАЖЕНИЕМ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Two new singular integral equations are solved in quadratures.

Рассмотрим уравнение с интегралами в смысле главного значения на действительной оси $-\infty < t < \infty$:

$$(a(t) + b(t))\varphi(t) + (b(-t) - a(t))\varphi(-t) + \frac{2}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a(\tau) - b(\tau))\tau\varphi(\tau)d\tau}{\tau^2 - t^2} = f(t), \quad (1)$$

$$(a(t) + c(t))\varphi(t) + (b(t) + c(t))\varphi(-t) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b(\tau) - c(\tau))\varphi(\tau) + (a(\tau) - c(\tau))\varphi(-\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t). \quad (2)$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ — заданные, $\varphi(t)$ — искомая H -непрерывные на действительной оси (включая бесконечно удаленную точку) комплекснозначные функции, причем $\varphi(\pm\infty)=0$, $f(\pm\infty)=0$. Близкие уравнения решены Ю.И.Черским [1–3].

Запишем следующее краевое условие задачи, в котором пусть все функции H -непрерывны, а искомые функции исчезают на бесконечности:

$$\Phi_+(t) = G(t)\Phi_*(t) + g(t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (3)$$

Эта задача имеет лишь то отличие от классической краевой задачи Римана на действительной оси [4], что вместо функции, аналитической в нижней полуплоскости, ищется четная функция на действительной оси $\Phi_*(t)$. ("Звездочка" и в последующих формулах означает четность функций.)

Задача (3) допускает решение по схеме, аналогичной схеме Ф.Д.Гахова решения задачи Римана. Как в основе решения задачи Римана лежит решение задачи о скачке $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t)$ с помощью операторов $P^\pm$:

$$\Phi^\pm(t) = (P^\pm g)(t) \equiv \pm \frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)d\tau}{\tau - t},$$

так в основе решения задачи (3) лежит решение задачи о скачке $\Phi_+(t) - \Phi_*(t) = g(t)$ с помощью операторов P_+ , P_* :

$$\Phi_+(t) = (P_+ g)(t) \equiv \frac{g(t) - g(-t)}{2} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)\tau d\tau}{\tau^2 - t^2},$$

$$\Phi_*(t) = (P_* g)(t) \equiv -\frac{g(t) + g(-t)}{2} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)\tau d\tau}{\tau^2 - t^2}.$$

Отметим, что возможен иной путь решения задачи (3): заменить в краевом условии t на $-t$ и исключить из возникших двух условий $\Phi_*(t)$. В результате возникнет краевое условие задачи Карлемана для полуплоскости со сдвигом-отражением; такая задача изучена в [5].

Введем функции на действительной оси: $\Phi_+(t) = (P_+ \varphi)(t)$, $\Phi_*(t) = (P_* \varphi)(t)$, $\Psi_+(t) = (P_+ \psi)(t)$, $\Psi_*(t) = (P_* \psi)(t)$, где $\psi(t) = b(t)\varphi(t)$.

Теперь уравнение (1) можно записать в виде краевой задачи

$$2a(t)\Phi_+(t) = 2\Psi_*(t) + f(t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (4)$$

Исключая из соотношений

$$\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_*(t), \quad b(t)\varphi(t) = \Psi_+(t) - \Psi_*(t) \quad (5)$$

функцию $\varphi(t)$, придем еще к краевой задаче

$$\Psi_+(t) = -b(t)\Phi_*(t) + \left((a(t) + b(t))\Phi_+(t) - \frac{f(t)}{2} \right), \quad -\infty < t < \infty. \quad (6)$$

После решения задач (4), (6) решение уравнения (1) получается по первой из формул (5). Задачи (4), (6) являются задачами вида (3), и мы решаем их, используя упомянутую аналогию с задачей Римана. Сформулируем получающийся результат после введения некоторых обозначений.

Пусть $\alpha = -\text{Ind } a(t)$, $\beta = \text{Ind } b(t)$ (считаем, что на действительной оси, включая бесконечно удаленную точку, $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$). Обозначим r — ранг линейной алгебраической системы (9), записанной впоследствии и возникающей при $\alpha > 0$, $\beta < 0$. Пусть $r = 0$, если неравенства $\alpha > 0$, $\beta < 0$ одновременно не выполняются. Под квадратными корнями и логарифмами понимаются в дальнейшем произвольным образом изначально выбранные и зафиксированные однозначные непрерывные ветви.

Теорема. Решение уравнения (1) содержит $\max(0, \alpha) + \max(0, \beta) - r$ произвольных комплексных постоянных и находится по формуле

$$\varphi(t) = X_+(t)(E_+(t) + P(t)) - Y_*(t)(F_*(t) + Q(t)),$$

где

$$X_+(t) = \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^\alpha \sqrt{\left(\frac{t+i}{t-i} \right)^{2\alpha} \frac{a(-t)}{a(t)} \exp \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\tau+i}{\tau-i} \right) \frac{1}{a(\tau)} \frac{\tau d\tau}{\tau^2 - t^2} \right)},$$

$$E_+(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{f(t)}{a(t)X_+(t)} - \frac{f(-t)}{a(-t)X_+(-t)} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) \tau d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)(\tau^2 - t^2)},$$

$$P(t) \equiv 0 \text{ при } \alpha \leq 0, \quad P(t) = \frac{a_1 + a_2 t^2 + \dots + a_\alpha t^{2\alpha-2}}{(t^2 + 1)^\alpha}$$

при $\alpha > 0$, $a_1, a_2, \dots, a_\alpha$ — комплексные постоянные,

$$Y_*(t) = \frac{\exp \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\tau+i}{\tau-i} \right) (-b(\tau)) \frac{\tau d\tau}{\tau^2 - t^2} \right)}{\sqrt{b(t)b(-t)}},$$

$$F_*(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{f(t)}{Y_+(t)} + \frac{f(-t)}{Y_+(-t)} \right) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a(\tau) + b(\tau))X_+(\tau)(E_+(\tau) + P(\tau))\tau d\tau}{Y_+(\tau)(\tau^2 - t^2)} - \frac{1}{2} \left(\frac{(a(t) + b(t))(E_+(t) + P(t))X_+(t)}{Y_+(t)} + \frac{(a(-t) + b(-t))(E_+(-t) + P(-t))X_+(-t)}{Y_+(-t)} \right),$$

$$Y_+(t) = \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^\beta \sqrt{\left(\frac{t+i}{t-i} \right)^{2\beta} \frac{b(t)}{b(-t)} \exp \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\tau+i}{\tau-i} \right) (-b(\tau)) \frac{\tau d\tau}{\tau^2 - t^2} \right)},$$

$$Q(t) \equiv 0 \text{ при } \beta \leq 0, \quad Q(t) = \frac{b_1 + b_2 t^2 + \dots + b_\beta t^{2\beta-2}}{(t^2 + 1)^\beta}$$

при $\beta > 0$, $b_1, b_2, \dots, b_\beta$ — произвольные комплексные постоянные.

При $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ уравнение (1) разрешимо безусловно. При $\alpha < 0$, $\beta \geq 0$ для его разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) \tau d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)(\tau^2 + 1)^k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\alpha. \quad (7)$$

При $\alpha = 0$, $\beta < 0$ для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2(a(\tau) + b(\tau))E_+(\tau)X_+(\tau) - f(\tau))\tau d\tau}{2Y_+(\tau)(\tau^2 + 1)^k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\beta \quad (8)$$

При $\alpha < 0$, $\beta < 0$ для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение совокупности условий (7), (8). При $\alpha > 0$, $\beta < 0$ разрешимость уравнения (1) равносильна совместности системы

$$\sum_{n=1}^{\alpha} p_{kn} a_n = q_k, \quad k = 1, 2, \dots, -\beta \quad (9)$$

в которой

$$p_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a(\tau) + b(\tau)) X_+(\tau) \tau^{2n-1} d\tau}{Y_+(\tau) (\tau^2 + 1)^{k+\alpha}},$$

$$q_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f(\tau) - 2(a(\tau) + b(\tau)) E_+(\tau) X_+(\tau)) \tau d\tau}{2Y_+(\tau) (\tau^2 + 1)^k}.$$

В последнем случае постоянные $a_1, a_2, \dots, a_{\alpha}$ являются общим решением системы (9). В случае $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ эти постоянные являются произвольными.

По-иному сводится к краевым задачам уравнение (2). Непосредственно проверяется, что его можно записать в виде

$$(P^+ h_1)(t) - (P^- h_2)(t) = f(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

где $h_1(t) = (a(t) + b(t)) \varphi_+(t)$, $h_2(t) = (a(t) - b(t)) \varphi_{**}(t) + 2c(t) \varphi_+(t)$, $\varphi_+(t) = \varphi(t) + \varphi(-t)$, $\varphi_{**}(t) = \varphi(t) - \varphi(-t)$.

Отсюда

$$(a(t) + b(t)) \varphi_+(t) = f_1(t) + \Phi^-(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (10)$$

$$(a(t) - b(t)) \varphi_{**}(t) + 2c(t) \varphi_+(t) = f_2(t) + \Phi^+(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (11)$$

где $f_1(t) = (P^+ f)(t)$, $f_2(t) = (P^- f)(t)$, а $\Phi^-(t)$ и $\Phi^+(t)$ — предельные значения неизвестных функций, аналитических соответственно в нижней и верхней полуплоскостях.

Соотношения (10), (11) — краевые условия двух последовательных краевых задач такого же типа, что и задача (3). Предполагая, что на действительной оси (включая бесконечно удаленную точку) $a(t) \pm b(t) \neq 0$, мы можем решить их и затем найти решение уравнения (2) по формуле

$\varphi(t) = \frac{1}{2} (\varphi_+(t) + \varphi_{**}(t))$. Окончательный результат будет иметь такой же характер, что и для уравнения (1), поэтому мы его не будем приводить, ограничившись примером уравнения (2):

$$\frac{(3i - 2t)\varphi(t) + i\varphi(-t)}{2i - t} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\varphi(\tau) + (3i - 2\tau)\varphi(-\tau)}{(2i - \tau)(\tau - t)} d\tau = \frac{4t}{t^2 + 4}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Здесь $a(t) = \frac{3i - 2t}{2i - t}$, $b(t) = \frac{i}{2i - t}$, $c(t) = 0$. Индексы функций

$a(t) + b(t) = 2$, $a(t) - b(t) = \frac{2(t - i)}{t - 2i}$, от которых зависит картина разрешимости уравнения, равны нулю, что приводит к безусловной разрешимости и единственности решения. Вычисления дают следующее решение примера:

$$\varphi(t) = -\frac{2}{3} \frac{2t^3 + 3it^2 + 8t + 3i}{(t^2 + 1)(t^2 + 4)}.$$

1. Черский Ю. И. // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. № 4. С. 802.

2. Он же // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 12. С. 15.

3. Он же // Сообщения АН ГССР. 1982. Т. 106. № 3. С. 481.

4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.

5. Мельник И. М. // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 100.

Поступила в редакцию 21.05.98.