

$$C^{-1} = (\tilde{c}_{ij}), \quad C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \tilde{M}(i, j), \quad i, j = 1, m,$$

$$\tilde{M}(i, j) = \sigma^2 \left(\sum_{l=1}^m \lambda_i^{(1)} \lambda_j^{(1)} + \sum_{l=1}^{\min(i, j)} \lambda_{i-l}^{(1)} \lambda_{j-l}^{(1)} \right).$$

Доказательство теоремы основано на исследовании статистических свойств случайного вектора, являющегося разностью вектора МНК-оценки параметров (8) и вектора коэффициентов авторегрессии (1).

Полученные результаты позволяют оценить устойчивость МНК-метода прогнозирования временных рядов и определить критические уровни искажений, гарантирующих заданную точность прогноза.

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976.
2. Харин Ю. С. Робастность в статистическом распознавании образов. Мн., 1992.
3. Kharin Yu. S., Fursa R. A. // Proc. of the First European Conference ECSAP'97, 1997.
4. Хьюбер П. Дж. Робастность в статистике. М., 1984.

Поступила в редакцию 30.06.97.

УДК 517.926

С.В. МАЙОРОВСКАЯ

О ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ, ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПОЛУОСИ

For the systems in the title a Floquelike theorem is established.

Учитывая то обстоятельство, что в теории показателей Ляпунова (см., например, [1, 2]) часто используют линейные системы вида

$$\dot{x} = Q(t)x, \quad t \geq 1, \quad (1)$$

с матрицей $Q(t)$, удовлетворяющей условию

$$Q(\theta t) \equiv Q(t), \quad (2)$$

где $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta > 1$. Н.А. Изобов поставил перед автором данной статьи задачу изучения таких систем (в дальнейшем будем называть их периодическими на логарифмической полуоси (времени)).

В настоящей работе показано, что при определенных условиях для периодических на логарифмической полуоси систем можно указать аналог теорем Флоке [1, с. 183] для периодических систем.

Теорема 1. Пусть для системы (1) с дифференцируемой на некотором интервале J матрицей $Q(t)$ выполнено тождество

$$\dot{Q}(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) Q^i(t), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

где $\alpha_i(t)$ — скалярные функции. Тогда для фундаментальной матрицы $X(t)$, $X(t) = E$, системы (1) и любого целого n матрица $X^n(t)$ является фундаментальной матрицей системы

$$\dot{y} = nQ(t)y. \quad (4)$$

∇ Покажем вначале, что $Q(t)$ и $X(t)$ коммутируют. Для этого положим

$$\begin{aligned} U(t) &:= Q(t)X(t) - X(t)Q(t). \quad \text{Тогда} \quad \dot{U} = \dot{Q}X + Q\dot{X} - \dot{X}Q - X\dot{Q} = \sum_{i=1}^m \alpha_i Q^i X + Q^2 X - \\ &- QXQ - X \sum_{i=1}^m \alpha_i Q^i = QU + \sum_{i=1}^m \alpha_i (Q^i X - XQ^i) = QU + \sum_{i=1}^m \alpha_i [Q^{i-1}(QX - XQ) + \\ &+ Q^{i-2}(QX - XQ)Q + Q^{i-3}(QX - XQ)Q^2 + \dots + (QX - XQ)Q^{i-1}] = QU + \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=1}^i Q^{i-k} U Q^{k-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $U(t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\dot{U} = QU + \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=1}^i Q^{i-k} U Q^{k-1}$$

и начальному условию $U(1) = 0$. Поэтому $U(t) \equiv 0$, т.е. $Q(t)X(t) \equiv X(t)Q(t)$.

Докажем теперь теорему для $n \in \mathbb{N}$. В этом случае $\frac{d}{dt} X^n \equiv \sum_{s=0}^{n-1} X^s \dot{X} X^{n-s-1} \equiv \sum_{s=0}^{n-1} X^s Q X^{n-s} \equiv \sum_{s=0}^{n-1} Q X^s X^{n-s} \equiv n Q X^n$, т.е. $\frac{d}{dt} X^n = Q X^n$ и, значит, теорема доказана.

При $n=0$ теорема очевидна, если считать $X^0(t) = E$.

При $n=-1$ теорема также верна, так как $\frac{d}{dt} X^{-1} = -X^{-1} \dot{X} X^{-1} = -X^{-1} Q X X^{-1} = -Q X^{-1}$.

Тогда при отрицательных n теорема будет следовать из определения отрицательной степени $X^n := (X^{-1})^{-n}$ и предыдущей части доказательства. ∇

Теорема 2. Пусть при всех $t \in R_+$ для дифференцируемой матрицы $Q(t)$ выполнены тождества (2) и (3) и $\theta \in \mathbb{Z}$. Тогда для фундаментальной матрицы $X(t)$, $X(1) = E$, системы (1) выполнено тождество

$$X(\theta t) \equiv X^\theta(t) X(\theta) \quad \forall t > 0.$$

∇ Обозначим $Y(t) := X(\theta t) X^{-1}(\theta)$. Тогда $\dot{Y}(t) \equiv \theta Q(\theta t) X(\theta t) X^{-1}(\theta) = \theta Q(t) Y(t)$ и $Y(1) = E$. Поэтому $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{y} = \theta Q(t) y$. По теореме 1 матрица $X^\theta(t)$ также является фундаментальной матрицей этой системы и $X^\theta(1) = E$. Тогда, в силу единственности решения линейной системы с заданными начальными условиями $Y(t) \equiv X^\theta(t) \quad \forall t > 0$, откуда и следует утверждение теоремы 2. ∇

Замечание. Для стационарных систем вида $\dot{x} = Ax$ условия теорем 1 и 2 выполнены. Поскольку для таких систем известна фундаментальная матрица $X(t) = e^{At}$, то на них можно проверить утверждения и доказательства соответствующих теорем.

Следствие. Пусть для системы (1) выполнены все условия теоремы 2. Тогда верно соотношение

$$\|X(\theta^k \tau)\| \leq \|X(\tau)\|^{\theta^k} \|X(\theta)\|^{\frac{\theta^k - 1}{\theta - 1}} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall \tau > 0.$$

$$\begin{aligned} \nabla \|X(\theta^k \tau)\| &= \|X^\theta(\theta^{k-1} \tau) X(\theta)\| \leq \|X(\theta^{k-1} \tau)\|^\theta \|X(\theta)\| = \|X^\theta(\theta^{k-2} \tau) X(\theta)\|^\theta \|X(\theta)\| \leq \\ &\leq \|X(\theta^{k-2} \tau)\|^{\theta^2} \|X(\theta)\|^{1+\theta} \leq \|X(\theta^{k-3} \tau)\|^{\theta^3} \|X(\theta)\|^{1+\theta+\theta^2} \leq \dots \leq \|X(\tau)\|^{\theta^k} \|X(\theta)\|^{\frac{\theta^k - 1}{\theta - 1}}. \quad \nabla \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть для системы (1) выполнены все условия теоремы 2, а модули всех корней ρ_k характеристического уравнения $|X(\tau) - \rho E| = 0$ меньше единицы при всех $\tau \in (1; \theta]$. Тогда система (1) асимптотически устойчива.

Покажем вначале, что $\forall \tau \in (1; \theta] \quad X^m(\tau) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Для этого положим $A(\tau) := \ln X(\tau)$ (см. [1, с.59]). Тогда уравнение $|A - \lambda E| = 0$ имеет корни $\lambda_k = \ln \rho_k$ и $\operatorname{Re} \lambda_k = \ln |\rho_k| < 0$, так как $|\rho_k| < 1$, а значит, система $\dot{z} = A(\tau) z$ с фундаментальной матрицей $e^{A(\tau)t}$ асимптотически устойчива (см. [1, с.85]). Поэтому $X^m(\tau) = e^{A(\tau)m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Заметим теперь, что для каждого $t > 0$ можно подобрать $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $\theta^k < t \leq \theta^{k+1}$. Тогда число $t = \theta^k \tau$ будет удовлетворять неравенству $1 < \tau < \theta$ и $t = \tau \theta^k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Согласно следствию, $0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|X(\theta^k \tau)\| \leq$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|X(\tau)\|^{\theta^k} \|X(\theta)\|^{\frac{\theta^k - 1}{\theta - 1}} = 0, \text{ откуда и следует утверждение теоремы.}$$

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М. 1967.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М. 1966.

Поступила в редакцию 12.01.98.