

КОНВЕРГЕНТНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ

The theorem about the number of the convergent limit cycles of the two-dimensional autonomous systems of the ordinary differential equations is deduced. Questions of the stability of motion are considered.

Рассмотрим двухмерную автономную вещественную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

где функции P и Q принадлежат классу $C^r (r=1, 2, 3, \dots)$ в некоторой области D фазового пространства R^2 и имеют единственный общий нуль в начале координат $O(0, 0)$.

Обозначим через M некоторое однопараметрическое семейство траекторий системы (1) и предположим, что каждая траектория из этого семейства пересекается прямой

$$L: y = \tilde{k}x \quad (x = \tilde{k}y), \quad -1 \leq \tilde{k} \leq 1.$$

В работе [1] даны определения конвергентного семейства траекторий (конвергенции) и конвергентной траектории. Однако для решения ряда задач требуется, чтобы свойство конвергентности имело место не на конкретной прямой L , а выполнялось для некоторого множества прямых.

Определение. Траекторию $\Gamma \in F \subset M$ назовем сильно конвергентной траекторией, если она является конвергентной по любой прямой L за исключением, быть может, изолированных прямых, на которых свойство конвергентности нарушается.

Заметим, что в случае, когда все предельные циклы, порождаемые системой (1), обладают свойством сильной конвергентности, всегда существует прямая L^* , по которой каждый из них будет конвергентным предельным циклом. Действительно, множество предельных циклов, порождаемых системой (1), не более чем счетно, и для каждого из них конвергентность может нарушаться лишь на изолированных прямых. Следовательно, множество прямых, на которых нарушается конвергентность хотя бы одного из предельных циклов, порождаемых системой (1), в данном случае также не более чем счетно, и всегда найдется прямая L^* , по которой каждый из этих предельных циклов конвергентен.

Обозначим по аналогии с [1]:

$$f(X) \equiv f(x, \tilde{k}x) = \frac{Q(x, \tilde{k}x)}{P(x, \tilde{k}x)} \quad \left[f(Y) \equiv f(\tilde{k}y, y) = \frac{Q(\tilde{k}y, y)}{P(\tilde{k}y, y)} \right].$$

Замечание 1. В случае, когда Γ — изолированная замкнутая траектория, определение конвергентной траектории ([1]) эквивалентно определению альфарегулярного предельного цикла ([2]).

Замечание 2. Существование прямой L^* является необходимым и достаточным условием достоверности оценки числа альфарегулярных предельных циклов, порождаемых системой (1), приводимой И.П.Макаровым [2]. В общем случае оценка И.П.Макарова неверна.

Приведем следующие рассуждения, доказывающие последнее замечание. Так, в [2] утверждается, что число альфарегулярных предельных циклов системы (1) не превышает числа

$$N = n - \frac{1}{2} \{1 + (-1)^n\}, \quad (2)$$

где n — максимальное по $\tilde{k}$ число вещественных изолированных нулей функций $f'(X)$, $f'(Y)$ на прямой L без учета их кратности плюс число точек на прямой L , в которых $f'(X)$, $f'(Y)$ меняют знак, претерпевая разрыв. Таким

образом, появление новых альфарегулярных предельных циклов однозначно связывается формулой (2) с появлением двух новых конвергенций с разных сторон от начала координат. Однако не учитывается ситуация, когда в окрестности предельного цикла Γ_i для некоторого множества $\tilde{k}$ направление поля, определяемое системой (1), постоянно. Обозначим через K_i множество прямых L (или $\tilde{k}$ соответственно), на которых нарушается конвергентность i -го предельного цикла Γ_i , порождаемого системой (1), а через K — множество всех прямых L . Описанный в [2] способ подсчета конвергенций и альфарегулярных предельных циклов соответственно будет давать верный результат только в том случае, если множество $K \setminus \bigcup_i K_i \neq \emptyset$. А это, в свою очередь,

означает, что существует прямая L^* , по которой все предельные циклы, порождаемые системой (1), будут конвергентными.

В обратную сторону, пусть прямая L^* существует, покажем, что, оценив число конвергенций, инцидентных данной прямой, можно получить оценку числа конвергентных (альфарегулярных) предельных циклов, порождаемых системой (1). Действительно, в работе [1] показано, что конвергентные предельные циклы могут лежать либо внутри конвергенции, инцидентной при некотором $\tilde{k}$ прямой L , либо на границе двух соседних противоположных конвергенций, также инцидентных при некотором $\tilde{k}$ прямой L . Границе между двумя соседними противоположными конвергенциями на инцидентной им прямой L соответствует нуль функции $f'(X)$, $(f'(Y))$ или точка ее разрыва, связанная с переменной знака. Более того, из определения конвергентно устойчивого предельного цикла ([1]) очевидно вытекает следующая лемма.

Лемма. Если система (1) порождает конвергентно устойчивый предельный цикл Γ , то при любом $\tilde{k}$ выполняется одно из следующих условий:

(i) прямая L инцидентна по меньшей мере двум противоположным конвергенциям, расположенным с разных сторон от начала координат;

(ii) на прямой L в некоторой окрестности предельного цикла Γ направление поля, определяемое системой (1), постоянно.

Условие (ii) соответствует ситуации, когда по прямой L нельзя однозначно определить, является ли предельный цикл Γ конвергентным. Таким образом, если прямая L^* существует, то на ней выполняется условие (i). Учитывая, что внутри одной конвергенции не может находиться более одного предельного цикла, и следуя рассуждениям, приведенным в доказательстве теоремы работы [2] для конкретной прямой L^* , приходим к необходимой оценке.

Из анализа сказанного вытекает

Теорема 1. Пусть существует прямая L^* , по которой любой из предельных циклов, порождаемых системой (1), будет конвергентным. Тогда число конвергентных предельных циклов системы (1) не превышает числа N , определяемого формулой (2), где n — число вещественных изолированных нулей функций $f'(X)$, $f'(Y)$ на прямой L^* без учета их кратности плюс число точек на прямой L^* , в которых $f'(X)$, $f'(Y)$ меняют знак, претерпевая разрыв.

Далее будем рассматривать регулярные предельные циклы, строгое определение которых дано, например, в [3]. В работе [4] доказана

Теорема 2. Для того чтобы регулярный предельный цикл Γ системы (1) был устойчивым (неустойчивым), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{k-1} = 0, \sigma_k < 0 (> 0), \quad (3)$$

где $\sigma_i = P \left[(-Q) \frac{\partial}{\partial x} + P \frac{\partial}{\partial y} \right]^i Q - Q \left[(-Q) \frac{\partial}{\partial x} + P \frac{\partial}{\partial y} \right]^i P$, $i=1,2,3,\dots,k$, при нечетном k ,

а для полустойчивости необходимо и достаточно, чтобы на Γ выполнялись условия:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{k-1} = 0, \quad \sigma_k \neq 0, \quad (4)$$

где k — четно.

Выведем условия, эквивалентные условиям (3), (4), но записанные в других терминах, которые более удобны при решении конкретных задач. Так, если обозначить

$$P^2 + Q^2 = b_0, \quad (P^2 + Q^2)^{1/2} = \beta_0, \\ \beta_1 = \left(Q \frac{dP}{dt} - P \frac{dQ}{dt} \right) / b_0, \quad \frac{PD^j P + QD^j Q}{j!} = b_j, \quad \frac{PD^j Q - QD^j P}{j!} = g_j,$$

где $i, j = 1, 2, 3, \dots$, а оператор D^j определяется равенством

$$D^v = \left[-\frac{Q}{\beta_0} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{P}{\beta_0} \frac{\partial}{\partial y} \right]^v, \quad v = 1, 2, 3, \dots,$$

$$d_0 = 1/b_0, \quad d_1 = -b_1/b_0^2, \quad d_2 = \frac{b_1^2}{b_0^3} - \frac{b_2}{b_0^2}, \dots, \quad d_k = -\frac{1}{b_0} (b_k d_0 + b_{k-1} d_1 + \dots + b_1 d_{k-1}),$$

где $k = 3, 4, 5, \dots$, и иметь в виду, что функции P и Q всюду рассматриваются вдоль цикла Γ , то оказывается, что

$$F_n^{(k)}(t, 0) = k! \left[\beta_0 \sum_{i=1}^k g_i \sum_{j=0}^k d_j + \beta_1 \sum_{l=1}^k g_l \sum_{s=0}^k d_s \right], \quad (5)$$

где $i+j=l+s+1=k$. Тогда

$$\sigma_1 = \beta_0 g_1, \quad \sigma_2 = 2! \beta_0^2 g_2, \quad \dots \quad \sigma_k = k! \beta_0^k,$$

и условия $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{k-1} = 0$ эквивалентны условиям

$$g_1 = g_2 = \dots = g_{k-1} = 0. \quad (6)$$

При выполнении условий (6) формула (5) принимает следующий вид:

$$F_n^{(k)}(t, 0) = k! [\beta_0 g_k d_0] = \frac{k! g_k}{\beta_0} = \sigma_k \beta_0^{k-1}.$$

Таким образом, условия (6) можно переписать в виде

$$F_1'(t, 0) = F_2''(t, 0) = \dots = F_{k-1}^{(k-1)}(t, 0) = 0. \quad (7)$$

Если теперь обратиться к работе [5], то с учетом вводимых в ней операторов

$$J(U, V) = \frac{P_0 V - Q_0 U}{P_0^2 + Q_0^2} \quad \text{и} \quad J_0(U, V) = \frac{P_0 V_0 - Q_0 U_0}{P_0^2 + Q_0^2},$$

где $U(x, y), V(x, y) \in C^k(D)$, $D \subseteq R^2$, а P_0, Q_0, U_0 и V_0 задают соответственно значения P, Q, U и V в некоторой точке B предельного цикла Γ , имеет место следующее представление:

$$F_n^{(k)}(s, 0) = \\ = J_0 \left(\frac{\partial^k P}{\partial n^k}, \frac{\partial^k Q}{\partial n^k} \right) - k \left[J_0 \left(-\frac{\partial^{k-1} Q}{\partial n^{k-1}}, \frac{\partial^{k-1} P}{\partial n^{k-1}} \right) J_0 \left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n} \right) + J_0 \left(\frac{\partial P}{\partial s}, \frac{\partial Q}{\partial s} \right) J_0 \left(\frac{\partial^{k-1} P}{\partial n^{k-1}}, \frac{\partial^{k-1} Q}{\partial n^{k-1}} \right) \right] - \\ - \sum_{r=1}^{k-2} C_k^r J_0 \left(-\frac{\partial^r Q}{\partial n^r}, \frac{\partial^r P}{\partial n^r} \right) F_n^{(k-r)}(s, 0). \quad (8)$$

При выполнении условий (7) слагаемые под знаком $\sum$ в формуле (8)

обращаются в нуль. Если учесть теперь, что $F_n'(s, 0) = J_0 \left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n} \right)$, то из

$$F'_n(s,0)=0 \Rightarrow F''_n(s,0)=J_0\left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}\right);$$

$$F''_{n^2}(s,0)=F'_n(s,0)=0 \Rightarrow F^{(3)}_{n^3}(s,0)=J_0\left(\frac{\partial^3 P}{\partial n^3}, \frac{\partial^3 Q}{\partial n^3}\right);$$

$$\dots\dots\dots F^{(k-1)}_{n^{k-1}}(s,0)=\dots=F'_n(s,0)=0 \Rightarrow F^{(k)}_{n^k}(s,0)=J_0\left(\frac{\partial^k P}{\partial n^k}, \frac{\partial^k Q}{\partial n^k}\right).$$

Таким образом, если ввести в рассмотрение $\delta_i = J_0\left(\frac{\partial^i P}{\partial n^i}, \frac{\partial^i Q}{\partial n^i}\right)$, где $i=1,2,3,\dots$, то приходим к следующему утверждению:

Теорема 3. Для того чтобы регулярный предельный цикл Γ системы (1) был устойчивым (неустойчивым), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\delta_1=\delta_2=\dots=\delta_{k-1}=0, \delta_k<0(>0),$$

при нечетном k , а для полуустойчивости необходимо и достаточно, чтобы на Γ выполнялись условия:

$$\delta_1=\delta_2=\dots=\delta_{k-1}=0, \delta_k \neq 0,$$

где k – четно.

1. Амелькин В.В., Лесвин А.В. // Вестн. Белорус. ун-та. 1997. №1. С.64.
2. Макаров И. П. // Дифференц. уравнения. 1986. Т.22. №5. С.900.
3. Амелькин В.В. // Там же. 1991. Т.27. №8.
4. Ткачев В.Ф. // Мат. сб. 1962. Т.56(98). №3. С.281.
5. Antony W. Leung, Xu Rong-Liang. // Dynamic System and Applications. 1 (1992). P.283.

Поступила в редакцию 25.12.97.

УДК 517.977

О.И.КОСТЮКОВА, В.Л.СОКОЛ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В ОКРЕСТНОСТИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ТОЧКИ

In the paper properties of solutions to a family of linear time-optimal control problems with initial states depending on a parameter are studied. The rules of identifying the structure of the solutions to the family in the neighbourhood of a solution degeneracy moment $\tau=\tau_0$ are described.

Проблема исследования свойств решений семейства линейных задач оптимального быстрогодействия, зависящих от параметра, в окрестности нерегулярной точки интересна как с чисто теоретической точки зрения, так и с практической. В частности, она возникает при анализе чувствительности решения к вариации параметров исходной задачи [1], а также при построении управления типа обратной связи [2].

В [3,4] приведен алгоритм построения решения возмущенной задачи оптимального быстрогодействия в окрестности нерегулярной точки для случая, когда степень вырождения решения $\beta(\tau)$ не превышает единицы. Данная статья посвящена исследованию общей ситуации ($\beta(\tau)>1$).

Рассмотрим семейство задач оптимального быстрогодействия, зависящих от параметра $\tau \in T^+(\tau_0)=[\tau_0, \tau_0+\varepsilon]$, где ε – малое положительное число:

$$i^* \rightarrow \min, \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x^*(\tau), \quad x(i^*) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, i^*], \quad (1)$$

$(x \in R^n, u \in R, b \neq 0).$

Здесь $x^*(\tau)$, $\tau \in T^+(\tau_0)$ – некоторая заданная непрерывная кусочно-гладкая функция. Будем предполагать, что функция $x^*(\tau)$, $\tau \in T^+(\tau_0)$, такова, что задача (1) имеет решение при любом $\tau \in T^+(\tau_0)$.