

имеет решение.

Согласно [12], при $L \geq H(h-1)$ функция $f(L) = L - \max_{i=1}^m k_i x_i$ является периодической и невязка $L_R = f(L) = L \pmod{k}$.

Аналогично можно рассмотреть периодичность величины невязки W_R по ширине W . Таким образом, величина отходов при решении задачи Z равна $LW \pmod{k}$. Данное свойство позволяет при больших L и W определить величину потерь без нахождения решения.

Найденное свойство задачи о раскрое позволяет полностью перенести все алгоритмы решения задачи о рюкзаке на рассматриваемую задачу без существенного увеличения сложности построения решения.

1. Чебышев П. Л. // Успехи мат. наук. 1946. Т. 1. Вып. 2. С. 38.
2. Duckyhoff H. // European Journal of Operational Research. 1990. Vol. 44. P. 145.
3. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. Л., 1939.
4. Martello S., Toth P. Knapsack problem. Algorithms and computer implementations. New York, 1990.
5. Тарновский А. Г. // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1992. № 3. С. 37.
6. Tarnowski A. G. Exact polynomial time algorithm for quillotine cutting stock problem with two rectangles. Magdeburg, 1993.
7. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев, 1986.
8. Мухачева Е. А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Применение САПР. М., 1984.
9. Wang P. Y. // Operations Research. 1983. Vol. 31. № 3. P. 573.
10. Метельский Н. Н., Азаренок А. С., Крикун В. С. // Проектирование вычислительных средств: Тез. докл. всесоюз. конф. Каунас, 1989. С. 202.
11. Метельский Н. Н., Крикун В. С. Метод иерархического размещения изотетических блоков / АН БССР. Ин-т математики. Мн., 1990. Препринт № 27(247).
12. Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. М., 1995.

Поступила в редакцию 06.03.98.

УДК 517.925

П. П. ВЕРЕСОВИЧ

СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ, ПРЕОБРАЗУЮЩЕЙ ОКРУЖНОСТИ В ОКРУЖНОСТИ

Necessary and sufficient conditions for a nonlinear differential system to have a linear reflection function of Mironenko V. (and therefore a linear map of Poincare) was given. Using this conditions a sufficient conditions for the existence and stability of periodic solutions was establish.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = \alpha_1(t)x + \alpha_2(t)y + P(t, x, y), \quad \dot{y} = \beta_1(t)x + \beta_2(t)y + Q(t, x, y), \quad (1)$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью, в которой функции $P(t, x, y)$, $Q(t, x, y)$ обладают свойством

$$\frac{\partial P(t, 0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial P(t, 0, 0)}{\partial y} = \frac{\partial Q(t, 0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t, 0, 0)}{\partial y} \equiv 0.$$

Пусть система (1) имеет линейную отражающую функцию (ОФ). Найдем условия, при выполнении которых

$$x^2(-t) + y^2(-t) \equiv r^2(t)(x^2(t) + y^2(t)). \quad (2)$$

Теорема 1. Система (1) имеет линейную ОФ и для каждого ее решения выполняется соотношение (2) тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$(\beta_2 - \overline{\beta_2} - (\alpha_1 - \overline{\alpha_1})) \sin \varphi \equiv (\alpha_2 + \overline{\alpha_2} + \beta_1 + \overline{\beta_1}) \cos \varphi, \quad (3)$$

$$(\alpha_1 - \beta_2)^2 - (\overline{\alpha_1} - \overline{\beta_2})^2 + (\alpha_2 + \beta_1)^2 - (\overline{\alpha_2} + \overline{\beta_1})^2 \equiv 0, \quad (4)$$

$$r(P(t, x, y) \cos \varphi - Q(t, x, y) \sin \varphi) + P(-t, r(x \cos \varphi - y \sin \varphi), r(x \sin \varphi + y \cos \varphi)) \equiv 0, \quad (5)$$

$$r(P(t, x, y) \sin \varphi + Q(t, x, y) \cos \varphi) + Q(-t, r(x \cos \varphi - y \sin \varphi), r(x \sin \varphi + y \cos \varphi)) \equiv 0, \quad (6)$$

$$\text{где } r(t) := \exp\left(-0,5 \int_{-t}^t (\alpha_1(\tau) + \beta_2(\tau)) d\tau\right), \quad \varphi(t) := 0,5 \int_0^t (\alpha_2(\tau) + \alpha_2(-\tau) - \beta_1(\tau) - \beta_1(-\tau)) d\tau.$$

При этом отражающая матрица (ОМ) $F(t)$ имеет элементы

$$F_{11} = r \cos \varphi, \quad F_{12} = r \sin \varphi, \quad F_{21} = r \sin \varphi, \quad F_{22} = r \cos \varphi. \quad (7)$$

▷ Как следует из основного соотношения для ОФ [1, с.11], если ОФ системы $\dot{x} = X(t, x)$ линейна, то она является и ОФ линейной системы

$$\dot{x} = \frac{\partial X(t, 0)}{\partial x} x = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: P(t)x,$$

причем ОМ $F(t)$ этой системы удовлетворяет тождеству

$$\dot{F}(t) + F(t)P(t) + P(-t)F(t) \equiv 0, \quad F(0) = E. \quad (8)$$

По определению ОФ [1, с.11], $F(t, x) \equiv x(-t)$, а значит, условие (2) эквивалентно условию

$$(F_{11}x + F_{12}y)^2 + (F_{21}x + F_{22}y)^2 = r^2(x^2 + y^2),$$

которое равносильно выполнению системы условий

$$F_{11}^2 + F_{21}^2 = r^2, \quad F_{12}^2 + F_{22}^2 = r^2, \quad F_{11}F_{12} + F_{21}F_{22} = 0. \quad (9)$$

Положив в первых двух равенствах (9) $F_{11} = r \cos \varphi$, $F_{21} = r \sin \varphi$, $F_{12} = r \sin \varphi$, $F_{22} = r \cos \varphi$ и подставив их в третье из этих равенств, приходим к выводу, что $\psi = -\varphi$ и, следовательно, элементы ОМ $F(t)$ определяются равенствами (7).

Так как [1, с.30] для линейной системы $\dot{F}(t) = X(-t)X^{-1}(t)$, где $X(t)$ — фундаментальная матрица решений этой системы, нормированная в точке $t=0$, то, используя формулу Остроградского—Лиувилля, получим

$$\det F(t) = F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21} = r^2 = e^{-\int_{-t}^t (\alpha_1(\tau) + \beta_2(\tau)) d\tau}. \quad \text{Отсюда } r(t) = e^{-\frac{1}{2} \int_{-t}^t (\alpha_1(\tau) + \beta_2(\tau)) d\tau}.$$

Нечетность функции $\varphi(t)$ следует из соотношения $F(-t)F(t) = F(0) = E$ [1, с.30].

Для определения этой функции воспользуемся системой тождеств, эквивалентных тождеству (8). С учетом $\dot{r}(t) = -\frac{1}{2}(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 - \beta_2 - \bar{\beta}_2)r(t)$ из (8) получим

$$2(-\dot{\varphi} - \beta_1 + \bar{\alpha}_2) \sin \varphi + (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 - \beta_2 - \bar{\beta}_2) \cos \varphi \equiv 0, \quad (10)$$

$$2(\dot{\varphi} - \bar{\beta}_1 + \alpha_2) \sin \varphi + (-\alpha_1 - \bar{\alpha}_1 + \beta_2 + \bar{\beta}_2) \cos \varphi \equiv 0, \quad (11)$$

$$2(-\dot{\varphi} + \alpha_2 + \bar{\alpha}_2) \cos \varphi + (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1 - \beta_2 + \bar{\beta}_2) \sin \varphi \equiv 0, \quad (12)$$

$$2(\dot{\varphi} + \beta_1 + \bar{\beta}_1) \cos \varphi + (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1 - \beta_2 + \bar{\beta}_2) \sin \varphi \equiv 0, \quad (13)$$

где $\bar{\alpha}_i := \alpha_i(-t)$, $\bar{\beta}_i := \beta_i(-t)$ ($i=1,2$).

Из (12), (13) получаем $(-2\dot{\varphi} + \alpha_2 + \bar{\alpha}_2 - \beta_1 - \bar{\beta}_1) \cos \varphi$, и так как $\cos \varphi$ не обращается в нуль тождественно ($\cos \varphi(0)=1$), то $\dot{\varphi} = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \bar{\alpha}_2 - \beta_1 - \bar{\beta}_1)$.

Учитывая нечетность функции $\varphi(t)$, находим $\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_{-t}^t (\alpha_2 - \beta_1) d\tau$.

Исключая $\dot{\varphi}$ из (13), получим (3), а подстановка $\varphi(t)$ в (10) и (11) дает

$$(\beta_1 - \bar{\beta}_1 + \alpha_2 - \bar{\alpha}_2) \sin \varphi + (\beta_2 + \bar{\beta}_2 - \alpha_1 - \bar{\alpha}_1) \cos \varphi \equiv 0. \quad (14)$$

Так как $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ не обращаются в нуль одновременно, то, считая (3) и (14) системой с неизвестными $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, приходим к тождеству (4). Учет в основном соотношении [1, с.11] структуры правых частей системы (1) и элементов ОМ $F(t)$ линейной ОФ этой системы приводит к тождествам (5), (6), что и завершает доказательство теоремы. ◁

Перейдем теперь к изучению вопроса о наличии и устойчивости периодических решений системы (1), в предположении ее 2ω -периодичности.

Положим $\mu(t) = \int_{-t}^t (\alpha_1 + \beta_2) d\tau$. Справедлива

Теорема 2. Пусть для 2ω -периодической системы (1) выполняются условия теоремы 1. Тогда если $\mu(\omega) \neq 0$ или $\mu(\omega) = 0$ и $\varphi(\omega) \neq 2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$), то система (1) имеет единственное 2ω -периодическое решение, асимптотически устойчивое при $\mu(\omega) < 0$, устойчивое при $\mu(\omega) = 0$ и неустойчивое при $\mu(\omega) > 0$. Кроме того, при $\mu(\omega) = 0$ и $\varphi(k\omega) = 2m\pi$ все решения этой системы $2k\omega$ -периодические.

▷ Как известно [1, с. 12], если $F(t, x)$ есть ОФ некоторой дифференциальной периодической системы, то отображение Пуанкаре (отображение за период $[-\omega, \omega]$) этой системы можно найти по формуле $T(x) = F(-\omega, x)$, а начальные данные 2ω -периодических решений определяются уравнением $F(-\omega, x) = x$.

В нашем случае система для определения начальных данных 2ω -периодических решений имеет вид

$$x(r \cos \varphi - 1) + y r \sin \varphi = 0, \quad -x r \sin \varphi + y r (\cos \varphi - 1) = 0, \quad (15)$$

где $r = r(-\omega) = e^{0,5\mu(\omega)}$, $\varphi = \varphi(\omega)$. Определитель системы (15) $D = (r - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi$. Очевидно, что $D = 0$ лишь в случае $\mu(\omega) = 0$ и $\cos \varphi = 1$. Это означает, что во всех остальных случаях решение $(x(t; -\omega, 0), y(t; -\omega, 0))^T$ является единственным 2ω -периодическим решением системы (1). Устойчивость и неустойчивость этого решения следует из оценки

$$\|x(\omega)\|^2 = \|F(-\omega)x\|^2 = (x r \cos \varphi + y r \sin \varphi)^2 + (-x r \sin \varphi + y r \cos \varphi)^2 = r^2(-\omega) \|x(-\omega)\|^2$$

Рассмотрим теперь случай $\mu(\omega) = 0$ и $\varphi(k\omega) = 2m\pi$. Начальные данные $2k\omega$ -периодических решений определяются из системы вида (15), в которой $r = r(-k\omega) = 1$, $\varphi(k\omega) = 2m\pi$. Функция $\varphi(t)$ всегда может быть представлена в

виде $\varphi(t) = At + f(t)$, где $A = \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} (\alpha_2 - \beta_1) d\tau$, а $f(t)$ есть функция 2ω -

периодическая, нечетная и, следовательно, $f(\omega) = 0$. Из равенства $\varphi(k\omega) = 2m\pi$ следует, что для существования $2k\omega$ -периодических решений должно быть

$$\int_{-\omega}^{\omega} (\alpha_2 - \beta_1) d\tau = \frac{4m\pi}{k}. \text{ При выполнении этого условия все решения системы (1)}$$

$2k\omega$ -периодические. ◁

Теорема 2 иллюстрируется следующими примерами:

Пример 1. Система

$$\dot{x} = x \sin t + y + \sin 2t(1 + x^2 + y^2),$$

$$\dot{y} = -x + y \sin t + (\cos 2t - 1)(1 + x^2 + y^2)$$

имеет линейную ОФ, элементы ОМ которой определяются равенствами (7) с $r(t) \equiv 0$, $\varphi(t) = 2t$. Все решения этой системы 2π -периодические.

Пример 2. Элементы ОМ линейной ОФ дифференциальной системы

$$\dot{x} = x \sin 2t + y + 2 \sin^2 2t + \sin 4t(x^2 + y^2),$$

$$\dot{y} = -x + y \sin 2t + \sin 4t + 2 \sin 2t + (1 + \cos 4t - 2 \cos 2t)(x^2 + y^2)$$

также определяются равенствами (7) с $r(t) \equiv 1$, $\varphi(t) = 2t$, но она имеет только одно устойчивое π -периодическое решение. Все остальные решения этой системы 2π -периодические.

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986.

Поступила в редакцию 04.05.98.