

## ЗАДАЧА РАСКРОЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ЛИСТА НА ДЕТАЛИ ЕДИНИЧНОЙ ШИРИНЫ

Cutting and packing problems appears as application both in industry, transport, manufacture, as in ensemble of domains of mathematics, physics, biology. In this article we consider a guillotine cutting problem of separating of rectangle sheet to strips that can be rotated over right angle. We don't take into account the assortment of the details. The main result is that the problem is reduced by algorithm of linear complexity to two knapsack problems.

**1. Введение.** Задачи о размещении геометрических фигур на плоскости или в пространстве известны достаточно давно. По-видимому, первое упоминание о них встречается в 1878 г. в работе П.Л.Чебышева [1]. Среди множества задач такого рода выделяют задачи об упаковке (задачи негилиотинного раскроя) и задачи раскроя прямоугольных фигур в прямоугольных областях [2]. Под двумерным гильотинным раскроем понимается такое размещение деталей на текущем листе материала, когда существует вертикальный или горизонтальный отрезок, разделяющий этот лист на два прямоугольника. Задача двумерного гильотинного раскроя изучается примерно с 1939 г. [3]. В общем случае она *NP*-трудная [4] и эффективный алгоритм ее решения до сих пор не найден. Поэтому возникает необходимость рассмотрения ее частных случаев. Значительным достижением было построение А.Г.Тарновским в 1992 г. полиномиального алгоритма для задачи двумерного гильотинного неориентированного раскроя с двумя деталями [5,6]. В работе Г.Дихоффа [2] приведена подробная классификация задач упаковки и раскроя. Предложены несколько эвристических алгоритмов решения таких задач [7–9]. Обобщение задач раскроя для областей со специальным определением выпуклости (изотетических областей) разрабатывается Н.Н.Метельским [10,11]. Задачи раскроя полубесконечной полосы рассматриваются в работах Ю.Г.Стояна [7].

В данной статье рассматривается частный случай задачи двумерного гильотинного раскроя, для которой найдено свойство, позволяющее построить достаточно простой точный алгоритм. Он состоит в приведении исходной задачи к задаче о рюкзаке.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим следующую задачу раскроя. Необходимо из листа с размерами  $L \times W$ , где  $L$  — длина и  $W$  — ширина листа, выкроить набор заданных  $m$  деталей с размерами  $1 \times k_i$ ,  $i=1,2,\dots,m$ , минимизировав при этом неиспользуемую площадь. Разрешается поворот деталей на прямой угол. Все размеры будем считать целыми. Обозначим задачу через  $Z$ . Можно сформулировать аналитическую модель задачи, но она не будет использоваться в дальнейшем, поэтому опустим ее.

Согласно классификации, приведенной в [2], рассматриваемая задача принадлежит классу  $2/V/O/R$ .

**3. Основной результат.** Всякое размещение деталей на листе, удовлетворяющее требованиям гильотинного раскроя, будем называть шаблоном.

Обозначим  $\Phi(L, W)$ , множество всевозможных шаблонов на листе с размерами  $L \times W$ .

Отметим одно свойство множества  $\Phi(L, W)$ , прямо вытекающее из определения гильотинного раскроя:

$$\exists a \in N, a < L, \Phi(L, W) = \Phi(L-a, W) \times \Phi(a, W)$$

или

$$\exists a \in N, a < W, \Phi(L, W) = \Phi(L, W-a) \times \Phi(L, a),$$

т.е. при построении шаблона лист разрезается вертикально или горизонтально. Здесь знак декартова произведения применяется в его обычном смысле: план раскроя большого листа составляется из планов раскроя его двух прямоугольных частей.

Для рассматриваемой задачи имеет место более сильное свойство. А именно: в любом шаблоне существует вертикальный или горизонтальный разрез, по которому от шаблона отрезается вертикальная или горизонтальная полоса ширины 1.

**Теорема 1.**  $\forall p(L, W) \in \Phi(L, W), \quad p(L, W) = p(L-1, W) + p(1, W) \quad \text{или}$   
 $p(L, W) = p(L, W-1) + p(L, 1).$

Доказательство будем проводить индукцией по  $L$  и по  $W$ .

Положим  $L=1$ . Очевидно, что в этом случае утверждение теоремы справедливо, исходный шаблон имеет ширину 1.

Пусть  $L=k$ . Для  $W=1$  утверждение теоремы имеет место, так как шаблон имеет ширину 1, предположение индукции выполняется.

Пусть  $W=h$ . Так как шаблон  $p(k, h)$  удовлетворяет требованиям гильотинного раскроя, то

$\exists x \in N, x < k, p(k, h) = p(k-x, h) + p(x, h)$  либо  $\exists y \in N, y < h, p(k, h) = p(k, h-y) + p(k, y)$ , т.е. в шаблоне  $p(k, h)$  существует горизонтальный или вертикальный разрез. Рассмотрим всевозможные варианты раскроя шаблона  $p(k, h)$  с учетом того, что в силу предположения индукции для любых его прямоугольных частей справедливо утверждение теоремы.

А) Имеем горизонтальный разрез, т.е.  $\exists y \in N, y < h, p(k, h) = p(k, h-y) + p(k, y)$ . В этом случае либо хотя бы один из шаблонов  $p(k, h-y)$  или  $p(k, y)$  имеет горизонтальный разрез с отрезаемой полосой шириной в 1 и справедливость утверждения теоремы очевидна (рис.1), либо оба рассматриваемых шаблона имеют вертикальные разрезы с отрезаемыми полосами шириной в 1. Тогда либо  $p(k, h) = p(k, h-1) + p(k, 1)$  (рис.2), либо этого можно добиться зеркальным отражением разреза (рис.3). Таким образом, в случае горизонтального разреза утверждение теоремы доказано.

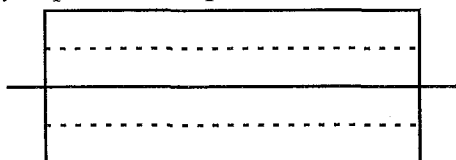


Рис.1

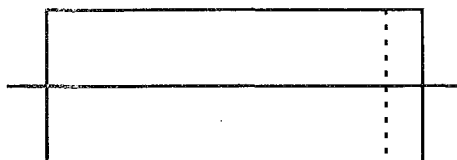


Рис.2

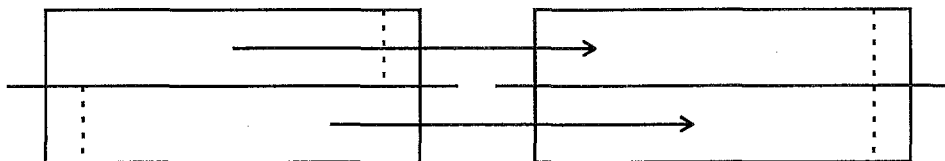


Рис.3

Б) Имеем вертикальный разрез. Аналогично предыдущему случаю рассмотрим вариант, при котором  $p(k, h)$  имеет вертикальный разрез. Тогда в силу предположения индукции хотя бы один из шаблонов  $p(k-x, h)$  или  $p(x, h)$  имеет вертикальный разрез с отрезаемой полосой единичной ширины и справедливость утверждения теоремы очевидна (рис.4), или оба рассматриваемых шаблона имеют горизонтальные разрезы с отрезаемыми полосами шириной 1. В этом случае либо  $p(k, h) = p(k-1, h) + p(1, h)$  (рис.5), либо этого можно добиться зеркальным отражением разреза (рис.6). Следовательно, утверждение теоремы справедливо и в случае вертикального разреза.

Теорема доказана полностью.

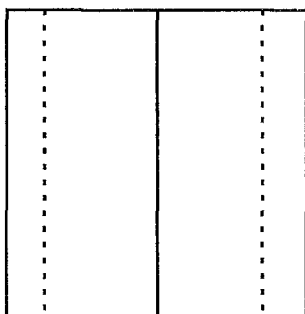


Рис.4

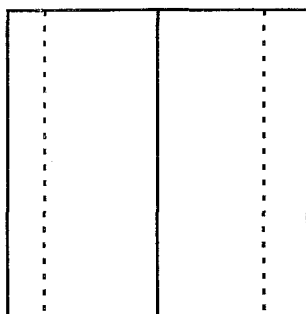


Рис.5

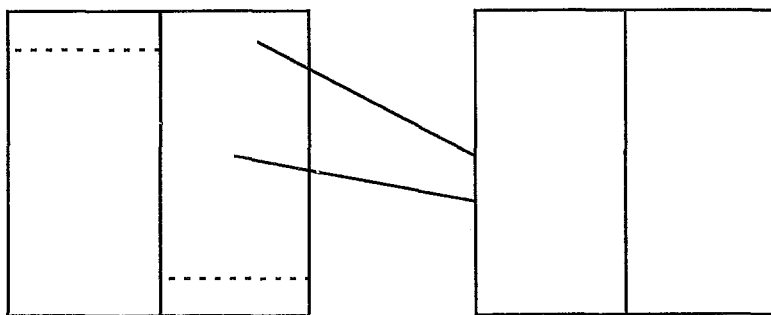


Рис.6

Эта теорема позволяет предложить простой алгоритм приведения рассматриваемой задачи к двум задачам о рюкзаке.

По теореме 1, существует горизонтальный или вертикальный гильотинный разрез исходного листа, который дает оптимальное решение задачи. Вначале решим задачу о рюкзаке с правой частью, равной  $L$  (задача  $P1$ ):

$$\max \sum_{i=1}^m k_i x_i,$$

$$\sum_{i=1}^m k_i x_i \leq L, \quad x_i \geq 0, \quad x_i - \text{целые}.$$

Если невязка  $L_R = 0$ , то оптимальное решение получается  $W-1$  горизонтальными гильотинными разрезами. Если невязка  $L_R > 0$ , то для исходного листа решим задачу о рюкзаке для разреза по ширине, т.е. задачу о рюкзаке с правой частью, равной  $W$  (задача  $P2$ ):

$$\max \sum_{i=1}^m k_i x_i,$$

$$\sum_{i=1}^m k_i x_i \leq W, \quad x_i \geq 0, \quad x_i - \text{целые}.$$

Аналогично, если невязка  $W_R = 0$ , то оптимальное решение получается  $L-1$  вертикальными гильотинными разрезами. В противном случае оптимальное решение получается сразу комбинированием решений задач  $P1$  и  $P2$ . Из теоремы следует, что секция с длиной и шириной  $L_R$  и  $W_R$  соответственно является полностью отходной. Действительно, оптимальный раскрой получается последовательным отрезанием полос ширины 1, а для полосы по длине с правой частью  $L_0$ , где  $L - L_R \leq L_0 \leq L$ , решение задачи о рюкзаке будет совпадать с решением задачи  $P1$ . Аналогично для задачи по ширине с правой частью  $W_0$ , где  $W - W_R \leq W_0 \leq W$ , решение задачи о рюкзаке будет совпадать с решением задачи  $P2$ . После отрезания  $W_R$  полос по длине и  $L_R$  полос по ширине оставшийся лист размером  $(L - L_R) \times (W - W_R)$  раскраивается без потерь либо горизонтальным, либо вертикальным разрезами соответственно с решением задачи  $P1$  или  $P2$ . Таким образом, доказана следующая

**Теорема 2.** Потери при оптимальном решении задачи  $Z$  представляют собой прямоугольник со сторонами  $L_R \times W_R$ , где  $L_R$  и  $W_R$  — невязки оптимальных решений задач о рюкзаке  $P1$  и  $P2$  соответственно.

Таким образом, решение задачи о раскрое с деталями ширины 1 полностью приводится к решению двух задач о рюкзаке, и сложность решения задачи  $Z$  определяется сложностью решения задачи о рюкзаке.

Отметим, что величина отходов при решении задачи  $Z$  обладает периодичностью по  $L$  и  $W$ . Обозначим  $k = \text{НОД}(k_1, \dots, k_m)$ ,  $H = \max k_i$ ,  $h = \min k_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Как показано в [12], имеет место

**Теорема 3.** Если  $L$  делится на  $k$  и  $L \geq H(h-1)$ , то уравнение

$$\sum_{i=1}^m k_i x_i \leq L, \quad x_i \geq 0, \quad x_i - \text{целые},$$

имеет решение.

Согласно [12], при  $L \geq H(h-1)$  функция  $f(L) = L - \max_{i=1}^m k_i x_i$  является периодической и невязка  $L_R = f(L) = L \pmod{k}$ .

Аналогично можно рассмотреть периодичность величины невязки  $W_R$  по ширине  $W$ . Таким образом, величина отходов при решении задачи  $Z$  равна  $LW \pmod{k}$ . Данное свойство позволяет при больших  $L$  и  $W$  определить величину потерь без нахождения решения.

Найденное свойство задачи о раскрое позволяет полностью перенести все алгоритмы решения задачи о рюкзаке на рассматриваемую задачу без существенного увеличения сложности построения решения.

1. Чебышев П. Л. // Успехи мат. наук. 1946. Т. 1. Вып. 2. С. 38.
2. Duckyhoff H. // European Journal of Operational Research. 1990. Vol. 44. P. 145.
3. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. Л., 1939.
4. Martello S., Toth P. Knapsack problem. Algorithms and computer implementations. New York, 1990.
5. Тарновский А. Г. // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1992. № 3. С. 37.
6. Tarnowski A. G. Exact polynomial time algorithm for quillotine cutting stock problem with two rectangles. Magdeburg, 1993.
7. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев, 1986.
8. Мухачева Е. А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Применение САПР. М., 1984.
9. Wang P. Y. // Operations Research. 1983. Vol. 31. № 3. P. 573.
10. Метельский Н. Н., Азаренок А. С., Крикун В. С. // Проектирование вычислительных средств: Тез. докл. всесоюз. конф. Каунас, 1989. С. 202.
11. Метельский Н. Н., Крикун В. С. Метод иерархического размещения изотетических блоков / АН БССР. Ин-т математики. Мн., 1990. Препринт № 27(247).
12. Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. М., 1995.

Поступила в редакцию 06.03.98.

УДК 517.925

П. П. ВЕРЕСОВИЧ

## СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ, ПРЕОБРАЗУЮЩЕЙ ОКРУЖНОСТИ В ОКРУЖНОСТИ

Necessary and sufficient conditions for a nonlinear differential system to have a linear reflection function of Mironenko V. (and therefore a linear map of Poincare) was given. Using this conditions a sufficient conditions for the existence and stability of periodic solutions was establish.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = \alpha_1(t)x + \alpha_2(t)y + P(t, x, y), \quad \dot{y} = \beta_1(t)x + \beta_2(t)y + Q(t, x, y), \quad (1)$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью, в которой функции  $P(t, x, y)$ ,  $Q(t, x, y)$  обладают свойством

$$\frac{\partial P(t, 0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial P(t, 0, 0)}{\partial y} = \frac{\partial Q(t, 0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t, 0, 0)}{\partial y} \equiv 0.$$

Пусть система (1) имеет линейную отражающую функцию (ОФ). Найдем условия, при выполнении которых

$$x^2(-t) + y^2(-t) \equiv r^2(t)(x^2(t) + y^2(t)). \quad (2)$$

**Теорема 1.** Система (1) имеет линейную ОФ и для каждого ее решения выполняется соотношение (2) тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$(\beta_2 - \overline{\beta_2} - (\alpha_1 - \overline{\alpha_1})) \sin \varphi \equiv (\alpha_2 + \overline{\alpha_2} + \beta_1 + \overline{\beta_1}) \cos \varphi, \quad (3)$$

$$(\alpha_1 - \beta_2)^2 - (\overline{\alpha_1} - \overline{\beta_2})^2 + (\alpha_2 + \beta_1)^2 - (\overline{\alpha_2} + \overline{\beta_1})^2 \equiv 0, \quad (4)$$

$$r(P(t, x, y) \cos \varphi - Q(t, x, y) \sin \varphi) + P(-t, r(x \cos \varphi - y \sin \varphi), r(x \sin \varphi + y \cos \varphi)) \equiv 0, \quad (5)$$

$$r(P(t, x, y) \sin \varphi + Q(t, x, y) \cos \varphi) + Q(-t, r(x \cos \varphi - y \sin \varphi), r(x \sin \varphi + y \cos \varphi)) \equiv 0, \quad (6)$$