УДК 517.923

ЧЖОУ ЧЖИНЬСИНЬ (Китай)

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-го ПОРЯДКА

Reflective function (RF) for the equation in the title can not have below triangle form. The neccesary and sufficient conditions for the linear DE n-order has upper triangle RF is given.

Известно, что всякое дифференциальное уравнение

$$x_1^{(n)}=g(t,x_1,x'_1,\dots,x_1^{(n-1)}) \tag{1}$$

стандартной подстановкой $x_1=x'_1,\dots,x_n=x_1^{(n-1)}$ сводится к системе

$$\dot{x}_1=x_2,\dots,\dot{x}_n=g(t,x_1,\dots,x_n). \tag{2}$$

В то же время не всякая система общего вида $\dot{x}=X(t,x)$ сводится к уравнению вида (1). Известно (2), что система общего вида может иметь треугольную отражающую функцию (ОФ) [1], т.е. ОФ вида

$$F(t,x_1,\dots,x_n)=\begin{pmatrix} f_1(t,x_1) \\ f_2(t,x_1,x_2) \\ \dots \\ f_n(t,x_1,x_2,\dots,x_n) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Теорема 1. Система (2), полученная из уравнения (1), не может иметь нижнетреугольной ОФ вида (3).

Доказательство. Если $F(t,\ x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n)=(\ f_1(t,x_1),\ f_2(t,x_1,x_2),\dots,\ f_n(t,x_1,\dots,x_n),)^{\mathrm{T}}$ есть ОФ системы (2), то из свойства ОФ [1,с.11] получим: $\frac{\partial f_1}{\partial t}(t,x_1)+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x_1)x_2+f_2(t,x_1,x_2)\equiv 0$ $(\forall\, t,x_1,x_2)$. Пусть $t=0$, тогда $\frac{\partial f_1}{\partial t}(0,x_1)+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,x_1)x_2+f_2(0,x_1,x_2)\equiv 0$. Отсюда, так как $\frac{\partial f_1}{\partial t}(0,x_1)\equiv 1$, $f_2(0,x_1,x_2)\equiv x_2$, получим $\frac{\partial f_1}{\partial t}(0,x_1)+2x_2\equiv 0$. Но этого не может быть. Теорема доказана.

Из теоремы (1) очевидным образом следует теорема 2, которую мы докажем, не привлекая понятия ОФ.

Теорема 2. Не существует дифференцируемой функции $\varphi(t,x)$, для которой при любом решении $x(t)$ уравнения

$$x^{(n)}=g(t,x,x',\dots,x^{(n-1)}),\ x\in R^n,\ t\in R\ (n\ge 2), \tag{4}$$

определенном на некотором симметричном интервале $(-\alpha,\alpha)$, выполняется тождество

$$x(-t)\equiv\varphi(t,\ x(t)). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть такое $\varphi(t,x)$ существует. Тогда из 95) при $t=0$ будем иметь $x(0)=\varphi(0,x(0))$, т.е. $\varphi(0,x)\equiv x$, а значит, $\varphi_x(0,x)\equiv 1$. Продифференцируем (5) по t и положим $t=0$. Получим $-\dot{x}(0)=\varphi_t(0,x(0))+\varphi_k(0,x(0))x(0)$, откуда $\dot{x}(0)=-0{,}5\varphi_k(0,x(0))$. А это значит, что, по крайней мере, для тех решений, для которых не выполняется равенство $\dot{x}(0)=-0{,}5\varphi_k(0,x(0))$, тождество (5) не выполняется. Теорема доказана.

Следствие. Все решения уравнения (4) при $n\ge 2$ не могут быть четными.

Доказательство. Если все решения уравнения (4) четные, то $x(-t)\equiv x(t)$, т.е. существует $\varphi(t,x)\equiv x$, для которой $x(-t)\equiv\varphi(t,x(t))$, а это противоречит теореме 2.

Из теоремы 1 следует, что ОМ (отражающая матрица) $F(t)$ линейного дифференциального уравнения

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\dots+a_n(t)x=0$$

не может быть нижнетреугольной. Покажем, что у него тем не менее может быть верхнетреугольная ОМ.

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение $\ddot{x}+p(t)x=0$. Для исследования ОФ этого уравнения заменим его эквивалентной системой

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-p(t)x. \tag{6}$$

Теорема 3. Пусть имеет место условие А) Функция $p(t)$ дифференцируема и обращается в нуль только в изолированных точках; для всех t существует положительный предел $\lim\limits_{\tau\to t}\left(-\dfrac{p(\tau)}{p(-\tau)}\right)$, и $a(t):=\left(-\dfrac{p(t)}{p(-t)}\right)^{1/2}$.

В этом случае система (6) будет иметь верхнетреугольную ОМ

$$F(t)=\begin{pmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) \\ 0 & F_{22}(t) \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$a'(t)+p(t)\int\limits_0^t\left(a(s)+a^{-1}(s)\right)ds=0, \tag{Б}$$

при этом

$$F(t)=\begin{pmatrix} a(t) & -\int\limits_0^t\left(a(s)+a^{-1}(s)\right)ds \\ 0 & a^{-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Доказательство состоит в проверке основного соотношения для ОМ [1,с.11].

Замечание. В качестве $a(t)$ возьмем произвольную функцию $a(t)$ со свойством $a(-t)=\dfrac{1}{a(t)}$, например $a(t)=\dfrac{1-\alpha(t)}{1+\alpha(t)}$ или $a(t)=e^{\alpha(t)}$, где $a(t)$ – нечетная функция со свойством $\alpha'(0)=0$. Положим $p(t)=\dfrac{a'(t)}{\int\limits_0^t\left(a(s)+a^{-1}(s)ds\right)}$. Для этой $p(t)$ будут выполнены условия теоремы 3, так как условие (Б) для нее выполнено по определению и

$$\frac{p(t)}{p(-t)}=\frac{a'(t)}{\int\limits_0^t\left(a(s)+a^{-1}(s)\right)ds}:\frac{\int\limits_0^{-t}\left(a(s)+a(-s)\right)ds}{a'(-t)}=-a^2(t).$$

В частности, если положить $a(t)\equiv 1$, то получим $p(t)\equiv 0$ и $F(t)=\begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Следствие. Если $p(t+2\omega)=p(t)$ и для нее выполняются условия (А) и (Б), то система (6) имеет единственное 2ω-периодическое тривиальное решение тогда и только тогда, когда $\int\limits_0^{-\omega}\left(a(s)+a^{-1}(s)\right)ds\neq 0$. В противном случае всякое решение системы (6) будет 2ω-периодическим.

Доказательство следует из вида ОМ для системы (6), и $a(-\omega)=\alpha(\omega)=1$, и [1,с.11].

1. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных систем. Мн., 1986.
2. Альсевич Л.А. // Дифференц. уравнения. 1983. №8. С.1446.

Поступила в редакцию 17.02.98.