$\overline{\psi}^*(r,s)=\dfrac{\overline{\varphi}^*(r,s)}{\overline{q}(s)}$, $\overline{q}(s)\neq 0$, $0<r<R, \operatorname{Re} s>0$, приходим к аналогичному интегральному уравнению в области $L$-изображений

$$\overline{\psi}^*(r,s)-\frac{1}{\pi}\int_0^R\overline{\psi}^*(t,s)\overline{K}_2(r,t,s)dt=\frac{2\sqrt{a}}{\pi\lambda s^{3/2}}\sin\left(r\sqrt{s/a}\right),\quad 0<r<R,\ \operatorname{Re} s>0.$$

Решая последнее уравнение разработанным выше методом, находим $\overline{\psi}^*(r,s)$, применяя обратное преобразование Лапласа, находим $\psi^*(r,\tau)$.

Тогда $\varphi^*(r,\tau)=\int\limits_0^\tau q(\tau-\xi)\psi^*(r,\xi)d\xi,\quad 0<r<R,\ \tau>0.$

Заметим, что при $s\to 0$, $\tau\to\infty$ получаем известный стационарный случай [7,8].

Найденные функции $\overline{\varphi}_i(r,s)$ и их оригиналы $\varphi_i(r,\tau)=L^{-1}[\overline{\varphi}_i(r,s)]$ имеют большое практическое значение для различных областей науки и техники при локальном нагреве плоской поверхности тела (полупространства) круговым источником тепла со смешанными разрывными граничными условиями (на поверхности тела в областях $0<r<R$ и $0<r<\infty$). Эти функции получены впервые.

Предельные соотношения для функций-изображений $\overline{\varphi}_1(r,s)=L[\varphi_1(r,\tau)]$ и $\overline{\varphi}_2(r,s)=L[\varphi_2(r,\tau)]$ имеют следующий вид $(0<r<R, \operatorname{Re} s>0, \tau>0)$:

$$\lim_{s\to 0}[s\overline{\varphi}_1(r,s)]\Rightarrow\frac{2}{\pi},\quad \lim_{s\to\infty}[s\overline{\varphi}_1(r,s)]\Rightarrow 0,\quad \lim_{s\to 0}[s\overline{\varphi}_2(r,s)]\Rightarrow\frac{2r}{\pi},\quad \lim_{s\to\infty}[s\overline{\varphi}_2(r,s)]\Rightarrow 0,$$

$$\text{при } f(r,\tau)\Big|_{0<r<R,\tau>0}=1,\quad \frac{q(r,\tau)}{\lambda}\Big|_{0<r<R,\tau>0}=\frac{q_0}{\lambda}=1.$$

Более полное исследование зависимостей $\overline{\varphi}_i(r,\tau)$, $i=1,2$, а также их связь с другими функциями представляют собой актуальную задачу теории новых специальных функций.


1. Абдельразак Н.А. Методы решения двумерных задач нестационарной теплопроводности со смешанными и несмешанными разрывными граничными условиями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 1996.
2. Козлов В.П., Юрчук Н.И., Абдельразак Н.А //Тезисы докладов VII Белорусской математической конференции. Мн., 1996.
3. Козлов В.П., Юрчук Н.И., Мандрик П.А. // ИФЖ, 1998. Т. 71, №4. С.
4. Справочник по специальным функциям /Под ред. М.Абрамовица и И.Стигана. М., 1979.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967.
6. Козлов В.П. Двумерные осесимметричные нестационарные задачи теплопроводности. Мн., 1986.
7. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., 1977.
8. Sntddon I. Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, 1966.



Поступила в редакцию 13.11.98.

УДК 517.938



*В.В.АМЕЛЬКИН, А.Э.МАЛЕВИЧ*


## ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОРБИТ ОБЩИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. I


Some types of motions of general dynamical systems are studied. Dynamically limit set plays an important role in their behavior.


Пусть $X$ – полное метрическое пространство, $T$ – конечномерное вещественное векторное пространство*, а тройка $(f,T,X)$ задает общую динами-

* Ряд утверждений данной статьи справедливы и в том случае, когда $X$ – отделимое топологическое пространство, а $T$ – отделимая коммутативная топологическая группа.

ческую систему. Последнее означает, что в указанной тройке отображение $f\colon T\times X\to X$ непрерывно, $f(0,x)=x$ $\forall x\in X$ и $f(t_1+t_2,x)=f(t_1,f(t_2,x))$ $\forall t_1$, $t_2\in T$ и $\forall x\in X$.

Зафиксируем в пространстве $T$ некоторый фильтр $\mathcal{F}$.

*Определение 1. Динамически $\mathcal{F}$-предельным множеством точки $x\in X$ называется множество*

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)=\bigcap_{F\in\mathcal{F}}\overline{f(F,x)}$$

*точек прикосновения базиса $f(\mathcal{F},x)$ фильтра в $X$, где $\overline{f(F,x)}$ – замыкание $f(F,x)$ и $f(\mathcal{F},x)=\{f(F,x)|\ F\in\mathcal{F}\}$.*

*Любая точка $p\in\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ называется динамически $\mathcal{F}$-предельной точкой точки $x\in X$.*

Из определения 1 следует, что $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ замкнуто и $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)\subset\overline{f(T,x)}$. Кроме того, если фильтр $\mathcal{F}^*$ мажорирует фильтр $\mathcal{F}$, то $\mathcal{D}_{\mathcal{F}^*}(x)\subset\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ $\forall x\in X$.

**Теорема 1** ([1], с.101). Пусть точки $x, p\in X$. Тогда $p\in\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ в том и только в том случае, когда в $T$ существует фильтр $\mathcal{F}^*$, мажорирующий фильтр $\mathcal{F}$, такой что $\lim\limits_{\mathcal{F}^*} f(t,x)=p$.

*Определение 2. Точка $x\in X$ называется $\mathcal{F}$-устойчивой, по Лагранжу, если существует $F_0\in\mathcal{F}$ такое, что $f(F_0,x)$ относительно компактно и называется устойчивой, по Лагранжу (в целом), если относительно компактна орбита $f(T,x)$.*

Заметим, что из устойчивости, по Лагранжу (в целом), следует $\mathcal{F}$-устойчивость, по Лагранжу, для любого фильтра $\mathcal{F}$ в $T$.

**Теорема 2**. Пусть точка $x\in X$ $\mathcal{F}$-устойчива, по Лагранжу. Тогда $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ – непустое компактное множество и $\lim\limits_{\mathcal{F}}\rho(f(t,x),\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x))=0$, где $\rho$ – метрика в пространстве $X$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теорем 3.1 и 3.2 из [2].

В дальнейшем фильтр $\mathcal{F}$ будем считать инвариантным фильтром**.

**Теорема 3**. Пусть $x$ и $t$ – произвольные точки пространств $X$ и $T$ соответственно, а $x_t=f(t,x)$. Тогда:

а) $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ инвариантно и $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x_t)=\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$;

б) если точка $x$ $\mathcal{F}$-устойчива, по Лагранжу, то и точка $x_t$ $\mathcal{F}$-устойчива, по Лагранжу.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 2.1 из [2] (см. также замечание 3.2 [2]).

*Определение 3. Точка $x\in X$ называется $\mathcal{F}$-устойчивой, по Пуассону, если она обладает свойством возвращаемости, т.е. если для любой окрестности $U$ точки $x$ и любого множества $F\in\mathcal{F}$ пересечение $f(F,x)\cap U\neq\varnothing$.*

**Теорема 4**. Для того чтобы точка $x\in X$ была $\mathcal{F}$-устойчивой, по Пуассону, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)\cap f(T,x)\neq\varnothing$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть точка $x\in X$ $\mathcal{F}$-устойчива, по Пуассону. Отсюда следует, что для любой окрестности $U$ точки $x$ и любого множества $F\in\mathcal{F}$ $\overline{f(F,x)}\cap U\neq\varnothing$, а значит, и $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)\cap U=$ $=\bigcap_{F\in\mathcal{F}}\overline{f(F,x)}\cap U\neq\varnothing$. Последнее говорит о том, что $x$ – точка прикосновения множества $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$. Но $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ – множество замкнутое и поэтому $x\in\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$. Отсюда и следует выполнимость условия $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)\cap f(T,x)\neq\varnothing$.

---

** Фильтр $\mathcal{F}$ в $T$ называется *инвариантным*, если любой перенос в группе $T$ переводит фильтр $\mathcal{F}$ в себя.

*Достаточность*. Пусть $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \cap f(T, x) \neq \varnothing$. В силу инвариантности множества $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ справедливо включение $x \in f(T, x) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$, которое означает, что $x$ – точка прикосновения для $f(\mathcal{F}, x)$. А тогда для любого множества $F \in \mathcal{F}$ и любой окрестности $U$ точки $x$ пересечение $f(F, x) \cap U \neq \varnothing$. Отсюда и следует справедливость теоремы.

**Теорема 5**. Пусть $x$ и $t$ – произвольные точки пространств $X$ и $T$ соответственно, а $x_t = f(t,x)$. Тогда если точка $x$ $\mathcal{F}$-устойчива, по Пуассону, то и точка $x_t$ $\mathcal{F}$-устойчива, по Пуассону, и $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) = \overline{f(T,x)}$.

Доказательство. Из $\mathcal{F}$-устойчивости, по Пуассону, точки $x$, в силу теоремы 3, имеем, что $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x_t) \cap f(T, x_t) = \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \cap f(T, x) \neq \varnothing$ и $f(T,x) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \subset \overline{f(T,x)}$. Замечая теперь, что $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ замкнуто, получаем требуемое.

*Определение 4. Точка $x \in X$ называется $\Omega$-периодической, где $\Omega$ – замкнутая тотальная подгруппа аддитивной векторной группы $T$, если*

$$f(t+\omega, x) = f(t, x) \quad \forall t \in T, \ \forall \omega \in \Omega.$$

**Теорема 6**. Пусть точка $x \in X$ $\Omega$-периодична. Тогда она устойчива, по Лагранжу (в целом), $\mathcal{F}$-устойчива, по Пуассону, и $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) = f(T, x)$ для любого инвариантного фильтра $\mathcal{F}$ пространства $T$.

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что фактор-группа $T/\Omega$ компактна, а следовательно, компактна и орбита $f(T, x)$, что влечет устойчивость, по Лагранжу (в целом), точки $x$ и в силу теоремы 5 – равенство $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) = \overline{f(T,x)} = f(T,x)$.

Пусть теперь $\mathrm{A} = \{\alpha = (t,F) \in T \times \mathcal{F} \mid F \in \mathcal{F}, t \in F\}$ – направленное множество с отношением порядка $(t,F) \geq (t_1,F_1)$, если и только если $F \subset F_1$. Проекцию множества $A$ на $T$ назовем направленностью, ассоциированной с фильтром $\mathcal{F}$. Если же $\{t_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ – направленность в множестве $T$, то фильтр с базисом $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, где $F_{\alpha_0} = \{t_\alpha \in T \mid \alpha \geq \alpha_0\}$, называется фильтром, ассоциированным с направленностью $\{t_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$.

*Предложение* 1 (ср. [3], с.112). Пусть фильтр $\mathcal{F}$ ассоциирован с направленностью $\{t_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ или, наоборот, направленность ассоциирована с фильтром. Тогда каждый предел (точка прикосновения) фильтра $\mathcal{F}$ является пределом (предельной точкой) направленности $\{t_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$. Справедливо и обратное утверждение.

*Предложение* 2 (ср. [1], с.102, следствие 1). Пусть $f$: $T \to X$ – отображение множества $T$ в $X$ и $p$ – точка в $X$. Тогда если для каждого ультрафильтра $\mathcal{U}$ в $T$, мажорирующего фильтр $\mathcal{F}$, базис $f(\mathcal{U})$ ультрафильтра в $X$ сходится к $p$, то базис $f(\mathcal{F})$ фильтра в $X$ также сходится к $p$.

Нетрудно убедиться и в справедливости следующего утверждения.

*Предложение* 3. Если направленность $\{t_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset T$, начиная с некоторого места, лежит в любом множестве из $\mathcal{F}$, то фильтр $\mathcal{F}^*$, ассоциированный с данной направленностью, мажорирует $\mathcal{F}$. Если, кроме того, $\mathcal{F}$ – ультрафильтр, то $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$.

Рассмотрим теперь, наряду с общей динамической системой $(f,T,X)$, общую динамическую систему $(g,T,Y)$, где $Y$ – полное метрическое пространство, метрику которого также обозначим через $\rho$, и введем семейства

$$\mathfrak{m}_{xp}(\mathcal{F}) = \left\{ \mathcal{F}^* - \text{фильтр в } T \;\middle|\; \mathcal{F}^* \supset \mathcal{F}, \lim_{\mathcal{F}^*} f(t,x) = p \right\}$$

и

$$\mathfrak{m}_x(\mathcal{F}) = \bigcup_{p \in X} \mathfrak{m}_{xp}(\mathcal{F}), \quad \text{где } x, p \in X.$$

**Теорема 7.** Точка $p \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F}) \neq \varnothing$. При этом $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_x(\mathcal{F}) \neq \varnothing$.

Справедливость данной теоремы становится очевидной, если заметить, что в соответствии с теоремой 1 введенное ранее множество $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ можно определить и так:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) = \left\{ p \in X \,\middle|\, \exists \mathcal{F}^* \supset \mathcal{F},\, \lim_{\mathcal{F}^*} f(t,x) = p \right\}.$$

*Предложение* 4. Пусть $x \in X$, $y \in Y$ и $\mathfrak{M}_y(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_x(\mathcal{F})$. Тогда если $\mathfrak{M}_{yq}(\mathcal{F}) \cap \mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F}) \neq\neq \varnothing$, где $p \in X$, $q \in Y$, то $\mathfrak{M}_{yg(t,q)}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_{xf(t,p)}(\mathcal{F})$ $\forall t \in T$.

Доказательство. Для любого $\mathcal{F}^* \in \mathfrak{M}_{yq}(\mathcal{F})$ и любого $\mathcal{F}^{**} \in \mathfrak{M}_{yq}(\mathcal{F}) \cap \cap \mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F})$ рассмотрим фильтр $\mathcal{F}^{***} = \mathcal{F}^* \cap \mathcal{F}^{**}$. В силу предложения 2, $\mathcal{F}^{***} \in \in \mathfrak{M}_{yq}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_y(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_x(\mathcal{F})$. Следовательно, базис $f(\mathcal{F}^{***},x)$ фильтра в $X$ сходится к своей точке прикосновения $p$. А поскольку $\mathcal{F}^*$ мажорирует $\mathcal{F}^{***}$, то и базис $f(\mathcal{F}^*,x)$ фильтра в $X$ сходится к $p$, т.е. $\mathcal{F}^* \in \mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F})$ и, таким образом, $\mathfrak{M}_{yq}(\mathcal{F}) \cap \mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F})$. Далее, для любого $\mathcal{F}^* \in \mathfrak{M}_{yg(t,q)}(\mathcal{F})$, в силу непрерывности отображений $f$ и $g$ и инвариантности $\mathcal{F}$, фильтр $-t + \mathcal{F}^* \in \mathfrak{M}_{yq}(\mathcal{F}) \cap \mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F})$, а фильтр $\mathcal{F}^* = t + (-t + \mathcal{F}^*) \in \mathfrak{M}_{x,f(t,p)}(\mathcal{F})$ для любого $t \in T$. Последнее и доказывает предложение 4.

*Предложение* 5. Пусть $x \in X$, $y \in Y$ и $\mathfrak{M}_y(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_x(\mathcal{F})$. Тогда существует непрерывное отображение $h : \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y) \to \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$, для которого $h(g(t,q)) = f(t,h(q))$ при $\forall t \in T$ и $\forall q \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y)$.

Доказательство. Для любого $q \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y)$ семейство $\mathfrak{M}_{yq}(\mathcal{F}) \neq \varnothing$ по теореме 1. Поэтому существует $\mathcal{F}^* \in \mathfrak{M}_{yq}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_y(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_x(\mathcal{F})$, а следовательно, существует $h(q) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y)$ точка такая, что $\mathcal{F}^* \in \mathfrak{M}_{xh(q)}(\mathcal{F})$. Согласно предложению 4, $h$ – отображение из $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y)$ в $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$, обладающее свойством $h(g(t,q)) = f(t,h(q))$. Докажем непрерывность отображения $h$. Для этого для произвольной точки $q \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y)$ рассмотрим произвольную направленность $\{q_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y)$, сходящуюся к точке $q$, и покажем, что ее образ $\{p_\alpha = h(q_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ сходится в $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ к точке $p = h(q)$. Действительно, для любого $\alpha \in A$ $\mathfrak{M}_{xp_\alpha}(\mathcal{F}) \supset \mathfrak{M}_{yq_\alpha}(\mathcal{F}) \neq \varnothing$. Обозначим через $\{t_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}_\alpha}$ направленность, ассоциированную с некоторым фильтром из $\mathfrak{M}_{yq_\alpha}(\mathcal{F})$. Тогда $\lim\limits_{\beta \in \mathrm{B}_\alpha} g(t_\beta, y) = q_\alpha$, а $\lim\limits_{\beta \in \mathrm{B}_\alpha} f(t_\beta, x) = p_\alpha$. Рассмотрим направленность $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, где $\Gamma = \mathrm{A} \times \overline{\mathrm{B}} = \mathrm{A} \times \prod\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{B}_\alpha$ – направленное произведение направленных множеств, $\gamma = (\alpha, \overline{\beta})$ (здесь $\alpha \in \mathrm{A}$, $\overline{\beta} \in \overline{\mathrm{B}} = \prod\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{B}_\alpha$ и $t_\gamma = t_{\beta_\alpha}$, где $\beta_\alpha = \mathrm{pr}_{\mathrm{B}_\alpha} \gamma$). По теореме о повторном пределе ([4], с.100) $\lim\limits_{\gamma \in \Gamma} g(t_\gamma, y) = q$. Непосредственно проверяется, что, начиная с некоторого места, направленность $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ лежит в любом множестве из $\mathcal{F}$. Поэтому, в силу предложения 3, фильтр, ассоциированный с направленностью $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, принадлежит семейству $\mathfrak{M}_{yq}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F})$. Следовательно, $\lim\limits_{\gamma \in \Gamma} f(t_\gamma, x) = p$. Итак, имеем произведение $\Gamma = \mathrm{A} \times \overline{\mathrm{B}}$ направленных множеств $\mathrm{A}$ и $\overline{\mathrm{B}}$ и направленность $\{f(t_\gamma, x)\}_{\gamma \in \Gamma} \subset X$. При этом $\lim\limits_{\gamma \in \Gamma} f(t_\gamma, x) = p$, и при любом $\alpha \in \mathrm{A}$ существует частичный предел $\lim\limits_{\overline{\beta} \in \overline{\mathrm{B}}} f(t_{(\alpha, \overline{\beta})}, x) = \lim\limits_{\beta \in \mathrm{B}_\alpha} f(t_\beta, x) = p_\alpha$. По теореме о двойном пределе ([1], с.115) существует $\lim_{\alpha \in A} p_\alpha = p$. Предложение доказано.

1. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М., 1968.
2. Ludescher H. // Analele Universitatii din Timisoara. Ser. stiinte mat. 1978. Vol.16. Fasc.2.
3. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. М., 1979.
4. Келли Дж.Л. Общая топология. М., 1981.

Поступила в редакцию 06.04.98.

УДК 517.968

В.В.КАШЕВСКИЙ

# СИНГУЛЯРНЫЙ ОПЕРАТОР С ЛОГАРИФМОМ В ЯДРЕ И ПРОСТРАНСТВА ГЕЛЬДЕРА

It is proved that the generalized singular operator is bounded from $H_0^\mu$ and $H^{\mu,1}$.

Введем следующий оператор

$$\left(S_{\ln} f\right)(x) = \int_0^1 \frac{f(t)\ln|t-x|}{t-x}\,dt, x \in [0,1]. \qquad (1)$$

Будем считать $f(x) \in H^{m,k}$, если найдется постоянная $c$ такая, что

$$|f(x+h) - f(x)| \le ch^\mu \left(\ln\frac{1}{h}\right)^k, \qquad (2)$$

для всех $x$, $x+h \in [0,1]$, $0 < h < \frac{1}{3}$, $k=0,1$.

Когда $f(0)=f(1)=0$, то пишем $f(x) \in H_0^{\mu,k}$.

Кроме того, пусть $H^{\mu,0} = H^\mu$, $\quad H_0^{\mu,0} = H_0^\mu$.

В работе (1) было получено интегральное представление

$$\left(S_{\ln} f\right)(x) = -\frac{\pi^2}{2} f(x) + \ln(1-x)\int_0^1 \frac{f(t)dt}{t-x} - \int_0^1 \frac{Rf(t)dt}{t-x} + \int_0^1 \left(\ln\frac{t}{1-t}\right)\frac{f(t)dt}{t-x}, \qquad (3)$$

где $\left(Rf\right)(x) = \int_0^x \frac{f(x)-f(t)}{x-t}\,dt.$

**Лемма.** Если $\varphi(t) \in H_0^\mu$, то $\left(\ln\frac{t}{1-t}\right)\varphi(t) \in H_0^{\mu,1}$.

Доказательство. Покажем, что справедлива оценка (2)

$$|\varphi(t+h)\ln(t+h) - \varphi(t)\ln t| \le |\varphi(t+h) - \varphi(t)||\ln(t+h)| +$$
$$+ |\varphi(t)||\ln(t+h) - \ln t| = A_1 + A_2.$$

Вначале оценим

$$A_1 \le ch^\mu \ln\frac{1}{t+h} \le ch^\mu \ln\frac{1}{h}.$$

Теперь оценим $A_2$ при $h>t$

$$A_2 \le ct^\mu \ln\left(1+\frac{h}{t}\right) \le ct^\mu \ln\frac{1}{t} \le ch^\mu \ln\frac{1}{h}.$$

Пусть $h<t$. Тогда

$$A_2 \le ct^\mu \ln\left(1+\frac{h}{t}\right) \le ct^\mu \frac{h}{t} \le ch^\mu \left(\frac{h}{t}\right)^{1-\mu} \le ch^\mu \ln\frac{1}{h}.$$

Собирая оценки, получим