где
$$S^0 = \arg \min_{S\in\{1,\dots,n-1\}} \mathrm{t}_n(S), \tag{17}$$

а функция
$$\mathrm{t}_n(S) = \frac{2bS + n(a-b+c)}{S(n-S)}. \tag{18}$$

Доказательство. Согласно доказанной лемме, точный A-оптимальный план экспериментов должен иметь структуру:
$$\varepsilon_n = \begin{Bmatrix} -1; & 1 \\ S; & n-S \end{Bmatrix}, \tag{19}$$

где S – число минус единиц в спектре плана (19), $S\in\{0,\dots,n\}$. След дисперсионной матрицы плана экспериментов (19) равен: $\frac{1}{2}\mathrm{t}_n(S)$, следовательно, оптимальное значение S^0, определяющее точный A-оптимальный план, должно удовлетворять (17). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что точный A-оптимальный план экспериментов (16) для модели (1),(2) зависит от изменения параметров a_2, a_1 и a_0, определяющих поведение дисперсии наблюдений (2). В то же время точные D-оптимальные планы экспериментов для той же модели наблюдений, как следует из [4], "грубее" по отношению к изменению параметров a_2, a_1 и a_0, так как не зависят от этих параметров.

При этом для выделенного в теореме класса функций, описывающего изменение дисперсии наблюдений, точные D- и A-оптимальные планы экспериментов остаются двухточечными. По мере изменения дисперсии наблюдений в точных A-оптимальных планах происходит перераспределение числа наблюдений, которые нужно проводить на концах интервала $[-1;1]$. Структура точных D-оптимальных планов для модели (1),(2) не зависит от изменения дисперсии наблюдений.

1. Кирлица В.П. //Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1990. №2. С.36.
2. Он же. //Там же. 1995. №1. С.42.
3. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента М., 1968.
4. Kirlitsa V.P. // Computer data analysis and modeling. Minsk,1995. Vol.1. P.64.

Поступила в редакцию 17.09.97.

УДК 519.71

А.М.САЛУК

О СЛОЖНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

The well known "gossip problem" considers the model of information exchange system with "from each to each" task.

In this job the model with fixed task which is generalization of "gossip problem" is introduced and the model with "from each to one" task is considered.

Введение

Вот уже несколько десятилетий проблемы обмена [1–10,12,13] и распространения [11] информации являются важнейшими объектами исследований в дискретной математике и математической кибернетике (см. [11]). Результаты, полученные в этой области, представляют интерес для приложений: в теории синтеза коммутационных систем, построении многопроцессорных систем, специализированных информационных систем и т. д.

В работах [1–13] изучались коммуникационные системы, удовлетворяющие следующим условиям:

• система представляется в виде конечного графа, вершины которого являются как источниками, так и получателями информации (вид и способ представления которой не конкретизируется), ребра графа интерпретируются как каналы передачи информации;

• в каждый момент времени любая вершина может быть соединена только с одной другой вершиной, после соединения вершины пересылают свою информацию друг другу;

• время передачи информации по любому каналу (ребру) постоянно и не зависит от размера передаваемой информации; информация, оказавшаяся в вершине после обмена, может находиться в ней как угодно долго;

• процесс перераспределения информации заканчивается, если в каждой вершине оказывается информация из всех других вершин.

Модель проблемы распространения информации, описанная в данной работе, отличается от описанной лишь последним условием, а именно:

• процесс перераспределения информации заканчивается, если в каждой вершине оказывается информация из некой фиксированной вершины, которая называется источником.

В данной работе впервые вводится модель перераспределения информации с фиксированным пакетом связей, обобщающая модели обмена, введенные ранее [1–13].

Графы, описывающие структуру системы перераспределения информации, могут иметь произвольный вид (как, например, в работах [3,12,13]), однако в данной работе будут рассматриваться системы, которые описываются полным неориентированным графом на n вершинах.

1. Основные понятия и обозначения

В работе используются общепринятые определения графа, связности графа и т.п. Предполагается, что вершины графа занумерованы натуральными числами.

Пакетом связей будем называть произвольный ориентированный граф с помеченными вершинами.

Пусть $G=<V,E>$ – произвольный n-вершинный граф. *Нумерацией* на графе G назовем произвольное отображение $\varphi:E\to 2^N$, где 2^N – множество всех подмножеств множества натуральных чисел.

Пусть $G=<V,E>$ – произвольный n-вершинный граф, $P=<V,E'>$ – произвольный пакет связей.

Нумерацию φ на графе G назовем *допустимой* для пакета связей P тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:

$A1$) Для любых смежных ребер $e, e'\in E$ $\varphi(e)\cap\varphi(e')=\varnothing$.

$A2$) Для любого ребра $u=(v_k,v_m)$ из E' существует φ – монотонный (v_k,v_m)-путь в G, т.е. путь $W=e_1,e_2,\ldots,e_r$ ($v_k\in e_1$, $v_m\in e_r$, $e_j\in E$, $j=1,\ldots,r$, $e_i\cap e_{i+1}\neq\varnothing$, $j=1,\ldots,r-1$) такой, что существует набор чисел $x_1,\ldots, x_r$ ($x_j\in\varphi(e_j)$, $j=1,\ldots,r$), для которого выполняется: $x_1<x_2<\ldots<x_r$.

$A3$) Для любого ребра $e\in E$ и для любого числа $a\in\varphi(e)$ нумерация φ'

$$\varphi'(e')=\begin{cases}\varphi(e'), если\ e'\in E\setminus\{e\}\\ \varphi(e)\setminus\{a\}, если\ e'=e\end{cases}$$ не удовлетворяет $A2$.

Содержательно, φ есть расписание функционирования сети, т.е. для каждого ребра из G φ указывает, в какие моменты времени оно задействовано.

Тройка $<G,P,\varphi>$, где φ – допустимая для пакета P нумерация на графе G, называется коммуникационным графом (сетью).

Пусть $N(G,P)$ – множество всех допустимых нумераций для пакета связей P на графе G.

Определим следующие функционалы

$$L(G,P,\varphi)=\sum_{e\in E}|\varphi(e)|,\quad T(G,P,\varphi)=\left|\bigcup_{e\in E}\varphi(e)\right|. \qquad (1)$$

Содержательно, $L(G,P,\varphi)$ есть суммарное время работы коммуникационной сети, $T(G,P,\varphi)$ – число тактов параллельной работы.

Пусть F — один из функционалов (1), X — произвольный класс связных неориентированных графов на V, $G'\in X$, P — пакет связей на V.

Тогда определим следующие функционалы:

$$F(G',P)=\min_{\varphi\in N(G',P)} F(G',P,\varphi)\,,\; F(X,P)=\min_{G\in X} F(G,P)\,.$$

Введем обозначения: G_n — множество всех связных n-вершинных графов, K_n — полный неориентированный граф на n вершинах.

Очевидно, что $L(K_n,P)=L(G_n,P)$, $L(K_n,P)=L(G_n,P)$.

Пусть $G=\langle V,E\rangle$ — орграф, $x\in V$. Обозначим $\mathrm{inv}(G,x)=|\{e\in E|\, e=(x,y)\}|$, $\mathrm{outv}(G,x)=|\{e\in E|\, e=(y,x)\}|$.

Фундаментом орграфа P будем называть граф $U(P)$, получаемый из P после удаления ориентации на всех дугах.

Фундаментом нумерации φ на графе $G=\langle V,E\rangle$ назовем граф $G_\varphi=\langle V,E_\varphi\rangle$ такой, что

$$e\in E_\varphi \Leftrightarrow ((e\in E)\&(\varphi(e)\neq\varnothing)).$$

Орграф P будем называть связным без учета ориентации, если $U(P)$ связен. Пакет P будем называть связным, если он как орграф связен без учета ориентации.

2. Сложность реализации полного пакета на K_n

Пусть COM_n — полный ориентированный граф на n вершинах.

Теорема 1 [1]. $L(K_n, COM_n)=2n-4$, если $n\geq 4$.

Теорема 2 [5].

$$T(K_n,COM_n)=\begin{cases}\log_2 n,\; n=2^p\\ [\log_2 n]+1,\; n=2^p+2l\\ [\log_2 n]+2,\; n=2^p+2l+1.\end{cases}$$

3. Сложность реализации пакетов типа "константа" на K_n

Лемма 1. Пусть $n\geq 1$, $G=\langle V,E\rangle\in G_n$, P — произвольный связный пакет на V. Тогда $L(G,P)\geq n-1$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in N(G,P)$, $L(G,P)=L(G,P,\varphi)$. Фундамент нумерации φ $G_\varphi=(V,E_\varphi)$ является связным, так как расписание φ реализует связный пакет P.

$L(G,P)=L(G,P,\varphi)\geq|E_\varphi|\geq n-1$, что и требовалось доказать.□

Пусть A_n — множество всех пакетов типа "константа" на n вершинах (ориентированных графов вида $\langle\{1,2,\ldots,n\},\{(1,i),(2,i),\ldots,(n,i)\}\rangle$).

Теорема 3. Пусть $n\geq 1$, $K_n=\langle V,E\rangle$, $P=\langle V,E_P\rangle\in A_n$. Тогда $L(K_n,P)=n-1$.

Доказательство. По лемме 1 $L(K_n,P)\geq n-1$. Построим такую нумерацию φ, реализующую P на K_n, что $L(K_n,P,\varphi)=n-1$. Пусть $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$. Так как $P\in A_n$, то $\exists a\in\{1,\ldots,n\}: E_P=\{(v_1,v_a),(v_2,v_a),\ldots,(v_n,v_a)\}$. Определим φ следующим образом: $\varphi((v_i,v_j))=\{j\}$, если $i=a$, $j\neq i$, и $\varphi((v_i,v_j))=\varnothing$ в других случаях. Нумерация φ является допустимой для P, $L(K_n,P,\varphi)=n-1$, следовательно, $L(K_n,P)=n-1$.□

Через $I_\varphi(v,t)$ обозначим множество вершин, соединенных с вершиной v хотя бы одним путем с монотонно возрастающими метками, меньшими или равными t.

Определим также $I^+_\varphi(v,t)=I_\varphi(v,t)\setminus I_\varphi(v,t-1)$.

Лемма 2. Пусть φ — некоторая допустимая нумерация на $G=\langle V,E\rangle$, $v\in V$. Тогда $|I^+_\varphi(v,t)|\leq 2^{t-1}$ и $|I_\varphi(v,t)|\leq 2^t-1$.

Лемма доказывается индукцией по t и из нее следует

Лемма 3. Пусть $G=\langle V,E\rangle\in G_n$, $P=\langle V,E'\rangle$ — произвольный пакет. Тогда

$$T(G,P) \geq]\log_2(M^+(P)+1)[.$$

Теорема 4. Пусть $n \geq 1$, $K_n = <V,E>$, $P = <V,E_P> \in A_n$. Тогда $T(K_n,P) =]\log_2 n[$.

Истинность утверждения теоремы вытекает из предыдущих лемм и того факта, что существует допустимая для P на K_n нумерация φ, для которой $T(K_n,P,\varphi) =]\log_2 n[$.

4. Сложность реализации пакетов типа "цикл", "перестановка", "цепь" на K_n

Пусть $n \geq 1$, C_n – множество всех ориентированных циклов длины n.

Теорема 5. Пусть $n \geq 1$, $P \in C_n$. Тогда $L(K_n,P) = n - 1$.

Теорема 6. Пусть $P \in C_n$. Тогда $T(K_n,P) = 2$ для $n > 2$; $T(K_n,P) = 1$ для $n = 2$; $T(K_n,P) = 0$ для $n = 1$.

Данные две теоремы доказываются построением соответствующих допустимых нумераций.

Пакетом типа "перестановка" назовем такой орграф $P = <V,E_P>$, что $\mathrm{inv}(P,v) = \mathrm{outv}(P,v) = 1$ для любой $v \in V$. Обозначим через P_n множество всех пакетов типа "перестановка".

Теорема 7. Пусть $n \geq 1$, $P \in P_n$ – пакет типа "перестановка", состоящий из циклов $P_1, P_2, \ldots, P_k$, $P_i \in C_{n_i}$. Тогда $L(K_n,P) = n - k$, $T(K_n,P) = \max\limits_i T(K_{n_i},P_i) \leq 2$.

Доказательство. Пусть $L(K_n,P) = m < n-k$ и φ – такая допустимая нумерация, что $L(K_n,P,\varphi) = L(K_n,P)$. Тогда число связных компонент в $U(\varphi)$ строго больше, чем k, чего не может быть, так как φ реализует пакет, фундамент которого имеет k связных компонент. Кроме того, мы можем построить нумерацию $\varphi^* = \coprod\limits_{i=1}^{k} \varphi_i$, где φ_i – допустимая нумерация для P_i. $L(K_n,P,\varphi^*) = n-k$, следовательно, $L(K_n,P) = n-k$. Справедливость второго утверждения теоремы очевидна.□

Обозначим через H_n множество всех цепей (ориентированных циклов без одного ребра) на n вершинах;

Теорема 8. Пусть $P \in H_n$. Тогда $L(K_n,P) = n-1$ для $n \geq 1$; $T(K_n,P) = 2$ для $n > 2$; $T(K_n,P) = 1$ для $n = 2$; $T(K_n,P) = 0$ для $n = 1$.

Истинность этих утверждений вытекает из того, что $\forall P = <V,E> \in H_n$ $\exists P' = <V,E'> \in C_n$: $E' = E \setminus \{e\}$, $e \in E$ и $L(K_n,P) = L(K_n,P')$, $T(K_n,P) = T(K_n,P')$.□

5. Реализация пакетов типа "входящее дерево" на K_n

Ориентированный граф P будем называть пакетом типа "входящее дерево", если он связен без учета ориентации, из каждой его вершины выходит ровно одна дуга и он имеет ровно одну петлю. Множество всех входящих деревьев на n вершинах обозначим через T_n.

Теорема 9. Пусть $n \geq 1$, $K_n = <V,E>$, $P = <V,E_P> \in T_n$. Тогда $L(K_n,P) = n - 1$.

Доказательство проводится построением соответствующей допустимой нумерации.

Пусть $P = <V,E_P> \in T_n$. Вершину $v \in V$ будем называть четной, если длина пути от v к корню дерева четна, и нечетной в противном случае.

Введем следующие обозначения:

$ODD(P)$ – множество нечетных вершин дерева P,

$EVEN(P)$ – множество четных вершин дерева P,

$$O(P) = \max_{v \in ODD(P)} \mathrm{inv}(P,v),$$

$$o(P) =]\log_2(O(P)+1)[,$$

$$E(P) = \max_{v \in EVEN(P)} \mathrm{inv}(P,v),$$

$$e(P) =]\log_2(E(P)+1)[.$$

Теорема 10. Пусть $n \geq 1$, $P \in T_n$. Тогда
$\max\{e(P), o(P)\} \leq T(K_n, P) \leq e(P)+o(P)$.

6. Сложность реализации пакетов типа "подстановка" на K_n

Обозначим $S_n := \{<\{1,...,n\}, E> | \exists\varphi : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\},\ E=\{(i,\varphi(i)),\ i=1,...,n\}\}$. Элементы S_n будем называть пакетами типа "подстановка".

Теорема 11. Пусть $n \geq 1$, $K_n = <V,E>$, $P = <V,E_P> \in S_n$, k – суммарное число циклов и петель в P. Тогда $L(K_n,P)=n-k$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in N(K_n,P)$ и $L(K_n,P,\varphi)<n-k$. Так как пакет P принадлежит S_n и P имеет ровно k циклов и петель, то граф $Q=U(P)$ имеет ровно k связных компонент Q_i. Кроме того, так как $L(K_n,P,\varphi)<n-k$, то граф $R=U(\varphi)$ имеет не менее, чем $k+1$ связных компонент R_j. Следовательно, $\exists m,r | Q_m \cap R_r \neq \varnothing$, $Q_m / R_r \neq \varnothing$. Существуют такие $v,w \in P_m$, что $v \in Q_m \cap R_r$, $w \in Q_m / R_r$. Так как в Q_m существует (v,w)-путь, то такой путь должен существовать и в R. Однако v и w лежат в разных компонентах связности R. Противоречие.

Теперь построим такую $\varphi \in N(K_n,P)$, что $L(K_n,P,\varphi)=n-k$. Рассмотрим любую связную компоненту Q_i графа $Q=U(P)$. Так как $P \in S_n$, то Q_i состоит из одного цикла с присоединенными к его вершинам деревьями (длина цикла больше либо равна 1). Из теорем 5 и 9 видно, как можно построить нумерацию φ_i на K_n, реализующую часть P_i пакета P, соответствующую компоненте Q_i с $L(K_n,P,\varphi)=|Q_i|-1$, где $|Q_i|$ – число вершин в Q_i. Определим $\varphi=\cup\varphi_i$. Очевидно, что $\varphi \in N(K_n,P)$, $L(K_n,P,\varphi)=n-k$.

7. Двойственные пакеты

Двойственным пакетом для пакета $P=<V,E>$ назовем такой пакет $P^* = <V,E^*>$, что ребро $e=(v,w)$ принадлежит E тогда и только тогда, когда ребро $e=(w,v)$ принадлежит E^*. Очевидно, что $(P^*)^*=P$.

Не ограничивая общности, можно полагать, что нумерация – это отображение из $\{1,...,n\}$ в 2^Z.

Двойственной нумерацией для нумерации φ назовем такую нумерацию φ^*, что $r \in \varphi(e)$ тогда и только тогда, когда $-r \in \varphi^*(e)$. Очевидно, что $(\varphi^*)^*=\varphi$.

Теорема 12. Пусть $G=<V,E>$ – произвольный связный неориентированный n-вершинный граф, $P=<V,E_P>$ – произвольный пакет, $\varphi \in N(G,P)$. Тогда

1) $\varphi^* \in N(G,P^*)$

2) $L(G,P,\varphi)=L(G,P^*,\varphi^*)$, $T(G,P,\varphi)+=T(G,P^*,\varphi^*)$.

Теорема 13. Пусть X – произвольный класс связных неориентированных графов на n-вершинном множестве V, $P=<V,E_P>$ – произвольный пакет. Тогда

$$L(X,P)=L(X,P^*),\ T(X,P)=T(X,P^*).$$

1. Hainal A., Milner E.S., Szemeredi E. //Can. Math. Bul. 1972. Vol.15. №3. P.447.
2. Burosch G., Gorlov W. W., Labahn R., Szegedy M. // J. of Information Processing and Cybernetics. 1984. Vol.20. №10/11. P.557.
3. Loshkaryova S.Y. // J. of Information Processing and Cybernetics. 1993. Vol.29. №2. P.87.
4. Бурош Г., Леонтьев В.К., Маркосян А.С. // Тр. ИМ СО АН СССР. 1987. №46. С.3.
5. Ву Ким Туан. // Докл. АН БССР. 1983. Т.27. №5. С.399.
6. Shostak R., Baker B. // Discrete Math.2 (1972). P.191.
7. Lebensold K. // Studies in Appl. Math. 52 (1973). P.345.
8. Kleitman D.J., Shearer J.B. // Discrete Math. 30 (1980). P.151.
9. Knödel // Discrete Math. 1981. Vol.13. P.95.
10. Yuh-Jiuan Tsay, Gerard J. Chang. // Discrete Math. 163 (1997). P.165.
11. Hedetniemi S.M., Hedetniemi S.T., Liestman A.L. // Networks, 18 (1988). P.319.
12. Farley A., Proskurowski A. // J. of Combinatorics, Information & System Science. 1980. Vol.5. №2. P.161.
13. Labahn R. // J. of Information Processing and Cybernetics. 1986. Vol.22. №9. P.475.

Поступила в редакцию 24.09.97.