$$F'_n(s,0)=0 \Rightarrow F''_{n^2}(s,0)=J_0\left(\frac{\partial^2 P}{dn^2},\frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}\right);$$

$$F''_{n^2}(s,0)=F'_n(s,0)=0 \Rightarrow F^{(3)}_{n^3}(s,0)=J_0\left(\frac{\partial^3 P}{\partial n^3},\frac{\partial^3 Q}{\partial n^3}\right);$$

....

$$F^{(k-1)}_{n^{k-1}}(s,0)=...=F'_n(s,0)=0 \Rightarrow F^{(k)}_{n^k}(s,0)=J_0\left(\frac{\partial^k P}{\partial n^k},\frac{\partial^k Q}{\partial n^k}\right).$$

Таким образом, если ввести в рассмотрение $\delta_i=J_0\left(\frac{\partial^i P}{\partial n^i},\frac{\partial^i Q}{\partial n^i}\right)$, где i=1,2,3,..., то приходим к следующему утверждению:

Теорема 3. Для того чтобы регулярный предельный цикл Г системы (1) был устойчивым (неустойчивым), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\delta_1=\delta_2=...=\delta_{k-1}=0,\ \delta_k<0\,(>0),$$

при нечетном k, а для полуустойчивости необходимо и достаточно, чтобы на Г выполнялись условия:

$$\delta_1=\delta_2=...=\delta_{k-1}=0,\ \delta_k\neq 0,$$

где k – четно.

1. Амелькин В.В., Левин А.В. // Вестн. Белорус. ун-та. 1997.№1. С.64.
2. Макаров И.П. // Дифференц. уравнения. 1986. Т.22. №5. С.900.
3. Амелькин В.В. // Там же. 1991. Т.27. №8.
4. Ткачев В.Ф. // Мат. сб. 1962. Т.56(98). №3. С.281.
5. Antony W. Leung, Xu Rong-Liang. // Dynamic System and Applications. 1 (1992). P.283.

Поступила в редакцию 25.12.97.

УДК 517.977

О.И.КОСТЮКОВА, В.Л.СОКОЛ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В ОКРЕСТНОСТИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ТОЧКИ

In the paper properties of solutions to a family of linear time-optimal control problems with initial states depending on a parameter are studied. The rules of identifying the structure of the solutions to the family in the neighbourhood of a solution degeneracy moment $\tau=\tau_0$ are described.

Проблема исследования свойств решений семейства линейных задач оптимального быстродействия, зависящих от параметра, в окрестности нерегулярной точки интересна как с чисто теоретической точки зрения, так и с практической. В частности, она возникает при анализе чувствительности решения к вариации параметров исходной задачи [1], а также при построении управления типа обратной связи [2].

В [3,4] приведен алгоритм построения решения возмущенной задачи оптимального быстродействия в окрестности нерегулярной точки для случая, когда степень вырождения решения $\beta(\tau)$ не превышает единицы. Данная статья посвящена исследованию общей ситуации ($\beta(\tau)>1$).

Рассмотрим семейство задач оптимального быстродействия, зависящих от параметра $\tau\in T^+(\tau_0)=[\tau_0,\tau_0+\varepsilon]$, где ε – малое положительное число:

$$t^*\to\min,\ \dot{x}=Ax+bu,\ x(0)=x^*(\tau),\ x(t^*)=0,\ |u(t)|\le 1,\ t\in[0,t^*], \qquad (1)$$

($x\in R^n$, $u\in R$, $b\neq 0$).

Здесь $x^*(\tau)$, $\tau\in T^+(\tau_0)$ – некоторая заданная непрерывная кусочно-гладкая функция. Будем предполагать, что функция $x^*(\tau)$, $\tau\in T^+(\tau_0)$, такова, что задача (1) имеет решение при любом $\tau\in T^+(\tau_0)$.

Цель данной работы – исследовать зависимость решения задачи (1) от параметра τ и построить решения семейства задач (1) при $\tau \in T^+(\tau_0)$ в предположении, что известно решение задачи (1) при $\tau=\tau_0$.

Обозначим через $u_\tau(\cdot)=(u_\tau(t),\ t\in T_\tau=[0,t^*(\tau)])$, $t^*(\tau)$ оптимальное управление и время быстродействия в задаче (1). Согласно принципу максимума [5], найдется такой вектор $y(\tau)\in R^n$, $y(\tau)\neq 0$, что

$$|y'(\tau)b|\leq 1,\quad \psi'\bigl(y(\tau),t\bigr)bu_\tau(t)=\max_{|u|\leq 1}\psi'\bigl(y(\tau),t\bigr)bu,\quad t\in T_\tau, \tag{2}$$

где $\partial\psi\bigl(y(\tau),t\bigr)/\partial t=-A'\psi\bigl(y(\tau),t\bigr)$, $\psi\bigl(y(\tau),t^*(\tau)\bigr)=y(\tau)$.

Обозначим через $Y^0(\tau)$ множество всех векторов $y(\tau)\in R^n$, для которых имеют место соотношения (2). Пусть $y(\tau)\in Y^0(\tau)$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
\left\{t_j(\tau),\ j=\overline{1,p(\tau)}\right\}=\left\{t\in T_\tau\colon \psi'\bigl(y(\tau),t\bigr)b=0\right\},\\
t_j(\tau)<t_{j+1}(\tau),\ j=\overline{1,p(\tau)-1};\quad k(\tau)=\operatorname{sign}\psi'\bigl(y(\tau),0\bigr)b,\\
l_*(\tau)=1 \text{ при } t_1(\tau)=0,\ l_*(\tau)=0 \text{ при } t_1(\tau)>0,\\
l^*(\tau)=1 \text{ при } t_{p(\tau)}(\tau)=t^*(\tau),\ l^*(\tau)=0 \text{ при } t_{p(\tau)}(\tau)<t^*(\tau),\\
L(\tau)=\left\{j\in\{1,\dots,p(\tau)\}\colon \partial\Bigl(\psi'\bigl(y(\tau),t_j(\tau)\bigr)b\Bigr)\Big/\partial t=0\right\}.
\end{gathered} \tag{3}$$

Параметры

$$\begin{gathered}
S(\tau)=\left\{p(\tau),k(\tau),l_*(\tau),l^*(\tau),L(\tau)\right\},\\
Q(\tau)=\left\{t_j(\tau),\ j=\overline{1,p(\tau)};\ t^*(\tau);\ y(\tau)\right\}
\end{gathered} \tag{4}$$

назовем определяющими элементами решения задачи (1) в момент τ, построенными по вектору $y(\tau)\in Y^0(\tau)$; число $\beta(\tau)=l_*(\tau)+l^*(\tau)+|L(\tau)|$ – степенью вырождения решения.

Пусть известно решение $u_{\tau_0}(\cdot)$ и определяющие элементы (4) задачи (1) при $\tau=\tau_0$. Точку τ_0 назовем регулярной, если при $\tau=\tau_0$ имеют место соотношения

$$\beta(\tau)=0,\quad rank\left\{F\bigl(t^*(\tau),t_j(\tau)\bigr)b,\quad j=\overline{1,p(\tau)},\quad b\right\}=n, \tag{5}$$

где $F(t,\tau)=F(t)F^{-1}(\tau)$, $\dot F=AF$, $F(0)=E$.

В [3,4] показано, что, если τ_0 регулярная точка, то определяющие элементы (4) для $\tau\in T^+(\tau_0)$ однозначно находятся из соотношений

$$\begin{gathered}
S(\tau)=S,\quad \Phi\bigl(\tau,k,t_j(\tau),\ j=\overline{1,p},\ t^*(\tau)\bigr)=0,\\
q\bigl(y(\tau),t_j(\tau),t^*(\tau)\bigr)=0,\quad q^*\bigl(p,k,y(\tau)\bigr)=0,
\end{gathered} \tag{6}$$

где $S=S(\tau_0)$, $p=p(\tau_0)$, $k=k(\tau_0)$, и начальных условий

$$t_j(\tau_0+0)=t_j(\tau_0),\quad j=\overline{1,p};\quad t^*(\tau_0+0)=t^*(\tau_0),\quad y(\tau_0+0)=y(\tau_0), \tag{7}$$

а оптимальное управление $u_\tau(\cdot)$ задачи (1) будет иметь вид

$$u_\tau(t)=(-1)^jk,\ t\in\bigl[t_j(\tau),t_{j+1}(\tau)\bigr[,\ j=\overline{0,p},\ t_0(\tau)\equiv 0,\ t_{p+1}(\tau)\equiv t^*(\tau). \tag{8}$$

Здесь $q(y,t,t^*)=y'F(t^*,t)b$, $q^*(p,k,y)=(-1)^pky'b-1$, $\Phi\bigl(\tau,k,t_j,\ j=\overline{1,p};\ t^*\bigr)=$

$$=F(t^*,0)x^*(\tau)+k\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\int_{t_j}^{t_{j+1}}F(t^*,t)bdt.$$

Таким образом, если точка τ_0 регулярная, то для $\tau\in T^+(\tau_0)$ решение $u_\tau(\cdot)$ задачи (1) полностью определяется соотношениями (6), (7) и управлением $u_{\tau_0}(\cdot)$.

Пусть теперь точка τ_0 нерегулярная, т.е. для известных в момент $\tau=\tau_0$ определяющих элементов (4), построенных по некоторому вектору $y(\tau_0)\in Y^0(\tau_0)$, соотношения (5) нарушаются. (При этом параметр $\beta(\tau_0)$ может принимать любое целое значение, большее или равное 1.) Опишем правила построения определяющих элементов (4) и решения $u_\tau(\cdot)$ задачи (1) при $\tau\in T^+(\tau_0)$ в этом случае.

Предварительно введем необходимые в дальнейшем обозначения:

$$
\begin{gathered}
T_R(\tau)=\left\{t\in \operatorname{int}T_\tau : u_\tau(t-0)\neq u_\tau(t+0)\right\},\quad \alpha=(-1)^{p(\tau_0)}k(\tau_0),\\
\left\{s_i, i=\overline{1,r}\right\}=\left\{t_j(\tau_0),\ j=\overline{1,p(\tau_0)}\right\}\cap T_R(\tau_0);\quad s_i<s_{i+1}, i=\overline{1,r-1};\\
l_i=\operatorname{sign}u_{\tau_0}(t),\ t\in]s_i,s_{i+1}[,\ i=\overline{0,r};\quad s_0=0,\quad s_{r+1}=t^*(\tau_0).
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Рассмотрим задачу

$$
\begin{gathered}
y'F\left(t^*(\tau_0),0\right)\dot{x}^*(\tau_0+0)\to\min_y,\quad y'F\left(t^*(\tau_0),s_i\right)b=0,\ i=\overline{1,r},\\
\alpha y'b=1,\quad l_iy'F\left(t^*(\tau_0),t\right)b\geq 0,\quad t\in[s_i,s_{i+1}],\quad i=\overline{0,r}.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Задача (10) эквивалентна задаче линейного программирования с $(n-m)$ переменными и континуумом ограничений, где $m=\operatorname{rank}\left\{F\left(t^*(\tau_0),s_i\right)b,\ i=\overline{1,r};\ b\right\}$.

Предположим, что задача (10) имеет решение и ее ограничения удовлетворяют условиям: а) $m=n$ либо б) $m<n$ и не существует такого $\bar{t}\in\operatorname{int}T_{\tau_0}\setminus T_R(\tau_0)$, что $y'F\left(t^*(\tau_0),\bar{t}\right)b=0$ для любого $y\in Y^0(\tau_0)$. (Эти условия являются аналогом условий Слейтера [6].)

Пусть $y^*\in R^n$ – оптимальный план задачи (10).

Обозначим

$$
\begin{gathered}
\left\{t_j^*, j=\overline{1,p^*}\right\}=\left\{t\in T_{\tau_0}:\psi'\left(y^*,t\right)b=0\right\},\quad J^*=\{1,2,\ldots,p^*\},\\
J_R^*=\left\{j\in J^*: t_j^*\in\left\{s_i, i=\overline{1,r}\right\}\right\},\quad J_+^*\in\left\{j\in J^*\setminus J_R^*: u_{\tau_0}(t_j^*)=1\right\},\\
J_-^*=J^*\setminus\left(J_R^*\cup J_+^*\right).
\end{gathered}
$$

Предположим, что решение y^* задачи (10) таково, что

$$
\begin{gathered}
\operatorname{rank}\left\{F\left(t^*(\tau_0),t_j^*\right)b,\ j\in J^*,\ b\right\}=\min\left\{n,|J^*|+1\right\},\\
\partial^2\psi'(y^*,t_j^*)b/\partial t^2\neq 0,\ \text{при } t_j^*\in\operatorname{int}T_{\tau_0};\quad \partial\psi'(y^*,t_j^*)b/\partial t\neq 0,\ \text{при } t_j^*=0.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Из а), б) и условий оптимальности плана y^* задачи (10) следует, что существуют такие числа $\mu_j,\ j\in J^*\cup\{p^*+1\}$, что

$$
\begin{gathered}
\mu_j\leq 0,\quad j\in J_+^*;\quad \mu_j\geq 0,\quad j\in J_-^*;\\
\sum_{j\in J^*}F\left(t^*(\tau_0),t_j^*\right)b\mu_j+b\mu_{p^*+1}=-F\left(t^*(\tau_0),0\right)\dot{x}^*(\tau_0+0).
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Положим $\gamma_j=\partial y^{*\prime}F\left(t^*(\tau_0),t_j^*\right)b/\partial t,\quad j\in J^*;\quad \gamma_{p^*+1}=2\alpha^{*\prime}Ab$, и рассмотрим задачу минимизации функции

$$
\sum_{j\in J^*}|\gamma_j|\mu_j^2+\gamma_{p^*+1}\mu_{p^*+1}^2\to\min
\tag{13}
$$

при ограничениях (12).

Значение μ_{p^*+1} однозначно определяется ограничениями (12), так как из свойств задачи оптимального быстродействия

$$
\operatorname{rank}\left\{F\left(t^*(\tau_0),t_j^*\right)b,\ j\in J^*,\ b\right\}=\operatorname{rank}\left\{F\left(t^*(\tau_0),t_j^*\right)b,\ j\in J^*\right\}+1.
$$

Из сказанного следует, что ограничения задачи (12), (13) совместны и целевая функция ограничена, следовательно, она имеет решение. Задача (12), (13) может быть исследована методами квадратичного программирования. Пусть $\mu^* = \left(\mu_j^*, j \in J^* \cup \{p^*+1\}\right)$ — оптимальный план задачи (12), (13). Обозначим

$$J_0 = \left\{J^* \setminus J_R^*: \gamma_j = 0\right\}, J_{(0)} = \left\{j \in J_0: \mu_j^* \neq 0\right\},$$

$$J_{(*)} = J_R^* \cup \left\{j \in J^* \setminus J_R^*: \mu_j^* \neq 0\right\}.$$

Согласно критерию оптимальности [7], найдется такой вектор $\xi \in R^m$, что для оценок

$$\delta_j = \xi' F\left(t^*(\tau_0), t_j^*\right)b - |\gamma_j|\mu_j^*, \quad j \in J^*, \quad \delta_{p^*+1} = \xi' b - \gamma_{p^*+1}\mu_{p^*+1}^*$$

верны соотношения

$$\delta_j = 0, \quad j \in J_{(*)} \cup \{p^*+1\}; \ \delta_j \geq 0, j \in J_+^* \setminus J_{(*)}; \quad \delta_j \leq 0, j \in J_-^* \setminus J_{(*)}.$$

Обозначим $m^* = \operatorname{rank}\left\{F\left(t^*(\tau_0), t_j^*\right)b, j \in J_{(*)}; b\right\}$. Предположим, что выполняются следующие условия, гарантирующие единственность решений μ^*, y^* задач (12), (13); (10) соответственно:

при $m^* = n$ имеют место соотношения

$$\operatorname{rank}\left\{F\left(t^*(\tau_0), t_j^*\right)b, j \in J_{(0)}\right\} = |J_{(0)}|; \quad \delta_j \neq 0, \quad j \in J^* \setminus J_{(*)}; \tag{14а}$$

при $m^* < n$

$$\operatorname{rank}\left\{F\left(t^*(\tau_0), t_j^*\right)b, j \in J_{(*)}; b; \quad \dot{F}\left(t^*(\tau_0), t_j^*\right)b, j \in J_{(0)}\right\} = n. \tag{14б}$$

Положим $\bar{p} = |J_{(*)}| + |J_{(0)}|$, $\left\{\bar{t}_j, j = \overline{1,\bar{p}}\right\} = \left\{t_j^*, j \in J_{(*)}; t_j^*, j \in J_{(0)}\right\}$, $\bar{t}_j \leq \bar{t}_{j+1}$, $j = \overline{1, \bar{p}-1}$; $\bar{k} = u_{\tau_0}(+0)$, если $\bar{t}_1 > 0$; $\bar{k} = -u_{\tau_0}(+0)$, если $\bar{t}_1 = 0$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть задача (10) имеет решение y^*, ее ограничения удовлетворяют условиям *а*) или *б*) и выполняются соотношения (11), (14). Тогда при $\tau \in T^+(\tau_0)$ определяющие элементы (4) и решения $u_\tau(\cdot)$ задач (1) однозначно находятся из соотношений (6), (8), где $S = S(\tau_0+0) = \left\{p(\tau_0+0) = \bar{p}, k(\tau_0+0) = \bar{k}, l_*(\tau_0+0) = l^*(\tau_0+0) = 0, L(\tau_0+0) = \varnothing\right\}$, $p = p(\tau_0)$, $k = k(\tau_0)$, и начальных условий: $t_j(\tau_0+0) = \bar{t}_j$, $j = \overline{1,\bar{p}}$; $t^*(\tau_0+0) = t^*(\tau_0)$; $y(\tau_0+0) = y^*$.

Из утверждения теоремы следуют правила построения решений $u_\tau(\cdot)$ семейства задач (1) в правосторонней окрестности $T^+(\tau_0)$ нерегулярной точки τ_0.

1. Malanovski K. // Appl. Math. Optim. 1994. Vol.32. P.111.

2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. // Докл. АН СССР. 1991. Т.320. №6. С.1294.

3. Они же. // Докл. РАН. 1994. Т.337. №4. С.460.

4. Костюкова О.И. Исследование структуры оптимального коуправления для семейства задач быстродействия. АН РБ, ИМ. Мн., 1997. Препринт №4(527).

5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1976.

6. Эрроу К., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., 1962.

7. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И., Ракецкий В.М. Конструктивные методы оптимизации. Ч.4. Выпуклые задачи. Мн., 1987.

Поступила в редакцию 17.02.98.