

9. Patel A.R., Patel A.R. // Brit.J.Appl.Phys.(J.Phys.D). 1968. Ser.2. Vol.1. №11. P.1445.
10. Evans T., Sauter D.H. // Phil.Mag. 1961. Vol.6. P.429.
11. Omar M., Kenawi M. // Phil.Mag. 1957. Vol.2. P.859.
12. Технология тонких пленок. М., 1977. Т.2.
13. Pandya N.S, Tolansky S. // Proc.Roy.Soc.A. 1954. Vol.225. P.40.
14. Бокий Г.Б. Безруков Г.Н., Ключев Ю.А. и др. Природные и синтетические алмазы. М., 1986.
15. Vishnevsky A.S. // J.Cryst.Gr. 1975. Vol.29. P.296.
16. Леммлейн Г.Г., Клия М.О., Чернов А.А. // Кристаллография, 1964. Т.9. Вып.2. С.231.
17. Безруков Г.Н., Бутузов В.П., Самойлович М.И. и др. // Зап. Всесоюзного минералогического общества. 1979. Ч.108. №3. С.359.
18. Григорьев О.Н., Волкова Л.М., Якубова С.Я и др. // Металлофизика: Респ. межвед. сб. 1973. Вып.47. С.81.
19. Land A.R. // Proc.Roy.Soc.A. 1963. Vol.278. P.234.
20. Марговицкий В.П. и др. // Кристаллография. 1985. Т.30. Вып.6. С.1203.

Поступила в редакцию 28.01.99.

УДК 621.372.8

*П.Д.КУХАРЧИК, В.М.СЕРДИЮК, И.А.ТИТОВИЦКИЙ*

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ К РАСЧЕТУ ПОЛЕЙ В ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМАХ**

A new version of the theoretical partial-region method for opened resonance and waveguide systems is considered on the example of the volume cylindrical cavity with cross-circular fissure. A possibility to describe these systems with one scalar field function corresponding to *H*- or *E*-polarization is substantiated. Integral expansions by normal modes of opened regions and possibilities of their computer calculation are studied.

Метод частичных областей (или метод сшиваний) [1,2] является одним из наиболее простых и эффективных теоретических инструментов исследования волновых полей в различных волноводных и резонансных системах. Сущность этого метода заключается в том, что вся область распространения поля разбивается на простые подобласти, в каждой из которых можно записать аналитические выражения для собственных решений волновых уравнений в виде независимых свободных колебаний (мод), удовлетворяющих всем необходимым граничным условиям, кроме условий на поверхностях раздела с другими подобластями. Искомое поле возбуждения в каждой такой подобласти представляется в виде разложения по полному набору ее собственных мод с амплитудными коэффициентами, которые определяются из граничных условий на стыках различных подобластей (процедура сшивания).

Обычно этот метод используют для изучения полей в закрытых волноводных и резонансных системах. Тогда все подобласти оказываются пространственно ограниченными (например, это могут быть параллелепипеды, прямоугольники или цилиндры), и их собственные моды (плоские или цилиндрические волны) образуют дискретный спектр [3–5]. Полное поле представляется в виде бесконечной суммы счетного числа слагаемых по данным модам [1,2], члены которой быстро убывают по величине при больших порядках суммирования. Но если система не является закрытой и связана с окружающим бесконечным пространством через щели, то приходится иметь дело с неограниченными подобластями, где собственные моды (те же плоские или цилиндрические волны) образуют непрерывный спектр, и разложение полного поля по ним будет представлять собой уже не сумму, а интеграл по бесконечному интервалу интегрирования [2]. Конечно, при вычислениях на ЭВМ этот интеграл тоже можно приближенно представить

конечной суммой [6], но трудность в том, что ряд из таких частичных сумм очень плохо сходится.

Целью данного исследования является разработка нового варианта метода частичных областей, который обеспечивает эффективную реализацию на ЭВМ алгоритма расчета параметров полей, возбуждаемых в открытых волноводных и резонансных системах. Рассмотрение ведется на примере объемного цилиндрического резонатора с круговой щелью посреди его оси (рис.1); эта резонансная система является основным рабочим элементом новых микроволновых датчиков измерения влажности листовых материалов (бумага, картон, ткань) [7].

Для подобной системы разбиение на подобласти очевидно: в качестве первой следует взять внутреннюю область резонатора, второй – окружающее пространство. Почти всюду их границами являются плоские и цилиндрические металлические поверхности, через которые электромагнитное поле не распространяется, и лишь на щели ( $\rho=a, -d < z < d$ ) может происходить обмен энергией между подобластями. Чтобы упростить решение задачи, предположим, что цилиндрические стенки резонатора продолжают за пределы плоскостей  $z=\pm L$  в бесконечность, т.е. что резонатор представляет собой бесконечный цилиндрический волновод с поперечной щелью и внутренними плоскими перегородками при  $z=\pm L$ . Это позволяет исключить из рассмотрения дифракцию поля на внешних круговых ребрах резонатора, которая играет второстепенную роль по сравнению с основной дифракцией резонаторных мод на щели.

Рассмотрим уравнения, описывающие пространственное распределение поля во всей резонансной системе. Предположим, что в резонаторе возбуждается монохроматическое электромагнитное поле, периодическое по азимутальному углу  $\varphi$  с целым числом  $m$  периодов на  $2\pi$ . Тогда в цилиндрической системе координат  $\rho, \varphi, z$  (см. рис.1) пространственные компоненты электрического и магнитного полей представляются в виде [3–5]:

$$\begin{aligned}
 E_\rho &= \left( -\frac{imk}{\rho}u + \frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial z} \right) \sin m\varphi; & H_\rho &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial z} - \frac{imk}{\rho}v \right) \cos m\varphi; \\
 E_\varphi &= \left( -ik \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos m\varphi; & H_\varphi &= \left( -\frac{m}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} + ik \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \sin m\varphi; \\
 E_z &= -\left( \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} v \right) \sin m\varphi = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k^2 v \right) \sin m\varphi; \\
 H_z &= -\left( \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} u \right) \cos m\varphi = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u \right) \cos m\varphi,
 \end{aligned} \quad (1)$$

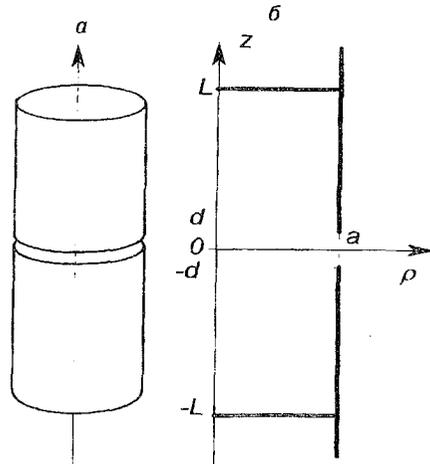


Рис.1. Цилиндрический резонатор с поперечной круговой щелью  $a$ :  
 $a$  – общий вид,  $b$  – разрез по осям цилиндрической системы координат  $\rho$  и  $z$

где временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  опущен,  $k=\omega/c$  – волновое число,  $u$  и  $v$  – независимые комплексные скалярные функции переменных  $\rho$  и  $z$ . Они представляют собой продольные составляющие ( $z$ -компоненты) магнитного и электрического векторов Герца [3–5] и описывают распределение в пространстве  $H$ - и  $E$ -поляризации возбуждаемого поля по отдельности. Каждая из них должна удовлетворять волновому уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{m^2}{\rho^2} u + k^2 u = 0. \quad (2)$$

Волновое уравнение для функции  $v$  запишется аналогично.

Пусть в резонаторе возбуждается  $H$ -мода электромагнитных колебаний. Согласно [8] строгое решение граничной задачи дифракции этой моды на краю проводящего цилиндра требует использования сразу двух полевых функций  $u$  и  $v$ : только таким образом удастся удовлетворить сразу четырем условиям непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного вектора  $E_{\phi,z}$  и  $H_{\phi,z}$  (1) по обе стороны щели и на ее краях  $z=\pm d$ . Однако следует учитывать, что математическая модель идеализирует реальную ситуацию и рассматривает бесконечно тонкие проводники бесконечно большой проводимости [3], а это не может не приводить к различным сингулярностям, которые не наблюдаются на практике. Поэтому представляется естественным вообще исключить из рассмотрения точки краев щели. Тогда можно обойтись одной функцией  $u$ , а  $v$  считать равной нулю во всем пространстве. Действительно, положим на щели

$$\left\{ u_i(\rho, z) - u_e(\rho, z) \right\}_{\rho=a} = 0; \quad \left\{ \frac{\partial u_i(\rho, z)}{\partial \phi} - \frac{\partial u_e(\rho, z)}{\partial \phi} \right\}_{\rho=a} = 0, \quad (3)$$

где  $u_i$  и  $u_e$  – значения функции  $u$  внутри и снаружи резонатора. Эти условия при  $v=0$  обеспечивают выполнимость граничных условий непрерывности  $E_{\phi,z}$  и  $H_{\phi,z}$  (1) на всей щели, кроме ее краев, поскольку соотношения (3) можно дифференцировать по тангенциальной координате  $z$  во всех точках, исключая края  $z=\pm d$ , где производная по  $z$  фактически не определена [1,8]. Подобное приближение, позволяющее ограничиться одной полевой функцией  $u$  или  $v$ , существенно упрощает решение задачи моделирования сложных резонансных и волноводных систем, особенно ее программную реализацию на ЭВМ.

Предположим, что в резонаторе возбуждаются только четные  $H$ -моды. Поскольку исследуемая система совершенно симметрична относительно плоскости  $z=0$ , то и полное поле тогда должно обладать аналогичной симметрией. Поэтому расчет пространственной структуры поля достаточно проводить только для неотрицательных  $z$ .

Собственные моды каждой подобласти представляют собой частные решения волнового уравнения Гельмгольца (2) с граничными условиями, определяющими равенство нулю тангенциальных компонент электрического поля (1) на металлических границах. В резонаторе они представляются произведением радиально зависимых функций Бесселя и синусоидальных функций осевой координаты  $z$  [3–5]. Полное поле, симметричное относительно плоскости  $z=0$  (см. рис. 1), представится в виде разложения:

$$u_i(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_m(\alpha_n \rho) \sin \beta_n (L - z), \quad (4)$$

где  $c_n$  – коэффициенты разложения поля по модам,  $\beta_n = \pi(n+0,5)/L$ ;  $\alpha_n = (k^2 - \beta_n^2)^{1/2}$ ;  $L$  – полувысота резонатора. Во внешней области отсутствуют металлические поверхности, ограничивающие распространение поля по оси  $z$ ,

поэтому здесь постоянная распространения  $\beta$  может принимать любое значение, и спектр мод становится непрерывным:

$$u_e(\rho, z) = \int_0^{+\infty} b(\beta) H_m^{(1)}(\alpha\rho) \cos\beta z d\beta, \quad \alpha = \sqrt{k^2 - \beta^2}, \quad (5)$$

где  $b$  — модовые коэффициенты,  $H_m^{(1)}$  — функция Ханкеля [9].

Представление (5) должно удовлетворять условиям на бесконечности, аналогичным известным условиям излучения [3–5]: при  $\rho \rightarrow \infty$  и при  $z \rightarrow \pm \infty$  величина  $u_e$  (5) и ее координатных производных должна стремиться к нулю. Эти условия выполняются, если амплитуды мод  $b(\beta)$  ограничены по величине для всех  $\beta$ . Действительно, стремление к нулю  $u_e$  (5) при  $\rho \rightarrow \infty$  обеспечивается асимптотикой функций Ханкеля при бесконечно большом значении аргумента [9], а в случае  $z \rightarrow \infty$  малость интеграла  $u_e$  (5) нетрудно доказать с помощью метода стационарной фазы [10].

Рассмотрим граничные условия на цилиндрической поверхности  $\rho=a$ , которые для полей (4), (5) пока не учитывались. На металлической ее части ( $z > d$ ) из условия  $E_\varphi=0$  изнутри и снаружи резонатора получаем:  $(\partial u_i / \partial \rho)_{\rho=a} = (\partial u_e / \partial \rho)_{\rho=a} = 0$ ; на щели должны иметь место равенства (3). Следовательно, производные  $\partial u / \partial \rho$  одинаковы по обе стороны поверхности  $\rho=a$  при всех  $z$ , что дает возможность определить их как новую функцию  $w(z) = (\partial u_i / \partial \rho)_{\rho=a} = (\partial u_e / \partial \rho)_{\rho=a}$ . Вне щели эта функция должна равняться нулю. Через нее можно выразить коэффициенты в разложениях полей (4) и (5), используя соотношения ортогональности для синусоидальных функций [5] на оси  $z$ :

$$c_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{f_n}{\alpha_n J'_m(\alpha_n a)}; \quad f_n = \int_0^d w(z) \sin \beta_m(L-z) dz;$$

$$b(\beta) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{f(\beta)}{\alpha H_m^{(1)}(\alpha a)}; \quad f(\beta) = \int_0^d w(z) \cos \beta z dz, \quad (6)$$

где штрих обозначает производную функции Бесселя или Ханкеля по своему аргументу  $\alpha a$ .

Остается удовлетворить первое условие (3) на щели, для чего следует подставить выражения (6) в (4), (5) и приравнять их при  $\rho=a$ ,  $0 \leq z < d$ . Полученное соотношение можно рассматривать как интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $w(z)$  и частоты  $\omega$  (волнового числа  $k$ ). Но есть более простой вариант дальнейшего решения по методу частичных областей, который исходит из дополнительного предположения, что функция  $w(z)$  известна [1]. Тогда с учетом формул (4)–(6) первое условие (3) становится уравнением для одной величины  $k$  при разных  $z$  ( $0 \leq z < d$ ). Усредним его по всем значениям  $z$  с весовой функцией  $w(z)$ , т.е. проинтегрируем по всем  $z$ , предварительно умножив на нее обе части уравнения:

$$\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{J_m(\alpha_n a)}{\alpha_n J'_m(\alpha_n a)} f_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{H_m^{(1)}(\alpha a)}{\alpha H_m^{(1)}(\alpha a)} f^2(\beta) d\beta. \quad (7)$$

Введение весовой функции здесь эквивалентно требованию более точного выполнения первого условия (3) для точек  $z$  с большим значением функции  $w(z)$  на щели, чем для точек с относительно малым ее значением.

Для выбора функции  $w(z)$  имеются следующие соображения. Во-первых, вследствие симметрии резонансной системы относительно плоскости  $z=0$  необходимо потребовать, чтобы производная данной функции была равна нулю при  $z=0$ . Во-вторых, известно [8], что при дифракции цилиндрических мод на краю металлического цилиндра функция поля  $u$  и ее нормальная

производная непрерывны вблизи него. Одной из простейших функций, удовлетворяющих этим условиям, является функция

$$w(z) = \begin{cases} \cos \tau z, & \tau = \pi / 2d \text{ при } 0 \leq z \leq d \\ 0 & \text{при } z > d \end{cases}$$

Для нее

$$f_n = \frac{(-1)^n \tau \cos \beta_n d}{\tau^2 - \beta_n^2}; \quad f(\beta) = \frac{\tau \cos \beta d}{\tau^2 - \beta^2}, \quad (8)$$

причем  $f(\beta) \rightarrow d/2$  при  $\beta \rightarrow \tau$ .

При реализации описанной процедуры решения на ЭВМ нужно ограничить число слагаемых, входящих в разложения по собственным модам частичных областей задачи. Чтобы определить корректную процедуру ограничения числа членов интегральной суммы в правой части (7), предположим, что берется конечное их число с максимальным значением  $\beta = B$ , и рассмотрим остаточный член данной суммы, представляемый интегралом по  $\beta$  от  $B$  до  $+\infty$ . Пусть  $B$  — достаточно большое значение, чтобы для всех  $\beta \geq B$  можно было использовать асимптотическое выражение для функции Ханкеля при больших по модулю значениях аргумента [9]. Тогда  $\alpha \sim i\beta$ ;  $H_m^{(1)}(\alpha a) / H_m^{(1)}(\alpha a) \sim -i$ ;  $f(\beta) \sim -\tau \cos \beta d / \beta^2$ , что позволяет вычислить интеграл остаточного члена, который будет равен:

$$I \approx -\frac{\tau^2 d}{12B^3} \left( \sin 2Bd + \frac{3}{B} \sin^2 Bd - \frac{3}{B^2 d} \sin 2Bd + \dots \right). \quad (9)$$

Если положить  $B = \pi N/d$  ( $N$  — большое целое число), то остаточный член  $I$  обратится в нуль. Таким образом, суммирование рядов, аппроксимирующих интеграл (7) по непрерывному спектру вне резонатора, следует заканчивать на величине  $\beta = B$ , дающей значение  $\beta d$ , кратное  $\pi$ , и чем больше эта величина, тем точнее аппроксимация. Такое же выражение (9) получается и в декартовой системе координат, если рассматривается не цилиндрический, а прямоугольный резонатор с поперечной щелью, поэтому и для него максимальное значение  $\beta d$  при вычислении интегральных сумм тоже следует полагать кратным  $\pi$ .

В расчетах на ЭВМ достаточно ограничиться значением  $Bd$ , равным  $5\pi$ ; тогда адекватное приближение интеграла получается, если взять примерно 600–700 членов ряда по  $\beta$ , т.е. если интервал от 0 до  $\beta = 5\pi/d$  разделить примерно на 600–700 элементарных отрезков интегрирования, на каждом из которых интеграл вычисляется по формуле трапеций [6]. Для сравнения укажем, что аналогичная точность у ряда по дискретному набору мод внутри резонатора получится, если ограничиться в 4 раза меньшим числом суммируемых членов.

Таким путем можно вычислить резонансную частоту, а затем, по формулам (4)–(6), (8), и поле  $u$  во всем пространстве. Компоненты электрического и магнитного полей могут быть рассчитаны с помощью формул (1). Тем самым описанная методика позволяет полностью решить задачу расчета электродинамических параметров поля и его пространственной структуры во всех точках.

В качестве примера приведем рассчитанные по этой методике картины пространственного распределения величины функции  $u$  (4), (5) и модуля электрического поля  $|E| = (|E_\rho|^2 + |E_\phi|^2)^{1/2}$  внутри и вне цилиндрического резонатора, представленные на рис. 2 и 3 для частного случая, когда  $a = 2,9$  см,  $L = 17,6$  см,  $d = 0,5$  см,  $m = 1$ . В отсутствие щели при этом будет возбуждаться

резонансная мода  $H_{115}$  с частотой 3,705 ГГц (длина волны 8,097 см), со щелью частота резонансного возбуждения становится равной 3,833 ГГц. Из рис.2 и 3 видно, что в основном объеме резонатора структура поля оказывается такой же, как и в резонаторе без щели [3,4], и лишь вблизи последней ее влияние на структуру поля становится заметным.

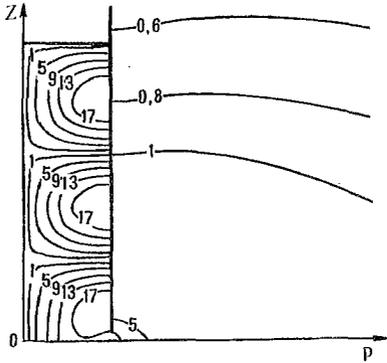


Рис.2. Линии уровня величины функции  $u$  внутри и вне цилиндрического резонатора со щелью

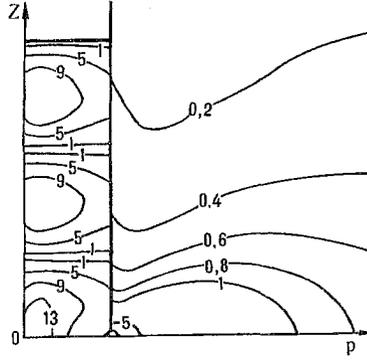


Рис.3. Линии уровня величины электрического поля  $|E|$  внутри и вне цилиндрического резонатора со щелью

В заключение следует отметить, что реальная структура возбуждаемого поля должна несколько отличаться от той, которая получается по описанному выше методу. Дело в том, что при щтыревом или щелевом возбуждении реальных резонаторов [3,4] исходное возбуждающее поле будет содержать помимо основной резонансной цилиндрической моды множество других, нерезонансных пространственных компонент, которые будут вносить определенный вклад в полное поле внутри резонатора. Поэтому данная методика определяет, строго говоря, пространственную структуру не всего поля возбуждения, а только основной резонансной моды, и ее искажения, вызываемые утечкой электромагнитной энергии через щель.

1. Григорьев А. Д., Янкевич В. Б. Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. Численные методы расчета и проектирования. М., 1984.
2. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М., 1974.
3. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М., 1988.
4. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн. М., 1978.
5. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л., 1967.
6. Калиткин Н. Н. Численные методы. М., 1978.
7. Kuharchik P. D., Titovitsky I. A., Belyachits A. Ch., Kourilo N. I. // Summaries of the contributions... on "Electromagnetic Wave Interaction with Water and Moist Substances". San Francisco, California, June 17, 1996. P.135.
8. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М., 1966.
9. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М., 1979.
10. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М., 1987.

Поступила в редакцию 11.03.99.

УДК 621.396.67

Н.А.ВОЛЫНЕЦ, В.И.ДЕМИДЧИК

### ОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СЕТЧАТОГО ЭКРАНА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

The calculation method of electrodynamic characteristics of a half-wave symmetric dipole arranged above a grid screen is examined. This method is based on the solution of Pocklington's integral equation. The demonstrated results of analysis allow to evaluate properties of the grid screen depending on the size grid cell, the thickness conductor and the distance between dipole and the screen.